ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 62.

DER GANZEN REIHE 367. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN,
E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER FIGURENTAFEL.

LEIPZIG, 1920.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Anon 7d
9 E 5.
410 + 125

Nachweis zu der Figurentafel.

Tafel I. F. Krüger.

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge. Band 62.

Neuntes Heft. Seite

1. Jan Weyssenhoff. Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel. I. Hydrodynamischer Teil 1
2. Gustav Mie. Die Einführung eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Gravitationsfeld einer schweren Kugel 46
3. C. Dieterici. Zum Problem der Zustandsgleichung . . . 75
4. A. Sommerfeld. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie 95

Ausgegeben am 20. Mai 1920.

Zehntes Heft.

1. Marie Anna Schirmann. Zur Theorie der Doppelgitter. I. (Ein elektrostatisches Problem.) 97
2. Karl F. Lindman. Zur Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität 107
3. W. Schottky. Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum. (Thermische Ionisierung und thermisches Leuchten.) I. Teil 113
4. Otto Schaefer. Die Schwingungen biegungssteifer Saiten . 156
5. J. Traube. Über Balloelektrizität, Molekularkräfte und elektrische Kräfte 165
6. Erich Rumpf. Über die Polarisation in der Geißlerentladung 173

Ausgegeben am 28. Mai 1920.

Elftes Heft.

1. Carl Benedicks. Galvanometrischer Nachweis der Thermospannung 1. Art beim flüssigen Quecksilber 185
2. Max Born und Elisabeth Bormann. Zur Gittertheorie der Zinkblende 218
3. Hans Vogel. Die Zungenpfeife als gekoppeltes System . . 247
4. A. Gockel. Beiträge zur Kenntnis von Farbe und Polarisation des Himmelslichtes 283

Ausgegeben am 8. Juni 1920.

Zwölftes Heft.

1. Willy Möbius. Über die Dispersion von Wasser und Äthylalkohol zwischen 7 und 35 mm Wellenlänge und Vorversuche zur Verwendung noch kürzerer elektrischer Wellen 293
2. Richard Gans. Die Trägheit der Elektrizität (eine Kritik) 323
3. Richard Gans. Ein Ultrafiltrierapparat 327
4. Richard Gans. Ultramikroskopische Studien. (Methoden zur Formbestimmung subultramikroskopischer Teilchen) . . . 331
5. Hans Ferd. Mayer. Kritik zur Wanderungsgeschwindigkeitsformel Herrn Langevins 358
6. E. Waetzmann. Über erzwungene Schwingungen bei gestörter Superposition 371

Ausgegeben am 17. Juni 1920.

Dreizehntes Heft.

Seite

1. O. Knopf. Die Versuche von F. Harreß über die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern 389
2. M. v. Laue. Zum Versuch von F. Harreß 448
3. R. Seeliger. Die Aufrechterhaltung der negativen Erdladung, das Grundproblem der luftelektrischen Forschung 464
4. H. Weyl. Erwiderung auf Hrn. Sommerfelds Bemerkungen über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie 482

Ausgegeben am 8. Juli 1920.

Vierzehntes Heft.

1. H. Barkhausen und H. Lichte. Quantitative Unterwasserschallversuche 485
2. H. Dember und M. Uibe. Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdschattens in der Atmosphäre 517
3. Günther Thilo. Der Strahlungsdruck auf Kreiszylinder aus beliebigem Material 531
4. J. Wallot. Kinematische und energetische Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen . 569

Ausgegeben am 16. Juli 1920.

Fünfzehntes Heft.

1. Teófilo Isnardi. Experimentaluntersuchungen an trüben Medien. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans) 573
2. Max Weth. Über die Anregung des kontinuierlichen, Serien- und Bandenspektrums des Wasserstoffs durch die langsamen Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms . . 589
3. Erwin Schrödinger. Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft 603
4. Reinhard Mecke. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel. (Fortsetzung) 623
5. H. Vogel und M. Wien. Zungenpfeife und Röhrensender . 649
6. Rudolf H. Weber. Die Magnetisierbarkeit von Kupfer–Zinklegierungen. (Nach Messungen von Konrad Greulich † berichtet) 666

Ausgegeben am 4. August 1920.

Sechzehntes Heft.

1. F. Krüger. Theorie der Schneidentöne. (Hierzu Tafel I) . 673
2. A. Rubinowicz. Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (I. Mitteilung) 691
3. A. Rubinowicz. Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (II. Mitteilung) 716
4. G. Hoffmann. Zur experimentellen Entscheidung der Frage der Radioaktivität aller Elemente 738
5. Max Wien. Bemerkung zu der Arbeit von W. Hahnemann und H. Hecht: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“ 759

Ausgegeben am 20. August 1920.

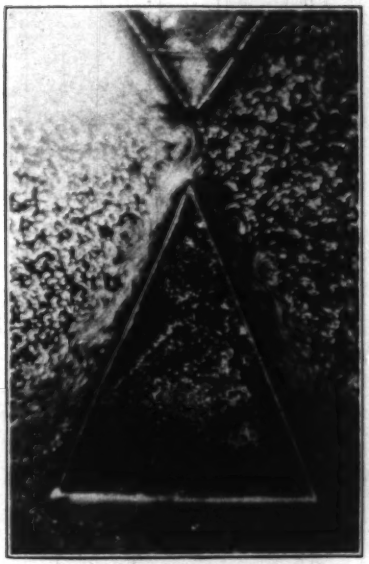


Fig. 1.

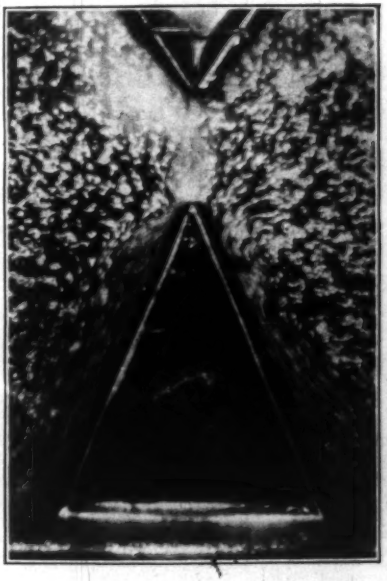


Fig. 2.

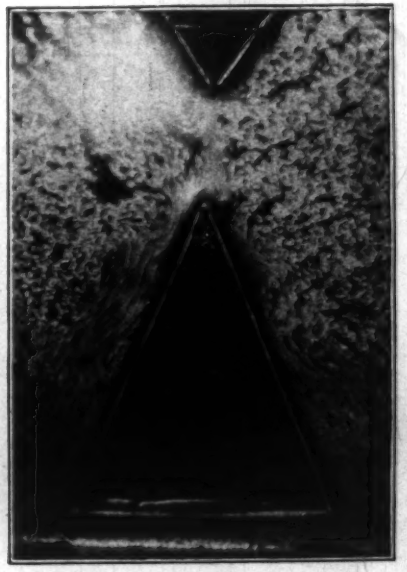


Fig. 3.

F. Krüger.

GETTY
CENTER
LIBRARY

1920. № 9.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel. I. Hydrodynamischer Teil;*

von Jan Weyssenhoff.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine kritische Zusammenstellung unserer Kenntnisse über die Gesetze der „langsamen" Bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen. Der erste Teil ist der hydrodynamischen Seite des Problems gewidmet, im zweiten wird die gaskinetische Auffassung vertreten. Es wird dort auf die äußerst schwachen theoretischen Grundlagen der so oft angewandten Stokes-Cunnighamschen Formel hingewiesen. Falls manche der hier enthaltenen Tatsachen und Bemerkungen selbstverständlich oder gar trivial erscheinen sollten, so diene der Hinweis als Entschuldigung, daß in vielen der besprochenen theoretischen und experimentellen Arbeiten verschiedene Resultate der früheren Forschung teilweise übersehen oder gar mißdeutet wurden. Auch harren noch einige Unstimmigkeiten zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen ihrer endgültigen Erklärung (vgl. insbesondere § 7b).

Wir präzisieren zuerst die Bedeutung einiger Benennungen, die wir im weiteren durchgehends gebrauchen werden. Ein Teilchen bewege sich unter dem Einflusse einer konstanten Kraft F in einem Medium, dessen Koeffizienten der inneren Reibung wir mit μ bezeichnen wollen. Nach Erreichung des stationären Bewegungszustandes wird sich das Teilchen mit einer konstanten Geschwindigkeit V bewegen, und wenn wir

$$F = W \cdot V \quad \text{und} \quad V = B \cdot F \tag{1}$$

setzen, so nennen wir, wie gewöhnlich, B die *Beweglichkeit* des Teilchens; ihren reziproken Wert W werden wir als *Widerstandskoeffizienten* bezeichnen. In allen weiter unten besprochenen Fällen wird die Geschwindigkeit V der Kraft F

proportional, d. h. W bzw. B werden von V bzw. F unabhängig sein. Wo sie nicht direkt aus den Grundannahmen erschlossen werden kann, da wird diese Proportionalität von vornherein durch eine besondere (stillschweigende) Annahme eingeführt werden.

Die Ermittlung des Widerstandskoeffizienten W als Funktion der Eigenschaften des Teilchens und des Mediums, in welchem es sich bewegt, bildet den Gegenstand der vorliegenden Besprechung.

§ 2. Die allgemeine Formulierung des Problems der „langsamen" Bewegung einer zähen Flüssigkeit.

Je langsamer die Bewegung einer Flüssigkeit ist, um so mehr überwiegt die Wirkung der inneren Reibung diejenige der Trägheit. Im Grenzfall unendlich kleiner Geschwindigkeiten fallen in den klassischen Navier-Poissonschen Differentialgleichungen der Bewegung einer zähen Flüssigkeit die „Trägheitsglieder" [mit $u(\partial u/\partial x)$ usw.] fort, und für stationäre Bewegung bei Abwesenheit äußerer Volumkräfte reduzieren sich diese Gleichungen auf die einfache Form

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta w. \tag{2}$$

Hierin bedeuten u, v, w die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, μ den Koeffizienten der inneren Reibung, p den Druck und

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dazu tritt gewöhnlich noch, als Spezialfall der physikalischen Beziehung zwischen Druck und Dichte, die Bedingung der Inkompressibilität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2'}$$

In Verbindung mit den nötigen Randwertangaben bilden die Gleichungen (2) und (2') die mathematische Formulierung des Problems der „langsamen", stationären Bewegung einer zähen Flüssigkeit.[1]) In jedem einzelnen Falle muß man

1) A. E. H. Love, Enz. d. math. Wiss. IV, 15, Hydrodynamik I, § 13; da die „Langsamkeit" der Bewegung nicht nur von der Geschwindigkeit und der Zähigkeit, sondern auch von den Raumabmessungen

natürlich die Berechtigung der gemachten Vernachlässigungen besonders untersuchen (vgl. § 6).

Die Art der Randwertangaben hängt wesentlich davon ab, ob man an der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit festen Körpern Gleitung zuläßt oder nicht. Im letzten Falle stimmt in jedem Punkte der Berührungsfläche die Geschwindigkeit der Flüssigkeit mit der des festen Körpers überein. Was die tropfbaren Flüssigkeiten anbetrifft, so nimmt man jetzt gewöhnlich an, daß diese letzte Bedingung immer erfüllt ist; jedenfalls ist das Bestehen der Gleitung zwischen einer tropfbaren Flüsigkeit und einer festen Oberfläche nie einwandfrei festgestellt worden.[1]) Anders verhält es sich aber mit verdünnten Gasen, für welche die Gleitung sowohl experimentell gefunden als auch theoretisch begründet wurde. Auf diesen Gegenstand werden wir im zweiten Teile noch näher zu sprechen kommen.

Vom hydrodynamisch-phänomenologischen Standpunkte aus wurde die Möglichkeit der Gleitung bereits von Navier und Poisson berücksichtigt. Die Gleitung besteht bekanntlich in einem Unterschied der Tangentialgeschwindigkeiten des festen Körpers und der angrenzenden Flüssigkeit. Navier und Poisson nahmen nun an, daß die Kraft pro Flächeneinheit, mit welcher die Flüssigkeit und der feste Körper aufeinander einwirken, dieser Differenz proportional sei, und da diese Kraft dem tangentialen Zug in der Grenzschicht der Flüssigkeit das Gleichgewicht halten muß, so ergibt sich daraus die erwünschte Grenzbedingung, die im Falle paralleler Laminarbewegung $[u = f(y),\ v = w = 0]$ die einfache Form

$$\beta(u - u') = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

annimmt. Hierin bedeutet u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, u' diejenige des festen Körpers und β ist der sogenannte

---

abhängig ist (vgl. § 6), so schlägt M. Smoluchowski (Krak. Anz. S. 143, 1904) zur besseren Charakterisierung dieses Bewegungszustandes den Ausdruck „mouvement calme" [ruhige, sanfte Bewegung] vor, während L. Prandtl („Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung", aus dem „Handwörterbuch der Naturwissenschaften", Bd. 4) den Ausdruck „schleichende" Bewegung gebraucht.

1) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O., und L. Graetz, „Reibung" in Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. I, 2.

Koeffizient der äußeren Reibung, d. i. der Betrag der Reibung pro Einheit der Oberfläche und pro Einheit der Relativgeschwindigkeit.

Da die Gleitung um so mehr in Betracht kommt, je kleiner die äußere und je größer die innere Reibung ist, so haben Helmholtz und Piotrowski[1]) als Maß der Gleitung das Verhältnis

$$\gamma = \frac{\mu}{\beta} \tag{4}$$

unter dem Namen *Gleitungskoeffizient* eingeführt. Derselbe Name wird auch in der kinetischen Gastheorie gebraucht.

Lorentz[2]) hat eine Reihe von allgemeinen Theoremen über die „langsame", stationäre Bewegung von festen Körpern in reibenden Flüssigkeiten (bei Abwesenheit von Gleitung) aufgestellt, deren Anwendung wir im § 8 kennen lernen werden. Den Zusammenhang der Lorentzschen Arbeit mit allgemeinen Sätzen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ersieht man am besten durch Vergleich mit analogen Resultaten der Elastizitätstheorie (Reziprozitätstheorem von Betti, Formeln für die Verschiebungskomponenten von Somigliana, Integration mittels verallgemeinerter Greenscher Funktionen), wie sie z. B. in dem Enzyklopädieartikel von Tedone[3]) zusammengestellt und besprochen sind. Dieser Parallelismus stammt daher[4]), daß die Gleichungen (2) der „langsamen" Bewegung einer reibenden Flüssigkeit der Form nach identisch mit den Gleichungen für das elastische Gleichgewicht isotroper Körper sind; an Stelle der Verschiebungskomponenten der Elastizitätstheorie treten in (2) die Geschwindigkeitskomponenten ein und die beiden Laméschen Elastizitätskonstanten λ und μ reduzieren sich durch den Ansatz[5])

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{5}$$

auf nur eine Konstante, den sogenannten Koeffizienten μ der inneren Reibung der Flüssigkeit.

---

1) Vgl. H. Helmholtz, Wiss. Abh. I. S. 172.

2) H. A. Lorentz, Abh. über theor. Physik, I. S. 23.

3) O. Tedone, Allg. Theoreme der math. Elastizitätslehre, Enz. d. math. Wiss. IV. 24.

4) Vgl. A. Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 697. 1911.

5) Vgl. z. B. A. G. Webster, „The Dynamics of particles ..." S. 550, und A. E. H. Love, a. a. O., § 12.

Im weiteren spezialisieren wir unser Problem auf die Bewegung kugelförmiger Teilchen; nur gelegentlich werden wir noch über anders gestaltete Teilchen einige Bemerkungen einzuflechten haben.

§ 8. Das Stokessche Gesetz.

Die Lösung des Problems der „langsamen", stationären Bewegung einer Kugel in einer unbegrenzten, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit unter dem Einflusse einer konstanten Kraft verdanken wir Stokes, der sie im Jahre 1851 in einer Abhandlung über die Bewegung von Pendeln[1]), mit Hilfe der nach ihm benannten Stromfunktion[2]) gegeben hat. Er fand, daß die Flüssigkeit auf die Kugel eine der Translation der Kugel entgegengesetzt gerichtete Kraft ausübt, die der Geschwindigkeit V der Kugel proportional ist. Der Widerstandskoeffizient drückt sich durch die folgende Formel aus:

$$W = 6\pi\mu a \tag{6}$$

(a Radius der Kugel), die allgemein unter dem Namen *Stokessches Gesetz* oder *Stokessche Formel* bekannt ist. Bei den Anwendungen kommt meistens die Spezialform

$$V = \frac{2}{9} a^2 g \frac{\sigma' - \sigma}{\mu} \tag{6'}$$

in Betracht, die die Geschwindigkeit einer unter dem Einflusse der Schwerkraft $[\frac{4}{3}\pi a^3(\sigma' - \sigma)g]$ fallenden Kugel von der Dichte σ' in einem zähen Medium von der Dichte σ angibt.

Eine einfache Ableitung des Stokesschen Gesetzes findet man in Kirchhoffs „Mechanik"[3]) und eine allgemeinere Methode zur Lösung der Gleichungen (2) durch Entwicklung in eine Reihe von räumlichen Kugelfunktionen in den §§ 328 bis 325, 335—336 des Lehrbuches der Hydrodynamik von Lamb.[4]) Andere Lösungsmethoden wurden von Boussinesq (vgl. § 8 und 12), Noether, Oseen (vgl. § 7a) u. a. gegeben.

---

1) G. G. Stokes, Cambr. Trans. 9. S. 8. 1851; Papers III, S. 59.

2) Vgl. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsch von J. Friedel) 1907, §§ 94, 95 und 325.

3) G. Kirchhoff, Vorl. über math. Phys., 4. Aufl., Leipzig 1897, Bd. I, S. 378.

4) H. Lamb, a. a. O.

Wir nehmen davon Abstand, einen vollständigen Beweis des Stokesschen Gesetzes hier wiederzugeben und erwähnen nur einige Resultate, auf die wir uns im folgenden mehrmals beziehen werden.

Da die Kugel bei der Stokesschen Problemstellung ihre Lage im Raume fortwährend ändert, so kann die Flüssigkeitsbewegung in bezug auf ruhende Achsen selbstverständlich nicht stationär sein; man pflegt deshalb das in Frage stehende Problem durch ein analoges zu ersetzen, indem man die Kugel als ruhend und die Flüssigkeit als im Unendlichen mit der konstanten Geschwindigkeit $-V$ in der x-Richtung strömend annimmt („ruhende Kugel in Parallelströmung").

Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit sind dann durch folgende Formeln gegeben[1]):

$$(7)\qquad \begin{cases} u = V\left(\frac{a}{r} - 1\right) + \frac{1}{4} V a (r^2 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r}, \\ v = \quad + \frac{1}{4} V a (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r}, \\ w = \quad + \frac{1}{4} V a (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} \end{cases}$$

und der Druck

$$(8)\qquad p = \tfrac{3}{2} \mu a V \frac{x}{r^3} + \text{konst.}$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ = Abstand vom Mittelpunkte der Kugel). Diese Werte befriedigen die Gleichungen (2) mit den Grenzbedingungen $u = v = w = 0$ für $r = a$ und $u = -V, v \quad w = 0$ für $r = \infty$, wovon man sich durch direktes Einsetzen überzeugen kann.

Wenn wir jetzt dem ganzen betrachteten System eine Translationsgeschwindigkeit V in der x-Richtung erteilen, so kommt dadurch die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe, während die Kugel die Geschwindigkeit V erhält. Dadurch werden die Bedingungen der ursprünglichen Fragestellung wieder hergestellt; der entstandene Bewegungszustand ist stationär in bezug auf ein mit der Kugel sich bewegendes, nicht aber in bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem.

Eine Zeichnung der Stromlinien beim Problem der ruhenden Kugel in Parallelströmung findet man in dem Lehrbuche der

1) Vgl. H. Lamb, Phil. Mag. 21. S. 112. 1911.

Hydrodynamik von Lamb, S. 685. Aus dieser Figur oder aus der Linearität der Gleichungen (2) bzw. aus den Formeln (7) ist die bemerkenswerte symmetrische Form der Stromlinien vor und hinter der Kugel zu ersehen, welche von der Vernachlässigung der Wirkung der Trägheit herrührt.

Endlich findet man aus (7) für die Komponenten ξ, η, ζ des Rotors der Strömungsgeschwindigkeit folgende äußerst einfache Ausdrücke:

$$(9)\quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \eta = +\tfrac{3}{2} a V \frac{z}{r^3}, \quad \zeta = -\tfrac{3}{2} a V \frac{y}{r^3}.$$

Den Symmetrieverhältnissen entsprechend sind die Wirbellinien Kreise um die x-Achse.

Wir schließen mit einer interessanten Bemerkung, die zuerst wohl von Lord Rayleigh[1]) gemacht wurde. Sowohl das Bewegungsmoment wie die Energie der gesamten Flüssigkeit fallen in der von Stokes gegebenen Lösung unendlich aus. Wir müssen uns vergegenwärtigen, daß zur vollständigen Herstellung des betrachteten stationären Bewegungszustandes eine unendlich lange Einwirkung der konstanten Kraft F auf unsere Kugel erforderlich wäre (vgl. aber die Theorie von Oseen, § 7a).

§ 4.

Die Voraussetzungen, die dem Stokesschen Gesetze zugrunde liegen, können wir schematisch etwa folgendermaßen zusammenfassen:

I. Annahme einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik (vgl. § 5).
II. „Langsamkeit" der Bewegung, d. i. Vernachlässigung der Trägheitsglieder in den hydrodynamischen Grundgleichungen (§§ 6, 7).
III. Unbegrenztheit der im Unendlich ruhenden Flüssigkeit (§ 8).
IV. Stationärer Bewegungszustand (§ 9).
V. Kugelgestalt des sich bewegenden Körpers (§ 10).
VI. Verschwinden der Gleitung zwischen der Flüssigkeit und der Kugel (§ 11).
VII. Voraussetzung, daß die Kugel ein fester Körper ist (§ 12).

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 374. 1886; Sc. Papers, Bd. III, S. 480.

Fast alle diese Annahmen und Voraussetzungen gaben Anlaß zu theoretischen und experimentellen Arbeiten, die wir jetzt der Reihe nach besprechen wollen.

§ 5. Die Annahme einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik.

Die Annahme einer Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik impliziert die Vernachlässigung der atomaren Diskontinuitäten des Mediums, in welchem sich die Kugel bewegt, was nur dann gerechtfertigt ist, wenn die Dimensionen der Kugel groß sind im Vergleiche zu dem Maßstabe der atomistischen Struktur dieses Mediums. Es ergibt sich daraus für den Radius a der Kugel eine untere Grenze, die ja selbstverständlich mit der im folgenden Paragraphen enthaltenen Bedingung (12) nichts zu tun hat. Des Zusammenhanges wegen verlegen wir die genauere Besprechung dieser Frage in den zweiten Teil und erledigen zuerst die rein hydrodynamische Seite des Problems.

Hier fällt zuerst die Voraussetzung der Inkompressibilität auf. Zwar wird bei tropfbaren Flüssigkeiten die Vernachlässigung ihrer Zusammendrückbarkeit sicher erlaubt sein, aber die Behandlung eines Gases als inkompressibles Medium kann von vornherein ziemlich bedenklich erscheinen. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, daß bei „langsamer", stationärer Bewegung die Kompressibilität keinen merklichen Einfluß auf den Bewegungszustand ausüben kann. Schon ohne spezielle Rechnung können wir uns eine ungefähre Vorstellung von den hier obwaltenden Verhältnissen machen. Da die Kompressibilität zu Störungen Anlaß gibt, die sich mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen, so ist es ziemlich einleuchtend, daß merkliche Verdichtungen nur dann entstehen können, wenn die Kugelgeschwindigkeit mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar wird. Die Kleinheit des maßgebenden Verhältnisses dieser beiden Geschwindigkeiten wird aber durch die im folgenden Paragraphen angeführte Bedingung der „Langsamkeit" der Bewegung gewährleistet. Man überzeugt sich leicht, daß die Geschwindigkeiten, die der Ungleichung (12) genügen, noch bei den kleinsten in Betracht kommenden Radien, als verschwindend klein gegen die Schallgeschwindigkeit angesehen werden dürfen.

Eine genauere Durchrechnung dieses Problems führt im

großen und ganzen zu den nämlichen Resultaten, wie bereits O. E. Meyer[1]) bei der Behandlung des speziellen Problems der kleinen Schwingungen einer Kugel in einem zähen Medium (vgl. auch weiter unten § 9) gefunden hat. Einige Bemerkungen, die mit unserer Frage im Zusammenhang stehen, findet man auch in einer Arbeit von Lord Rayleigh[2]) über das Strömen einer kompressiblen Flüssigkeit um ein Hindernis. Von einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte ging Smoluchowski[3]) in seiner Abhandlung über die Grundgleichungen der Ärodynamik aus, wo er nicht nur die Kompressibilität, sondern auch den Einfluß der Temperaturunterschiede, der Wärmetönungen, Wärmeleitung usw. in den Kreis seiner Betrachtungen zog. Insbesondere berechnete er auch näherungsweise die Einwirkung dieser verschiedenen Faktoren auf die Lösung des Stokesschen Problems und kam zu dem Resultate, daß sie alle bei „langsamer" Bewegung zu keinen meßbaren Störungen Anlaß geben können.[4])

§ 6. Die „Langsamkeit" der Bewegung.

Die vom hydrodynamischen Standpunkte wichtigste Einschränkung des Gültigkeitsbereiches des Stokesschen Gesetzes ist zweifellos die vorausgesetzte „Langsamkeit" der Bewegung. Wir wissen, daß die Erscheinungen bei zunehmender Geschwindigkeit der Kugel immer komplizierter werden, „eine regellose wirbelnde Bewegung wird in einer Flüssigkeitsschicht nahe bei dem Körper erzeugt, und eine sich ausbreitende Schleppe von Wirbeln wird zurückgelassen, während die Bewegung in einiger Entfernung seitlich verhältnismäßig sanft und gleichförmig vor sich geht".[5]) Die hier auftretende „regellos wirbelnde Bewegung" („Eddies"), die mit den eigentlichen Wirbeln („Vortices") der klassischen Hydrodynamik nur sehr wenig zu tun hat[6]), entzieht sich bis jetzt fast vollständig der theoretischen Behandlung, und wenn es sogar

1) O. E. Meyer, Crelles Journ. **75**. S. 31. 1873.
2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **32**. S. 1. 1916.
3) M. Smoluchowski, Anz. Ak. Krakau, S. 143, 1904.
4) M. Smoluchowski, a. a. O. § 28.
5) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsch von J. Friedel), S. 736.
6) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O., Bemerkung 97 auf S. 77.

einmal gelingen sollte, die vollständigen Navier-Poissonschen Differentialgleichungen (mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Trägheit und der Viskosität) für diesen Fall zu integrieren, so ist es höchst zweifelhaft, ob dieser Lösung überhaupt irgendeine physikalische Bedeutung zukäme; es scheint vielmehr, daß beim Eintreten der „turbulenten Bewegung" nicht nur die klassischen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik ihre Gültigkeit verlieren, sondern daß hier überhaupt die altüblichen Methoden, die auf einer eindeutigen Beschreibung der Naturvorgänge mittels einiger weniger Differentialgleichungen beruhen, versagen und daß wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen, statistische Betrachtungen, Schwankungsberechnungen u. dgl. zu Hilfe gezogen werden müssen. Diese höchst interessanten Fragen fallen jedoch völlig aus dem Rahmen der vorliegenden Abhandlung heraus; hier müssen wir uns nur nach einem geeigneten Kriterium umsehen, mit dessen Hilfe wir die „Langsamkeit" der Bewegung zu beurteilen haben.

Zu einem solchen gelangen wir durch Vergleich der Größenordnung der vernachlässigten „Trägheitsglieder" in den vollständigen Navier-Poissonschen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit (σ = Dichte der Flüssigkeit)

$$(10) \qquad \sigma u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma v \frac{\partial u}{\partial y} \text{ usw.} \quad \left[\text{Größenordnung: } \frac{\sigma a}{r^2} V^2\right]$$

mit der Größenordnung der in (2) verbliebenen „Reibungsglieder"

$$(11) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \quad \left[\text{Größenordnung: } \frac{\mu a}{r^2} V\right].$$

Die gesuchten Größenordnungen sind in die eckigen Klammern bereits eingetragen. Das zweite Resultat ergibt sich unmittelbar aus (8), vom ersten, das aus (7) ermittelt wurde, gibt man sich am leichtesten Rechenschaft, wenn man bedenkt, daß u, v, w von der Größenordnung von V sind und ihre ersten Ableitungen von der Größenordnung $(a\,V/r^2)$ der ξ, η, ζ in (9). Damit nun die Stokessche Formel irgendwelche Ansprüche auf Richtigkeit erheben kann, müssen jedenfalls die Ausdrücke (10) in der Umgebung der Kugel (r von der Größenordnung von a) gegen die Ausdrücke (11) verschwinden. Diese

Forderung führt zu der folgenden, zuerst von Lord Rayleigh[1]) abgeleiteten Bedingung für die „Langsamkeit" der Bewegung beim Stokesschen Problem

$$R = \frac{a\sigma V}{\mu} \ll 1. \tag{12}$$

In dem links stehenden Ausdrucke, den wir mit einem R bezeichnet haben, erkennen wir die sogenannte „Reynoldsche Zahl", die auch für den Eintritt der turbulenten Bewegung maßgebend ist. Doch soll das keineswegs bedeuten, daß es sich bei den ersten Abweichungen vom Stokesschen Gesetz, die durch das Hineinspielen der vernachlässigten Trägheit der Flüssigkeit zustande kommt, gleich um turbulente Bewegungszustände handeln sollte wie das von manchen Forschern, die sich des Stokesschen Gesetzes bedient haben, gelegentlich erwähnt wird. Es ist übrigens fraglich, ob bei der Translationsgeschwindigkeit einer Kugel in einem zähen Medium eine scharf definierte Grenze zwischen der regelmäßigen und der turbulenten Bewegung überhaupt vorhanden ist; weiter sei noch darauf hingewiesen, daß der Eintritt der Turbulenz bei Flüssigkeitsströmung in Röhren Reynoldschen Zahlen von über 1000 entspricht, während wir gleich sehen werden, daß die ersten Abweichungen vom Stokesschen Gesetz sich bereits bei R etwa gleich 0,2 bemerkbar machen. Das Erscheinen der Reynoldschen Zahl in der Ungleichung (12) erklärt sich einfach dadurch, daß der Verlauf der beiden Erscheinungen durch dieselben physikalischen Größen bedingt wird; der Vergleich der Dimensionen der „Trägheitsglieder" und der „Reibungsglieder" (Anwendung des Prinzips der „mechanischen Ähnlichkeit") führt unmittelbar zu dem Resultate, daß die Gültigkeit der Stokesschen Formel, ebenso wie der Eintritt der turbulenten Bewegung, wesentlich nur von dem Werte der Reynoldschen Zahl abhängig sein kann.

Die Überlegungen, mit deren Hilfe wir die Bedingung (12) abgeleitet haben, scheinen aber etwas mehr als bloße Dimensionsbetrachtungen zu sein, da sie uns zu dem Schluß geführt haben, daß es für die Gültigkeit der Stokesschen Formel notwendig ist, daß R viel kleiner als die Einheit sei. Dieses

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **36**. S. 365. 1893; vgl. auch H. A. Lorentz, a. a. O. S. 41.

Resultat sagt aber nur sehr wenig aus. Es wäre vielmehr die Beantwortung der folgenden Frage erwünscht: Unterhalb welcher Grenze muß R liegen, damit man bei der Anwendung der Stokesschen Formel sicher sein kann, keine größeren Fehler als so und so viel Prozent zu begehen? Es ist bis heutzutage — von einem diesbezüglichen Versuche, den wir am Ende des folgenden Paragraphen besprechen werden, abgesehen — nicht gelungen, der Theorie derartige Auskünfte abzuzwingen; möglicherweise kann diese Frage erst durch die Auflösung der vollständigen Navier-Poissonschen Gleichungen vollkommen streng beantwortet werden. Hier ist eine Bemerkung am Platze, welche die Mathematiker nicht müde werden, den Physikern zu wiederholen: Um aus den Fehlern einer nur angenähert gültigen Differentialgleichung, insbesondere wenn es sich um eine partielle Differentialgleichung handelt, auf die Fehler des Integrals dieser Gleichung schließen zu können, ist eine besondere Untersuchung notwendig; man kann einfache Beispiele angeben, wo die Anwesenheit beliebig kleiner Zusatzglieder in der Differentialgleichung den Verlauf der Erscheinung, die durch diese Gleichung beschrieben wird, vollständig verändert.[1])

Die Antwort auf die eben aufgeworfene Frage, der die Theorie bis heute machtlos gegenüber steht, kann aber durch unmittelbare Versuche erhalten werden. Zuerst wollen wir noch der Ungleichung (12) eine andere Form geben, die für den experimentell wichtigsten Fall, daß die äußere Kraft sich auf die Schwerkraft reduziert, besonders geeignet erscheint. Die Fallgeschwindigkeit V ist in diesem Falle mittels der Beziehung (6′) mit dem Kugelradius verknüpft und für eine bestimmte Flüssigkeit und ein bestimmtes Kugelmaterial hängt die Anwendbarkeit des Stokesschen Gesetzes nur von dem Kugelradius ab; mit wachsender Größe der Kugel hört die Gültigkeit dieses Gesetzes allmählich auf. Es ist dann zweckmäßig, einen sogenannten „kritischen Radius" $\bar{a}$ einzuführen[2]), für welchen das Verhältnis $a\sigma V/\mu$ gerade gleich eins wird. Mit Hilfe der Beziehung (6′) finden wir:

---

1) Vgl. z. B. E. Borel, Introduction géometrique à quelques théories phys., Note IV.

2) Nach H. S. Allen, Phil. Mag. 50. S. 323. 1900.

(13′) $$\bar{a} = \sqrt[3]{\frac{q\mu^2}{2\sigma(\sigma'-\sigma)g}}$$

und

(14′) $$R = \frac{a\sigma V}{\mu} = \frac{a^3}{\bar{a}^3}.$$

Die Bedingung (12) kann nun folgendermaßen geschrieben werden:

(12′) $$a < \bar{a}.$$

Bei seinen Untersuchungen über fallende Metallkugeln in verschiedenen Ölen fand nun Arnold[1]) (vgl. auch §§ 7b, 8 und 12) das Stokessche Gesetz für

(15′) $$a < 0{,}6\,\bar{a}$$

bestätigt. Bei etwas größeren Radien beobachtete er merkliche Abweichungen davon. Die Genauigkeit seiner Versuche betrug etwa $^1/_2$—1%. Die Ungleichung (15′) oder

(15) $$\frac{a\sigma V}{\mu} < 0{,}2$$

können wir also als die experimentell gefundene Bedingung der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes mit einer $^1/_2$ bis 1-prozentigen Genauigkeit ansehen. Dieser Befund stimmt auch gut mit den Experimenten von Zeleny und Mc Keehan[2]) an in Luft fallenden Kügelchen überein. (Nur die Versuche an natürlichen Sporen machen eine Ausnahme, vgl. weiter unten § 10.)

Zur Orientierung über die in Betracht kommenden Größenordnungen geben wir zwei Beispiele von „kritischen Radien" an: Für Kugeln vom spezifischen Gewicht 2 in Wasser wird $\bar{a}$ etwa gleich 0,011 cm; für Kugeln vom spezifischen Gewicht 1 in Luft 0,0048 cm. Wir werden so auf die bekannte Tatsache geführt, daß wir kein Recht haben, die Stokessche Formel auf gewönliche Regentropfen anzuwenden, wohl aber auf genügend kleine Nebeltröpfchen, wie sie z. B. in den klassischen Experimenten zur Bestimmung der elektrischen Elementarladung von J. J. Thomson und H. A. Wilson gebraucht wurden.

---

1) H. D. Arnold, Phil. Mag. **22**. S. 755. 1911.
2) J. Zeleny u. L. W. Mc Keehan, Phys. Zeitschr. **11**. S. 78. 1911.

§ 7. Die theoretischen Untersuchungen von Oseen.

a) Um zu der Bedingung (12) zu gelangen, haben wir einfach das Verhältnis der Größenordnungen von (10) und (11) in der Umgebung der Kugel gebildet. Für beliebige r ist aber dieses Verhältnis gleich $\sigma r V/\mu$ und wächst mit r ins Unendliche, wie klein auch die Geschwindigkeit V sein mag. Von dieser Bemerkung ging Oseen[1]) aus in einer Arbeit, die er selbst folgendermaßen zusammenfaßt: „Bei der von Stokes gegebenen Ableitung der sogenannten Stokesschen Formel werden Glieder vernachlässigt, welche in großer Entfernung von der Kugel ausschlaggebend sind. Durch diesen Umstand wird es bedingt, daß der von Herrn Whitehead[2]) gemachte Versuch, die von Stokes gegebenen Formeln für die durch die Translation der Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder zu verbessern, scheitern mußte. Um dem genannten Übelstand abzuhelfen, muß man auch in erster Annäherung in den Navierschen Differentialgleichungen gewisse mit dem Faktor V behaftete Glieder beibehalten. Zu dem so erhaltenen linearen Systeme wurden die verallgemeinerten Greenschen Formeln aufgestellt. Mittels der so gewonnenen Hilfsmittel wurde die durch die genügend langsame Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit untersucht. Diese Bewegung weicht in hinreichender Entfernung von der Kugel selbst bei den kleinsten Werten von V beträchtlich von der Stokesschen Bewegung ab. Die Stokessche Formel für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel erleidet dadurch keinen Eintrag in ihrer Gültigkeit."

Die Arbeit von Oseen wurde von Lamb[3]) in eleganter Weise kommentiert; gleichzeitig gab auch Lamb eine viel einfachere Ableitung der Oseenschen Formeln. Die veränderte Berechnungsmethode von Oseen besteht nach Lamb in einer *teilweisen* Berücksichtigung der Wirkung der Trägheit der Flüssigkeit. Dadurch fällt der errechnete Bewegungszustand in bezug auf die Äquatorebene ($x = 0$) nicht mehr symmetrisch aus; in größeren Entfernungen von der Kugel

1) C. W. Oseen, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik **6.** Nr. 29. 1910; **7.** Nr. 9—12. 1911.

2) J. B. Whitehead, Quart. Journ. of Math. **23.** S. 78. 1888.

3) H. Lamb, Phil. Mag. **21.** S. 112. 1911.

weicht er beträchtlich von demjenigen der Stokesschen Theorie ab, geht aber in der Umgebung der Kugel in diesen über und ergibt deshalb dieselbe Formel für den Widerstandskoeffizienten. Aus diesem Grunde kommt der Oseenschen Untersuchung nur rein theoretisches Interesse zu, um so mehr als auch die korrigierten Ausdrücke für die Strömungskomponenten (die nebenbei bemerkt viel komplizierter als die Stokesschen sind) physikalisch keinen merklichen Fortschritt bedeuten: Es ist zwar richtig, daß mit zunehmender Entfernung von der Kugel die bei der Stokesschen Lösung vernachlässigten Trägheitsglieder groß im Vergleich zu den beibehaltenen Reibungsgliedern werden, aber während das Verhältnis der Trägheitsglieder zu den Reibungsgliedern wie die erste Potenz des Radiusvektors mit diesem ins Unendliche wächst, verschwinden diese Glieder selbst wie $1/r^2$ bzw. $1/r^3$. Die Oseensche Korrektion bezieht sich also auf Gebiete, wo die Strömung (oder die Abweichungen von der ungestörten Parallelströmung beim Problem der „ruhenden Kugel in Parallelströmung") sowieso wegen ihrer Kleinheit physikalisch nicht mehr in Betracht kommt. Immerhin ist es beruhigend, zu erfahren, daß für genügend kleine Geschwindigkeiten die Stokessche Theorie den ganzen Strömungsverlauf, soweit dieser überhaupt noch merklich ist, richtig wiedergibt, unbeachtet der Tatsache, daß diese Theorie auf Annahmen fußt, die für sehr große Entfernungen von der Kugel sicher nicht erfüllt sind.

Was den Zusammenhang der Oseenschen Theorie mit der Lorentzschen Methode der Berechnung des Einflusses fester Wände betrifft, vergleiche man den Schluß des folgenden Paragraphen.

b) Außer dem obenerwähnten Versuche von Whitehead, der, wie Oseen gezeigt hat, an der Unzulänglichkeit der Stokesschen Lösung für sehr große Entfernungen von der Kugel scheiterte, wurde dieselbe Aufgabe auch von Noether[1]) in Angriff genommen. Da der betrachtete Vorgang der gleichmäßigen Translation einer Kugel in einem zähen Medium, wie bereits besprochen, wesentlich nur von dem Werte der Reynoldschen Zahl $R = a\sigma V/\mu$ abhängt, und da die

1) F. Noether, Zeitschr. für Math. u. Phys. **62**. S. 1. 1913.

Stokessche Formel den Grenzfall der allgemein gültigen Widerstandsformel für verschwindende Reynoldsche Zahlen darstellt, so können wir für die durch Berücksichtigung der „Trägheitsglieder" korrigierte Stokessche Formel die folgende Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von R

$$W = 6\pi a\,(1 + A_1 R + A_2 R^2 + \ldots) \tag{16}$$

ansetzen; in den Untersuchungen von Whitehead, Noether und einer neueren Arbeit von Oseen[1]) handelte es sich im wesentlichen um die Berechnung des Koeffizienten A_1.

Noether gibt zuerst eine Abänderung der Stokesschen Problemstellung, mittels welcher man auch die von Oseen, vermerkte Schwierigkeit umgehen kann, ohne die Gleichung (2) für „langsame" Bewegung aufgeben zu müssen. Dazu braucht man nur an Stelle der „ruhenden Kugel in Parallelströmung" eine Strömung zu betrachten, die durch eine in großer Entfernung von der Kugel sich befindende Quelle und eine auf der entgegengesetzten Seite in gleicher Entfernung sich befindende Senke hervorgerufen wird; in der Nähe der Kugel fällt diese Strömung mit der Stokesschen praktisch zusammen, vorausgesetzt natürlich, daß die Entfernung der Quellen hinreichend groß gegenüber dem Kugelradius ist. Leider können die weiteren Ausführungen von Noether, wie Oseen[1]) in einer besonderen Abhandlung gezeigt hat, nicht mehr als einwandfrei bezeichnet werden, was um so mehr zu bedauern ist, als sie zu sehr anschaulichen und recht plausiblen Schlüssen führen und in mancher Beziehung mit experimentellen Ergebnissen in besserer Übereinstimmung zu stehen scheinen, wie die entsprechenden korrigierten Ausdrücke von Oseen.

So findet Noether, daß „die Stokessche Formel Gültigkeit hat, bis auf Zusatzglieder, deren Verhältnis zum ursprünglichen quadratisch in der Reynoldschen Zahl $R = a\sigma V/\mu$ ist", während Oseen für den Koeffizienten A_1 nicht den Wert Null, wie Noether, sondern $^3/_8$ ausrechnet; das führt zu dem Näherungsausdrucke

$$W = 6a\pi\mu\left(1 + \frac{3}{8}\,\frac{a\sigma V}{\mu}\right) \tag{17}$$

1) C. W. Oseen, Arkiv usw. 9. Nr. 16. 1913.

für die korrigierte Stokessche Formel. Dieser steht aber im offensichtlichen Widerspruch mit den Versuchen von Arnold (vgl. oben § 6), indem der experimentell ermittelte Gültigkeitsbereich der ursprünglichen Stokesschen Formel sich merklich größer erweist als der aus (17) folgende. Um die Arnoldschen Resultate bequem mit (17) vergleichen zu können, macht man am besten von dem bereits eingeführten „kritischen Radius" Gebrauch, wodurch (17) folgende Gestalt annimmt:

$$W = 6a\pi\mu\left(1+\frac{3}{8}\,\frac{a^2}{\bar{a}^2}\right). \tag{17'}$$

Der direkte Vergleich mit den von Arnold angegebenen Kurven fällt ganz zuungunsten dieses Ausdrucks aus. Bereits bei $a = 0{,}3\,\bar{a}$ verlangt die Oseensche Formel (17') eine einprozentige Korrektion des Stokesschen Gesetzes; die Genauigkeit der Arnoldschen Messungen betrug aber etwa $^1/_2$ Proz. und es müßten also nach (17') für alle Kugeln von größerem Radius wie $0{,}3\,\bar{a}$ mit Sicherheit feststellbare Abweichungen vom Stokesschen Gesetz auftreten, was, wie bereits erwähnt [vgl. Ungleichung (15')] keineswegs der Fall war. Erst bei Kugelradien, die 0,6—0,7 des kritischen Radius betrugen, traten die ersten Anzeichen des Versagens des Stokesschen Gesetzes auf; für $a/\bar{a} = 0{,}6$ beträgt aber das Korrektionsglied in (17') nicht weniger als 8% des ursprünglichen Wertes. Auch in den Messungen von Zeleny und Mc Keehan[1]) an fallenden Wachskügelchen in Luft, deren Genauigkeit den Arnoldschen Messungen etwas nachsteht, kam die Oseensche Korrektion gar nicht zum Vorschein.

Die Versuche von Arnold wurden in zylindrischen Gefäßen ausgeführt, und der Einfluß der Gefäßwände wurde mit Hilfe der Lorentz-Ladenburgschen Korrektionsformel [vgl. § 8, Gleichung (10)] ermittelt. Die Richtigkeit dieser Korrektion wurde von Ladenburg[2]) selbst für $a/r = 0{,}01 - 0{,}09$ (a = Kugelradius, r = Zylinderradius) und von Arnold bis 0,1 bestätigt. Für Kugeln, deren Durchmesser ein Zehntel des Zylinderdurchmessers überstieg, beobachtete zwar Arnold eine Abnahme der Fallgeschwindigkeit, die größer war, als

1) J. Zeleny und L. W. Mc Keehan, a. a. O.

2) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **22**. S. 287. 1907; **23**. S. 447. 1907.

die aus der Ladenburgschen Korrektionsformel folgende; durch Vergleich der Fallgeschwindigkeiten in verschieden weiten Röhren lassen sich jedoch — Näheres in der Originalabhandlung von Arnold — die Abweichungen infolge des Versagens der Ladenburgschen Korrektion und infolge des Hineinspielens der Trägheit der Flüssigkeit ziemlich sicher voneinander unterscheiden, und es scheint, daß man auf diesem Wege zu keiner brauchbaren Erklärung der Unstimmigkeit der Formel (17) mit der Erfahrung gelangen kann. Auch die folgende Bemerkung kann das nicht tun. Der Ausdruck (17) wurde streng genommen nur für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit abgeleitet, und da die Trägheit der Flüssigkeit den Bewegungszustand hauptsächlich in größeren Entfernungen von der Kugel beeinflußt (vgl. § 7, am Anfang), so wäre es denkbar, daß die Vergrößerung des Widerstandskoeffizienten durch die Trägheit bei Anwesenheit fester Wände kleiner wird als bei einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, und daß es deshalb nicht erlaubt ist, die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz einfach als Summe der Korrektionen (17) und (20) zu berechnen. Doch kann man auf den von Arnold angegebenen Kurven auch Punkte aufsuchen, wo die beobachtete Abweichung vom Stokesschen Gesetz auch ohne Anbringen der Ladenburgschen Korrektion unterhalb des von (17) geforderten Wertes liegt; beim Festhalten an der Formel (17) würde dieses Resultat auf eine Verkleinerung des Widerstandes durch die Einführung der Wände hinweisen, was wohl gänzlich ausgeschlossen erscheint.

Wir haben uns bei dieser Frage etwas länger aufgehalten, weil es sich hier um die einzige Unstimmigkeit zwischen Theorie und Experiment handelt, die uns im Laufe der vorliegenden Besprechung aufgestoßen ist, und die durch Berufung auf anderweitig bekannte Tatsachen nicht beseitigt werden konnte. Es will fast scheinen, als ob in den langwierigen und etwas unübersichtlichen Rechnungen von Oseen irgendein Versehen untergelaufen wäre, und als ob der Koeffizient der linearen Glieder in (16) sich dennoch als Null herausstellen sollte, wie in der unkorrigierten Arbeit von Noether. Vielleicht ließe sich die einfache und anschauliche Rechnungsmethode von Noether derart vervollkommnen, daß man sie dadurch von dem von Oseen erhobenen Einwand freimachen kann?

Die weitere theoretische und experimentelle Verfolgung dieser Kontroverse wäre jedenfalls von Interesse.

§ 8. Einfluß der Gefäßwände.

Die Voraussetzung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit stellt selbstverständlich nur einen Grenzfall dar, der bei experimentellen Prüfungen des Stokesschen Gesetzes nie streng erfüllt sein kann. Es erwächst nun der Theorie die Aufgabe, den Einfluß verschieden gestalteter Gefäßwände, mindestens näherungsweise zu berechnen, was leider bis jetzt, trotz des allgemeinen dazu von Lorentz (vgl. unten) angegebenen Näherungsverfahrens, nur in zwei Spezialfällen gelungen ist. Das experimentell so wichtige Problem der Beeinflussung der langsamen Bewegung von Kugeln durch *zwei* parallele, ebene Wände ist theoretisch noch nicht gelöst worden. Jedenfalls genügt aber der eine der ausgerechneten Spezialfälle — die Bewegung längs der Achse eines Kreiszylinders —, um das Stokessche Gesetz einer experimentellen Prüfung unterziehen zu können, und der zweite — die Beeinflussung der Bewegung durch *eine* ebene Wand — kann mindestens dazu verwendet werden, um den Einfluß der Gefäßwände abzuschätzen und in manchen Fällen als vernachlässigbar zu erkennen.

Die eben erwähnte Lorentzsche Methode[1]) besteht in einer schrittweisen Lösung des betrachteten Problems durch Superposition von Bewegungszuständen, die zwar jedesmal die Gleichungen (2) für die „langsame" Bewegung einer zähen Flüssigkeit streng erfüllen, die gegebenen Randwertbedingungen aber nur teilweise befriedigen. Die sukzessive Bestimmung der Strömung, die durch eine gleichförmige Translation einer Kugel in einer von festen Wänden eingeschlossenen Flüssigkeit hervorgerufen wird, stellt sich etwa folgendermaßen dar: Als erste Näherung nimmt man die aus der Stokesschen Theorie bekannte Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit um eine sich translatorisch bewegende Kugel. Die zweite Näherung ergibt sich durch Superposition der ersten mit der „reflektierten" Strömung. Diese unterliegt der Randwertbedingung, daß die Geschwindigkeiten an der von den festen Wänden eingenommenen Fläche entgegengesetzt gleich den-

1) A. H. Lorentz, a. a. O.

jenigen des ersten Bewegungszustandes sein sollen. Im übrigen ist die „reflektierte" Strömung wiederum so berechnet, als ob die Kugel nicht da wäre und die Flüssigkeit sich bis ins Unendliche erstrecken würde. Die Berechtigung dieser Superposition ist durch die Linearität der zugrunde gelegten Gleichungen (2) bedingt. Wir sehen, daß die „reflektierte" Strömung derart gewählt ist, daß sie die „direkte" an der Wandoberfläche gerade aufhebt, wodurch die Randwertbedingungen an dieser Fläche erfüllt werden ($u = v = w = 0$, da die Gleitung gleich Null vorausgesetzt wird); an der Oberfläche der beweglichen Kugel ist das aber keineswegs der Fall, denn dort erfüllt bereits die „direkte" Strömung für sich die Randwertbedingungen unseres Problems ($u = V$, $v = w = 0$) und die hinzukommenden Geschwindigkeitskomponenten der „reflektierten" Strömung sind dort im allgemeinen von Null verschieden. Das eben geschilderte Näherungsverfahren kann aber weiter fortgesetzt werden; als dritte Näherung haben wir die Superposition der zweiten mit der von der Kugel „reflektierten" Strömung zu nehmen, dann wiederum die „Zurückwerfung" von der festen Wand usw.

Die Aufgabe wird wesentlich erleichtert, wenn die Kugel als unendlich klein angesehen werden darf. Dann sind auch die Geschwindigkeiten, die diese Kugel in endlicher Entfernung hervorruft, unendlich klein und ebenso alle die Geschwindigkeiten, welche die „reflektierte" Strömung ausmachen. Es genügt dann, bereits bei der zweiten Näherung stehen zu bleiben. Wie die Geschwindigkeiten, so setzt sich auch der Widerstand, den die Kugel erleidet, additiv aus demjenigen der direkten (Widerstand $= 6\pi\mu a V$) und der reflektierten Strömung (Widerstand $= 6\pi\mu a V_1$) zusammen. Wir brauchen nur die Geschwindigkeit V_1 der reflektierten Strömung am Orte des Mittelpunktes der Kugel zu berechnen; da wir diese Strömung in der unmittelbaren Umgebung der unendlich kleinen Kugel als Parallelströmung auffassen können, berechnen wir die Kraft, die die „reflektierte" Strömung auf unsere Kugel ausübt, mit Hilfe der gewöhnlichen Stokesschen Formel zu $6\pi\mu a V_1$ und daraus den gesuchten Widerstandskoeffizienten zu $6\pi\mu a(1 + V_1/V)$. In der letzten Überlegung haben wir stillschweigend angenommen, daß die Richtung der Geschwindigkeit der „reflektierten" Bewegung

mit der Richtung der ursprünglichen Bewegung zusammenfällt. Im allgemeinen, d. h. bei beliebig gestalteten Wänden, braucht das aber keineswegs der Fall zu sein. Wir müssen dann in der eben hingeschriebenen Formel V_1 durch die Komponente der „Zusatzgeschwindigkeit" in der Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit ersetzen und außerdem die Entstehung einer, durch die Anwesenheit der Wände bedingten, der Geschwindigkeit proportionalen, transversalen Kraft auf die Kugel in Betracht ziehen. Bewegt sich eine Kugel im Abstande d von einer ebenen Wand parallel zu derselben, so ist eine solche Kraft, wie Stock[1]) nachgewiesen hat, sogar bei Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung in a/d nicht vorhanden; die Kugel wird infolge ihrer Bewegung von der Wand weder angezogen noch abgestoßen, ebensowenig erleidet sie einen Drehimpuls.

Die Anwendung der Lorentzschen Methode auf konkrete Probleme stößt aber gewöhnlich auf große rechnerische Schwierigkeiten, denn die Bestimmung der „reflektierten" Bewegung erfordert die Berechnung eines Integrals der Differentialgleichungen (2) mit vorgegebenen Geschwindigkeitskomponenten an einer vorgegebenen Fläche, eine Aufgabe, für deren Behandlung zwar allgemeine Methoden vorhanden sind (vgl. § 2), wogegen aber die explizite Durchführung der Rechnung nur in einigen, speziell einfachen Fällen bekannt ist. Für eine Kugel ist die Lösung als Entwicklung in eine Reihe von räumlichen Kugelfunktionen von Oberbeck und Lamb[2]) gegeben worden; ebenso läßt sie sich für einen unendlich langen Kreiszylinder mit Hilfe der Besselschen Funktionen behandeln.[3]) Für eine unendlich ausgedehnte Ebene hat Lorentz[4]) einen Kunstgriff angegeben, wie man direkt aus einer beliebigen „direkten" Strömung die zugehörige „reflektierte" ausrechnen kann.

Das Lorentzsche Annäherungsverfahren ist also nur dann anwendbar, wenn die explizite Berechnung der „reflektierten" Strömung, sowohl von dem bewegten Körper (der Kugel), als auch von den festen Wänden möglich ist. Das

1) J. Stock, Anz. Ak. Krakau, S. 18, 1911.
2) Vgl. H. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik, §§ 323—325, 335—336.
3) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **28**. S. 447. 1907.
4) H. A. Lorentz, a. a. O.

ist z. B. nach dem oben Gesagten für das bereits mehrfach erwähnte Problem der Bewegung einer Kugel in einer von einer festen, ebenen Wand begrenzten, zähen Flüssigkeit der Fall, wo die Berechnung der „Zurückwerfung" von der Wand mit Hilfe des Lorentzschen Kunstgriffes und die „Zurückwerfung" von der Kugel mit Hilfe der von Lamb angegebenen Reihenentwicklung ausgeführt werden kann. Lorentz fand derart für den Widerstandskoeffizienten einer Kugel, die sich senkrecht zu einer ebenen Wand in der Entfernung d von derselben bewegt

$$W = 6\pi\mu a\left(1+\frac{9}{8}\frac{a}{d}\right) \tag{18}$$

und analog für parallele Bewegung

$$W = 6\pi\mu a\left(1+\frac{9}{16}\frac{a}{d}\right). \tag{19}$$

Stock[1]) setzte im Falle der Parallelbewegung diese Berechnung bis zu den Gliedern vierter Ordnung in a/d fort, und erhielt

$$W = 6\pi\mu a\left\{\frac{1}{1-\frac{9}{16}\frac{a}{d}}-\left(\frac{a}{2d}\right)^3\left(1+\frac{9}{16}\frac{a}{d}\right)\right\}. \tag{19'}$$

Mit Beibehaltung der quadratischen Glieder in a/d können wir also sagen, daß die Anwesenheit einer ebenen, zur Translationsrichtung der Kugel parallelen Wand den Widerstandskoeffizienten in der Stokesschen Formel im Verhältnis 1 zu $1-\frac{9}{16}\frac{a}{d}$ vergrößert.

Ebenso sind nach dem oben Gesagten alle „Zurückwerfungen" bei der analogen Behandlung des Problems der Bewegung einer Kugel längs der Achse eines Kreiszylinders (vom Radius r) explizite berechenbar. Ladenburg[2]) findet für den Widerstandskoeffizienten in diesem Falle

$$W = 6\pi\mu a\left(1+2{,}4\frac{a}{r}\right). \tag{20}$$

Die Ergänzung dieser Formel durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder in a/r, die nach dem oben Gesagten eine bloße Rechenarbeit darstellt, wäre aus mehreren Gründen erwünscht: Arnold[3]) beobachtete bei seinen

1) J. Stock, a. a. O.
2) R. Ladenburg, a. a. O.
3) H. D. Arnold, a. a. O.

Experimenten an fallenden Metallkügelchen in ölgefüllten Zylindergefäßen Abweichungen von der Ladenburgschen Korrektionsformel, die sicherlich durch die Vernachälssigung der quadratischen Glieder in (20) zu erklären sind. Auch würde man durch diese Fortsetzung der Reihenentwicklung (20) instand gesetzt, die experimentell gefundenen Abweichungen vom Stokesschen Gesetz infolge des Überschreitens des Bereiches der „langsamen" Bewegung besser von denjenigen, die bei sehr engen Gefäßen hervortreten, auseinander zu halten, was für die am Schlusse des vorigen Paragraphen durchgeführte Diskussion von Belang ist.

Auf viel größere Schwierigkeiten stößt man bei der theoretischen Behandlung des Problems der langsamen Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die von *zwei* festen, ebenen Wänden eingeschlossen ist. Eine direkte Berechnung der „Zurückwerfung" von den beiden Ebenen zusammen ist hier nicht bekannt, der Lorentzsche Kunstgriff, der nur die Geschwindigkeitskomponenten an einer Ebene auf einmal aufzuheben gestattet, ist nicht anwendbar. Ladenburg[1]) hat versucht, durch wiederholte Anwendung dieses Kunstgriffes zum Ziele zu kommen, doch auch dieses Verfahren scheint für die Lösung dieses Problems nicht sehr geeignet zu sein. Denn die Brauchbarkeit der Lorentzschen Methode hängt wesentlich mit der Kleinheit der Kugel im Verhältnis zu ihrer Entfernung von den Wänden zusammen, welche Kleinheit das schnelle Abnehmen jeder darauffolgenden „Zurückwerfung" im Vergleich mit der vorangehenden gewährleistet. Aber wenn wir die von einer unendlich ausgedehnten Ebene „reflektierte" Strömung an der entgegengesetzten, ebenfalls unendlich ausgedehnten Ebene „reflektieren", so ist kein Grund vorhanden, warum die zweite „Zurückwerfung" aus wesentlich kleineren Geschwindigkeiten bestehen sollte als die erste. In der Tat nehmen die abwechselnd positiven und negativen Glieder, die Ladenburg für den Widerstandskoeffizienten erhält, der absoluten Größe nach nur sehr langsam ab. Wenn wir auch so viele dieser „Zurückwerfungen" bestimmt hätten, daß alle weiteren bereits mit Recht vernachlässigt werden könnten, so hätte doch die

1) R. Ladenburg, a. a. O.

Superposition aller berechneter „Zurückwerfungen" erst das ergeben, was wir in der allgemeinen Beschreibung der Lorentzschen Methode als „erste reflektierte Strömung" bezeichnet haben: eine Strömung, die zu der gewöhnlichen Stokesschen Strömung addiert, deren Geschwindigkeitskomponenten an beiden Ebenen zusammen gerade aufhebt. Dann käme erst die Berechnung der „zweiten Näherung" (quadratische Glieder in a/d) an die Reihe usw.

Das eben Gesagte soll aber keineswegs einen Einwand gegen die Landenburgsche Arbeit sein, denn bei seinen Versuchen war diese Korrektion vernachlässigbar klein, da sie nur notwendig war, um die Anwesenheit der beiden Deckel seiner zylindrischen Gefäße zu berücksichtigen (a/l etwa gleich 0,005). Es soll nur davor gewarnt werden, die von Ladenburg angegebene Korrektionsformel [vgl. (6')]

$$V = \frac{2g a^2(\sigma' - \sigma)}{9\mu\left(1 + 2{,}4\,\frac{a}{r}\right)\left(1 + 3{,}3\,\frac{a}{2l}\right)} \tag{20'}$$

(l = halbe Entfernung zwischen den beiden parallelen, ebenen Deckeln) falsch zu interpretieren: Der erste Klammerausdruck im Nenner trägt der Vergrößerung des Widerstandes durch die Zylinderwand Rechnung, und stellt das nach der Lorentzschen Methode berechnete erste Glied einer Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von a/r dar. Der zweite Klammerausdruck hat aber eine davon ziemlich verschiedene Bedeutung; denn erstens ist die Beeinflussung der Bewegung der fallenden Kugel durch die beiden Deckel mit dem Verhältnis der Entfernungen der Kugel von diesen Deckeln veränderlich und der Koeffizient 3,3 stellt einen Mittelwert für die in den Experimenten von Ladenburg in Betracht kommenden Entfernungen (etwa 1 : 9 bis 9 : 1) dar und zweitens ist nach dem oben Gesagten die ganze Berechnung dieses Korrektionsfaktors bei weitem nicht so einwandfrei, wie die des vorigen.

Die Beeinflussung der Bewegung von Teilchen durch zwei parallele Ebenen (Objektträger und Deckgläschen) spielt eine so wichtige Rolle bei verschiedenen experimentellen Untersuchungen, daß es jedenfalls der Mühe wert wäre, dieses Problem auf die eine oder andere Weise theoretisch zu lösen. Man kann ferner versuchen, eine empirische Formel dafür

aufzustellen, was auch von Westgren[1]) gemacht worden ist. Seine Experimente, die nach einer äußerst eleganten Methode ausgeführt wurden, bezeichnet er aber selbst als nur vorläufige Orientierung und ihre Genauigkeit dürfte etwa 10 Proz. nicht übersteigen (Störungen infolge Konvektionsströmungen, Zeitmessung mit einer gewöhnlichen Stoppuhr usw.). Für den Widerstandskoeffizienten in der Mitte zwischen den beiden Platten stellte Westgren die folgende empirische Formel auf

$$W = 6\pi\mu a\left(1 + 3{,}3\,\frac{a^3}{l^3}\right), \tag{21}$$

worin l die halbe Entfernung der beiden Platten bedeutet. Es fällt hier das Fehlen des linearen Gliedes in a/l auf; man hätte eher in Analogie mit der entsprechenden Formel (19) eine Reihenentwicklung

$$W = 6\pi\mu a\left(1 + A_1\,\frac{a}{l} + A_2\,\frac{a^2}{l^2} + \cdots\right) \tag{21'}$$

erwartet, mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten A_1. [Es handelt sich übrigens wohlgemerkt um den Widerstandskoeffizienten in der Mitte zwischen den beiden Platten; im allgemeinen Falle müßte eine entsprechend kompliziertere Reihenentwicklung an Stelle von (21') treten.] Man kann sogar in Anlehnung an die Lorentzsche Methode von vornherein etwas über die Größe des Koeffizienten A_1 aussagen: Er muß zwischen dem Werte $^9/_{16}$, der für eine Platte gilt und dem Doppelten dieses Wertes liegen, denn die von jeder Platte „reflektierte" Strömung wird jedenfalls durch die Einführung der anderen Platte (auf welcher sie verschwinden muß) derart in ihrer Ausbildung gestört, daß sie eine kleinere Geschwindigkeit am Orte des Mittelpunktes der Kugel besitzen wird. Eine nähere Betrachtung der Westgrenschen Resultate zeigt auch, daß sie der Formel (21') zum mindesten nicht widersprechen. Die von Westgren gemessenen Fallzeiten für gleichgroße Fallstrecken seien mit z bezeichnet, dann sind die Werte von $a^2 z$ [vgl. Formel (6')] den Widerstandskoeffizienten offenbar proportional; wenn wir $a^2 z$ als Funktion von a/l aufzeichnen, so können wir uns davon leicht überzeugen, daß die Tangente keineswegs die Tendenz hat, für verschwindende Radien der a-Achse parallel zu werden, wie es die Formel (21) verlangen

1) A. Westgren, Ann. d. Phys. **52**. S. 308. 1917.

würde. Eine sichere Entscheidung kann nach den vorliegenden Messungen nicht getroffen werden, weil die experimentellen Kurven zu weit von der $a^2 z$-Achse weg abbrechen (zu wenig Messungen für kleine a/l); eine Berechnung der Schnittpunkte mit der $a^2 z$-Achse nach dem gewöhnlichen Stokesschen Gesetz, welches an dieser Achse gelten muß, mit Berücksichtigung der anderweitig bestimmten Werte für die Dichte der Teilchen und die innere Reibung der Fallflüssigkeit (Wasser) führt ebenso zu ganz ungeeigneten Resultaten; offenbar ist die Dichte der Gummigutt- und Mastixteilchen wegen der zufälligen Veränderlichkeit von Teilchen zu Teilchen nicht genau genug bestimmbar. Eine rohe Schätzung des Koeffizienten A_1 kann folgendermaßen erhalten werden: Wir berücksichtigen nur die Punkte, für welche a/l kleiner als 0,2 ist, was etwa für die Hälfte aller Messungen der Fall ist; a^2/l^2 ist dann kleiner als 0,04 und da A_2 etwa gleich 3 ist, so übersteigt dann das quadratische Glied in (21′) kaum die Genauigkeit der Messungen; die berücksichtigten Teile der Kurven approximieren wir nun durch Gerade, und aus der Neigung dieser Geraden gegen die a/l-Achse erhalten wir bei den Gummigutteilchen die folgenden Werte für A_1: 1,46, 1,50, 1,04, 1,20, 0,84, die gerade von der vermuteten Größe, $^9/_{16}$—$^9/_8$, sind. Man könnte auch den Einwand machen, daß, wenn A_1 nicht gleich Null wäre, auch die Kurven in der Westgrenschen Figur 6 ($a^2 z$ als Funktion von a^2/l^2) keine Geraden sein würden; doch lassen sich die Abweichungen in der Figur deshalb gar nicht bemerken, weil alle Punkte mit kleinen a, infolge der gewählten Auftragungsart, in die unmittelbare Nähe der $a^2 z$-Achse zusammengedrängt sind. Die weitere experimentelle Untersuchung dieser Frage wäre sehr erwünscht. Jedenfalls ist es interessant, zu wissen, daß man in einem ziemlich großen Bereich von a/l (0,05—0,7) den Widerstandskoeffizienten einer Kugel, die sich in der Mitte zwischen zwei planparallele Platten, parallel zu diesen bewegt, durch die Formel (21) darstellen kann; doch muß man sich daran erinnern, daß diese Formel nur auf eine 5—10 prozentige Genauigkeit Anspruch erhebt und man darf sich jedenfalls nicht durch sie verleiten lassen, die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz für kleine Werte von a/l zu unterschätzen. Für Radien, die kleiner sind als etwa ein Zehntel der halben Entfernung der

beiden Platten, wird es deshalb angezeigt sein, sich zu Orientierungszwecken etwa der Formel

$$W = 6\pi\mu a\left(1+\frac{a}{l}\right) \tag{21''}$$

zu bedienen.

Eine weitere Anwendung der Lorentzschen Methode finden wir in einer Arbeit von Smoluchowski[1]), wo die gegenseitige Beeinflussung zweier fallenden Kugeln untersucht wird. Die Berechnung einer jeden der aufeinanderfolgenden „reflektierten" Strömungen ist hier durch die oft erwähnte Lambsche Reihenentwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen ermöglicht, und falls beide Kugeln in Bewegung sind, so findet man die mechanischen Wirkungen durch Superposition der Kräfte in den beiden Spezialfällen, in welchen je nur eine Kugel in Bewegung und die andere in Ruhe ist.

Für den Fall, wo beide Kugeln (gleiche Radien a) sich parallel zueinander mit der gleichen Geschwindigkeit V bewegen, findet Smoluchowski die folgenden Resultate: 1. Es wirken auf beide Kugeln gleiche und *gleichgerichtete* Kräfte. 2. Eine Komponente in der Bewegungsrichtung verkleinert den Widerstand um

$$\frac{9}{2}\,\frac{a^2\pi\mu}{r}\,V\left(1-\frac{3}{4}\,\frac{a}{r}\right).$$

Hierin bedeutet r den gegenseitigen Abstand der beiden Kugelmittelpunkte. 3. Die andere Komponente längs der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte, und zwar in der Richtung von der zurückgelegenen zur voranschreitenden Kugel, hat die Größe:

$$\frac{9}{2}\,\frac{a^2\pi\mu}{r}\,V\cos\Theta\left(1-\frac{9}{4}\,\frac{a}{r}\right).$$

Hierin bedeutet Θ den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte. 4. Außerdem ergibt die Rechnung, daß die Kugeln von Drehungsmomenten beansprucht werden. In allen angegebenen Resultaten sind die Glieder bis zu der zweiten Ordnung in a/r berücksichtigt. Interessant ist der scheinbare Widerspruch mit dem Satze von Wirkung und Gegenwirkung, der sich

1) M. Smoluchowski, Anz. Ak. Krakau S. 28. 1911; Cambridge Intern. Math. Congress 1912.

aber sofort durch die Bemerkung aufklärt, daß zwischen den Kugeln keine inneren Kräfte wirken, sondern die Flüssigkeit mitberücksichtigt werden muß.

Es ergibt sich auch u. a. aus diesen Resultaten, daß zwei nebeneinander fallenden Kugeln nicht nur etwas schneller als nach dem Stokesschen Gesetz fallen, sondern auch, daß die Fallbahn der beiden Kugeln von der Vertikalen um einen kleinen Winkel ε nach der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte hin geneigt ist, wo

$$\sin \varepsilon = \frac{3}{4} \frac{a}{r} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r}\right) \sin \Theta \cos \Theta.$$

Die eben erwähnten hydrodynamischen Sätze von Smoluchowski wurden von Oseen[1]) einer Kritik unterzogen, die sich ebenso auf alle mit der Lorentzschen Methode ausgeführten Rechnungen bezieht. Oseen geht wieder von der von ihm angegebenen modifizierten Lösung des Stokesschen Problems aus. Wie wir gesehen haben (§ 7a), bezog sich seine Korrektur nur auf größere Entfernungen von der Kugel, wo die von Stokes vernachlässigten Trägheitsglieder bereits über die Reibungsglieder hinauswachsen. Der Strömungszustand in der unmittelbaren Umgebung der Kugel war in beiden Theorien gleich und deshalb erhielt auch Oseen denselben Wert für den Widerstandskoeffizienten einer Kugel in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, wie Stokes. Bei der Lorentzschen Methode muß man aber bei der Berechnung der „reflektierten" Bewegung von den Werten der Strömungsgeschwindigkeiten in größeren Entfernungen von der Kugel Gebrauch machen und dabei könnte die Oseensche Korrektion von Belang werden. Aus dem von Oseen durchgerechneten Spezialfall der gegenseitigen Beeinflussung zweier fallenden Kugeln kann man die charakteristischen Merkmale für alle analogen Fälle übersehen, wo man die Rechnungen nach dem Lorentzschen Näherungsverfahren ausführt, mit dem einzigen Unterschiede, daß man die Oseensche Lösung des Stokesschen Problems an Stelle der ursprünglichen Stokesschen als Ausgangsströmung nimmt. Die Zusatzkräfte, die nach Oseen auf die Kugeln wirken, sind einander nicht mehr gleich, wie bei Smoluchowski; es entspricht

1) C. W. Oseen, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik 7. Nr. 33. 1911.

das der Unsymmetrie der Oseenschen Strömung (§ 7a) vor und hinter der Kugel, einer Unsymmetrie, die, wie bereits erwähnt, durch die teilweise Berücksichtigung der Trägheit der Flüssigkeit zustande kommt. Die Oseenschen Formeln werden mit den Smoluchowskischen identisch, wenn $r\sigma V/2\mu$ gegen die Einheit vernachlässigt werden kann; im entgegengesetzten Falle wird der Widerstand nach den Oseenschen Formeln nicht mehr proportional der Geschwindigkeit, die Begriffe der Beweglichkeit und des Widerstandskoeffizienten verlieren ihre Bedeutung, und man kann das auch so ausdrücken, daß man dann außerhalb des Gültigkeitsbereiches der „langsamen" Bewegung gelangt ist. Die Bedingung $\frac{r\sigma V}{2\mu} \ll 1$ hat dieselbe Form, wie die Bedingung (12) der „Langsamkeit" der Bewegung, nur daß die gegenseitige Entfernung r der beiden Kugeln an die Stelle des Kugelradius a getreten ist. Da r viel größer als a ist (die Lorentzsche Methode besteht ja in einer Entwicklung nach Potenzen von a/r), so ist diese Bedingung viel einschränkender als (12); in den klassischen Kondensationsversuchen von J. J. Thomson und A. H. Wilson und den Untersuchungen von Perrin über Emulsionen war sie jedenfalls erfüllt. Wie Smoluchowski bemerkt hat, überschätzt Oseen in seiner Abhandlung die Tragweite seiner Korrektion, weil er durch ein Versehen den Faktor σ in $r\sigma V/2\mu$ weggelassen hat.

Die Lösung des Problems der gegenseitigen Beeinflussung zweier Kugeln setzt uns auch in den Stand, das Problem der gleichzeitigen Bewegung einer großen Anzahl von Kugeln, einer Wolke, in Angriff zu nehmen. Da diese Frage in letzter Zeit, seitdem man in der experimentellen Elektronik allgemein zu der Methode der Messung an Einzelpartikeln (Millikan-Ehrenhaft) übergegangen ist, sehr an Aktualität eingebüßt hat, verweisen wir in bezug auf nähere Einzelheiten auf die diesbezügliche Abhandlung von Smoluchowski[1]), wo auch ein früherer Lösungsversuch von Cunningham[2]) kritisch besprochen wird.

Wir haben bereits am Anfang dieses Paragraphen darauf hingewiesen, daß die Ermittlung der Korrektionsformeln für

1) M. Smoluchowski, Cambr. Intern. Math. Congress 1912.
2) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. 83. S. 357. 1910 (zweiter Teil).

den Einfluß der Wände die einwandfreie experimentelle Verifikation des Stokesschen Gesetzes erst ermöglicht hat. Es kommen hier hauptsächlich die ausgedehnten experimentellen Untersuchungen von Ladenburg[1]) und von Arnold[2]) in Betracht. In diesen beiden Abhandlungen findet man auch eine kritische Zusammenstellung der früheren diesbezüglichen Arbeiten. Im großen und ganzen kann man aber aus diesen älteren Arbeiten nur wenig schließen, weil in ihnen der Einfluß der Gefäße, die „Langsamkeit" der Bewegung, die Konstanz der Temperatur usw. meistenteils nicht genügend berücksichtigt wurden. Speziell die Konstanthaltung der Temperatur stellt große Anforderungen an die Geschicklichkeit des Experimentators, denn erstens ist der Koeffizient der inneren Reibung mit der Temperatur gewöhnlich ziemlich stark veränderlich, und zweitens, was noch wichtiger erscheint, bewirken bereits sehr kleine Temperaturdifferenzen Strömungen in der Flüssigkeit, die die ganzen Messungen illusorisch machen können. In den beiden letztgenannten Untersuchungen wurden alle nötigen Vorsichtsmaßregeln getroffen und eine Meßgenauigkeit von etwa $^1/_2$ Proz. erreicht. Die Messungen wurden in zylindrischen Gefäßen ausgeführt und die Korrektion für den Einfluß der Wände mittels der Ladenburgschen Korrektionsformel (20′) berechnet. Sowohl das Stokessche Gesetz, wie auch diese Korrektionsformel selbst, fanden sich vorzüglich bestätigt. Dabei arbeitete Ladenburg mit Stahlkugeln von 0,1—0,2 cm Radius und einer sehr zähen Flüssigkeit (Lösung von Kolophonium in Terpentinöl, μ etwa gleich 1800, also rund 100000mal größer wie bei Wasser von 10° C), während Arnold mit verschiedenen Ölen von einer mehr als 1000mal kleineren Viskosität ($\mu = 0{,}07$—$0{,}69$) experimentierte. Die Metallkugeln, die er gebrauchte, mußten entsprechend viel kleiner gewählt werden, um innerhalb des Bereiches der „langsamen" Bewegung zu bleiben. Wie bereits besprochen, stellte auch Arnold experimentell die Grenzen dieses Bereiches fest [vgl. (15′)].

Außer diesen beiden Arbeiten, die das Stokessche Gesetz für tropfbare Flüssigkeiten bestätigten, wurden auch neuer-

1) R. Ladenburg, a. a. O.
2) H. D. Arnold, a. a. O.

dings verschiedene Untersuchungen über das Fallen von Kugelteilchen in Gasen angestellt. Alle die im zweiten Teil zu besprechenden experimentellen Prüfungen der Stokes-Cunnighamschen Formel ergaben auch eine gute Bestätigung des gewöhnlichen Stokesschen Gesetzes für nicht zu niedrige Gasdrucke.

§ 9. Ungleichförmige Bewegung.

Ein längst bekanntes Beispiel einer ungleichförmigen Bewegung eines festen Körpers in einem zähen Medium ist das ebenfalls zuerst von Stokes[1]) gelöste Problem der kleinen Schwingungen einer Kugel in einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit. Wenn die Kugel kleine Pendelschwingungen von der Frequenz n (Periode $2\pi/n$) auf einer geraden Linie ausführt, so ist der Widerstand

$$6\pi\mu a V + M\left\{\frac{9n}{4as} V + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4as}\right)\frac{dV}{dt}\right\}, \tag{22}$$

worin M die Masse der verdrängten Flüssigkeit ($\frac{4}{3}\pi a^3\sigma$) bedeutet und $\sqrt{\frac{n\sigma}{2\mu}} = s$ gesetzt wurde. Der Widerstand bei der gleichförmigen Translation ergibt sich als Grenzfall von (22) für unendlich langsame Schwingungen ($n = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$). Andererseits wird für $\mu = 0$, $s = \infty$ und der Widerstand reduziert sich auf eine Kraft $\frac{1}{2} M \frac{dV}{dt}$, die proportional der Beschleunigung ist; es ist das das bekannte Resultat aus der Hydrodynamik der idealen (reibungslosen) Flüssigkeit, wo die „scheinbare Masse" gleich der Hälfte der von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse ist.

Die Kenntnis der Lösung für die oszillierende Bewegung eines festen Körpers in einer zähen Flüssigkeit setzt uns in den Stand, auch das Problem einer beliebigen („langsamen") Bewegung dieses Körpers in Angriff zu nehmen. Infolge der Linearität der Differentialgleichungen der Bewegung kann man hier eine ähnliche Anwendung des Fourierschen Integrals machen, wie sie bei der Lösung spezieller Probleme der Potentialtheorie seit langem üblich ist. In bezug auf nähere Einzelheiten verweisen wir auf eine Abhandlung von

1) G. G. Stokes, a. a. O.

Lord Rayleigh[1]), wo auch Literaturangaben über die früheren diesbezüglichen Arbeiten von Basset, Boussinesq u. a. zu finden sind.

Für den Widerstand, den eine Kugel bei geradliniger Bewegung in einer zähen Flüssigkeit erleidet, wenn ihre Geschwindigkeit $V(t)$ als Funktion der Zeit gegeben ist, findet man derart die folgende, höchst interessante Formel

$$(23) \qquad -F = M\left\{\tfrac{1}{2}\dot{V} + \frac{9\mu}{2\sigma a^2}V + \frac{9\sqrt{\mu}}{2a\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{V}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right\}.$$

Das erste Glied ist [wie in (22)] die scheinbare Masse, wie sie auch bei verschwindender innerer Reibung vorhanden wäre, das zweite Glied ist gleich dem Widerstande bei gleichförmiger Translation, wie er durch die gewöhnliche Stokessche Formel gegeben wird und der letzte Ausdruck bringt den Einfluß der Vorgeschichte der Kugel zur Geltung; der Widerstand im Momente t hängt zwar nur von dem gleichzeitigen Strömungszustande der Flüssigkeit ab, aber der Strömungszustand selbst wird durch die frühere Bewegung der Kugel mitbestimmt.

Viel schwieriger wird das Problem, wenn nicht die Geschwindigkeit, sondern die Kräfte vorgegeben sind; für den Fall einer Kugel, die unter dem Einflusse der Schwerkraft fällt, wurde dieses Problem von Picciati[2]) und von Boggio[3]) gelöst. Die Aufgabe besteht im wesentlichen in der Auflösung einer integro-differentiellen Gleichung für $V(t)$, die man dadurch erhält, daß man den Ausdruck (23) für den Widerstand F in die Bewegungsgleichung der Kugel

$$(24) \qquad M'\frac{dV}{dt} = (M' - M)g + F$$

einsetzt (M' = Masse der Kugel, M = Masse der verdrängten Flüssigkeit, wie früher). Boggio hat gezeigt, wie diese und ähnliche Gleichungen durch die Anwendung eines bekannten Theorems von Abel über die Inversion von Integralen gelöst werden können. Die Formeln für V und für den von der Kugel in einer gewissen Zeit zurückgelegten Weg, zu denen er in dem Falle, daß die Kugel und die Flüssigkeit ursprüng-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 697. 1911.
2) G. Picciati, Rend. Acc. Lincei 16. S. 45. 1907.
3) T. Boggio, Rend. Acc. Lincei 16. S. 613 u. 730. 1907.

lich in Ruhe waren, gelangt, sind verhältnismäßig einfach und eignen sich zur unmittelbaren numerischen Auswertung. Es ist auffallend, daß die analytische Form dieser Funktionen von dem Verhältnis σ'/σ der Dichtigkeiten der Kugel und der Flüssigkeit abhängt, und Basset hat sogar dieses Resultat als einen Einwand gegen die Anwendbarkeit der gewöhnlichen angenäherten Gleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit [Differentialgleichungen (2) der „langsamen" Bewegung] betrachtet. Diese Ansicht wird jedoch von Lord Rayleigh nicht geteilt: vergleiche seine eben erwähnte Arbeit, wo auch weitere höchst interessante Beispiele für die Anwendung der Methode von Boggio behandelt werden.[1])

In verschiedenen experimentellen Arbeiten kann es wünschenswert sein, zu erfahren, wie lange die Kugel dazu braucht, um vom Zustande der Ruhe eine mit einer gewissen Annäherung konstante Endgeschwindigkeit zu erreichen. Die Formeln von Boggio geben eine genaue Antwort auf diese Frage; eine ungefähre Orientierung kann aber auf einem viel einfacheren Wege erreicht werden. Wenn wir annehmen, daß der Widerstandskoeffizient auch bei beschleunigter Bewegung in jedem Moment durch das Stokessche Gesetz gegeben wird, so fällt in (23) das Glied mit dem Integral weg, die Bewegungsgleichung (24) wird zu einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(24') \qquad (M' + \tfrac{1}{2}M)\frac{dV}{dt} = 6\pi\mu a V + (M' - M)g$$

und als partikuläre Lösung, die der Bedingung unterworfen ist, daß sie für $t = 0$ verschwinden soll, erhalten wir

$$(25) \qquad V = \frac{(M' - M)g}{6\pi\mu a}\left(1 - e^{-\frac{6\pi\mu a}{M' + \frac{1}{2}M}t}\right).$$

Wenn wir hier für die Masse der Kugel M' und für die Masse der verdrängten Flüssigkeit M ihre Werte $\frac{4}{3}\pi a^3\sigma'$ bzw. $\frac{4}{3}\pi a^3\sigma$ einsetzen, erhalten wir

$$(26) \qquad V = \tfrac{1}{9}a^2 g\frac{\sigma' - \sigma}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{9\mu t}{2a^2(\sigma' + \frac{1}{2}\sigma)}}\right),$$

1) Es hätte sich vielleicht gelohnt, die verschiedenen Theorien der Brownschen Bewegung, bei welchen die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes sogar für die einzelnen Zickzackwege der unregelmäßigen Bahn vorausgesetzt wird, im Lichte der eben erwähnten theoretischen Untersuchungen durchzudiskutieren.

wo der erste Koeffizient gleich demjenigen der Formel (6') ist und der Ausdruck

$$\frac{2}{9}\,\frac{a^2}{\mu}\,(\sigma' + \tfrac{1}{2}\,\sigma) \tag{27}$$

die Rolle einer Art Relaxationszeit spielt. Von ihr hängt die Schnelligkeit, mit welcher die Kugel ihre Endgeschwindigkeit erreicht, in einfacher Weise ab. Sie wird ersichtlich desto größer, je größer die Dichte des Kugelmaterials oder der Flüssigkeit und je kleiner die innere Reibung der Flüssigkeit ist. Der Ausdruck $\frac{2}{9}(\sigma' + \frac{1}{2}\sigma)$ ist von der Größenordnung der Einheit und aus dem Faktor a^2/μ kann man leicht entnehmen, wie klein diese Relaxationszeit ist für alle allein in Betracht kommenden Fälle, die die Bedingung der „langsamen" Bewegung noch erfüllen.

Neuerdings sind zwei experimentelle Arbeiten erschienen, die in einem gewissen Zusammenhange mit dem Gegenstande dieses Paragraphen stehen. Shewhart[1]) und Abbott[2]) untersuchten mit Hilfe einer photographischen Methode die Fallbewegung von geladenen Wassertröpfchen und Lycopodiumteilchen, die gleichzeitig durch ein elektrisches Wechselfeld in transversale Schwingungen versetzt wurden. Shewhart beobachtete eine Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit mit zunehmender Amplitude der transversalen Schwingungen, Abbott zeigte nachträglich, daß dieser Befund auf einem experimentellen Trugschluß beruhte. Keiner der beiden Autoren berücksichtigte leider die eben erwähnte umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand, und die Schlußfolgerung von Abbott, daß „kein Grund aufgefunden wurde, warum die Stokessche Konstante $6\pi\mu a$ auch für diese Fälle von beschleunigter Bewegung nicht gelten sollte", ist jedenfalls mit größter Vorsicht aufzunehmen. Speziell die letzte Versuchsreihe von Abbott mit dem fallenden Gummiball von 9 cm Durchmesser zeigt, wie kritiklos er bei der Auswertung seiner experimentellen Resultate vorgegangen ist, indem er auf die Eindeutigkeit der von ihm gewählten Erklärungsweise gar keine Rücksicht nahm. Aus der Übereinstimmung der experimentellen Kurve der Fallstrecken als Funktion der Zeit mit der aus der Annahme

1) W. A. Shewhart, Phys. Rev. 9. S. 425. 1917.
2) R. B. Abbott, Phys. Rev. 12. S. 381. 1918.

der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit berechneten schließt er auf das Bestehen dieser Proportionalität. Da aber die in Rede stehende Kurve bei jedwedem Widerstandsgesetze von Null ausgehen und nach sehr kurzer Zeit zu einer Geraden (V = konst.) werden muß, so ist es einleuchtend, daß man aus dem kurzen gebogenen Anfangsstück der Kurve in Anbetracht der kleinen Genauigkeit der Messungen, die mit einer gewöhnlichen Stoppuhr ausgeführt wurden, gar keine bindende Schlüsse ziehen kann. Der letzte Schluß von Abbott, daß „für viel größere Geschwindigkeiten, als diejenigen, die innerhalb der Gültigkeitsgrenzen des Stokesschen Gesetzes liegen, die Widerstandskraft proportional mit der Geschwindigkeit ist", enthält einen inneren Widerspruch: Da das Stokessche Gesetz für sehr kleine Geschwindigkeiten sicher gültig ist, so behält es offenbar seine Gültigkeit solange, als die Widerstandskraft proportional der Geschwindigkeit ist. In den Experimenten von Abbott war die Fallgeschwindigkeit des Gummiballes (die durch die Neigung der Zeit-Fallstrecke-Kurve bestimmt ist) viele hundertmal größer als nach dem Stokesschen Gesetze!

Auch Fräulein Snethlage[1]) hat einige Experimente über schwingende Teilchen in einem elektrischen Wechselfelde angestellt, ohne dabei zu irgendwelchen positiven Schlüssen zu gelangen.

Auf die klassischen experimentellen Verifizierungen der Formel (22) für Pendelschwingungen gehen wir hier nicht näher ein.[2]) Es sei nur erwähnt, daß Love sie geradezu als den überzeugendsten Beweis für die Richtigkeit der allgemein angenommenen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit (bei kleinen Geschwindigkeiten) betrachtet, bei deren Ableitung ja manches (Linearität der Beziehung zwischen Spannung und Deformationsgeschwindigkeit, Reduktion von zwei Konstanten auf eine [vgl. § 2, Gleichung (5)]) einen etwas hypothetischen Charakter trägt.

§ 10. Berücksichtigung der Gleitung.

Die hydrodynamische Berechnung des Stokesschen Gesetzes kann leicht durch Berücksichtigung der Gleitung an

1) A. Snethlage, Proc. Ac. Amsterdam 19. S. 1006. 1917.
2) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O. § 12.

der Oberfläche der Kugel ergänzt werden und in diesem Falle bekommt man, wie Basset[1]) gezeigt hat,

$$W = 6\pi\mu a \frac{\beta a + 2\mu}{\beta a + 3\mu} = 6\pi\mu a \frac{a + 2\gamma}{a + 3\gamma} \quad (28)$$

Der Koeffizient der äußeren Reibung β und der Koeffizient der Gleitung γ wurden bereits im § 2, Gleichungen (4) und (5), definiert. Wir werden im zweiten Teile, wo die Teilchenbewegung in Gasen behandelt wird, auf die Formel (28) noch zu sprechen kommen. Bei tropfbaren Flüssigkeiten kommt bekanntlich die Gleitung der Flüssigkeit längs der festen Wände gar nicht in Betracht. In den bereits mehrfach erwähnten experimentellen Untersuchungen von Arnold war der Koeffizient der äußeren Reibung β jedenfalls größer als 5000, und wahrscheinlich größer als 50000. Arnold hat auch die Formel (28) zur Diskussion seiner Experimente an aufsteigenden Luftblasen hinzugezogen, doch, wie Smoluchowski[2]) bereits bemerkt hat, konnte es sich dabei unmöglich um eine eigentliche Gleitung handeln, sondern man muß diesen Vorgang als eine Bewegung einer flüssigen Kugel in einer anderen Flüssigkeit auffassen. Näheres darüber vgl. § 12.

§ 11. Widerstandsgesetze für nicht kugelförmige Teilchen.

Das Problem der gleichförmigen, „langsamen" Translation eines festen Ellipsoids in einem zähen Medium wurde von Oberbeck[3]) gelöst. Aus den allgemeinen Formeln von Oberbeck hat Gans[4]) Näherungsausdrücke für den Widerstandskoeffizienten in verschiedenen Spezialfällen abgeleitet, wie z. B. für kleine Abweichung von Kugelgestalt, für sehr abgeplattete Rotationsellipsoide (Näherung für Scheibchen), sehr gestreckte (Stäbchen) usw. Diese Formeln wurden von Zeleny und Mc Keehan[5]) dazu gebraucht, um aus den mikroskopisch gemessenen Abweichungen von der Kugelgestalt verschiedener natürlicher Sporen (Lycopodium, Lyco-

1) A. B. Basset, Phil. Trans. 179. S. 43. 1877.
2) M. Smoluchowski, Cambr. Intern. Math. Congress 1912.
3) A. Oberbeck, Journ. f. Math. 81. S. 62. 1876; vgl. H. Lamb, „Hydrodynamik" § 326.
4) R. Gans, Sitzb. Akad. München, S. 191, 1911.
5) J. Zeleny und L. W. Mc Keehan, a. a. O.

perdon und Polytrichum) auf die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz beim Fallen derselben in Luft zu schließen. Die derart geschätzten Abweichungen waren jedoch viel kleiner als die experimentell gefundenen Anomalien, die wahrscheinlich auf eine schwammartige Struktur dieser Teilchen zurückzuführen sind (vgl. auch die diesbezügliche Bemerkung von Abbott)[1]). In einer Arbeit von Przibram[2]) über die Brownsche Bewegung langgestreckter Teilchen findet man eine graphische Darstellung des Widerstandskoeffizienten eines gestreckten Ellipsoids, in Richtung der großen Achse und senkrecht dazu, als Funktion des Achsenverhältnisses, aufgetragen.

Für anders gestaltete Teilchen sind die theoretischen Werte der Widerstandskoeffizienten unbekannt, doch kann man nach Gans[3]) aus der Linearität der Differentialgleichungen der „langsamen" Bewegung für alle Teilchen die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, eine wichtige Folgerung ziehen: Solche Teilchen erleiden infolge der Druckkräfte der Flüssigkeit keine Drehimpulse, sie haben also nicht die Tendenz, beim langsamen Fallen in der Flüssigkeit sich irgendwie einzustellen. Bei der Bewegung eines Körpers mit drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen in der Richtung einer der Hauptachsen kommt offenbar kein Drehmoment zustande. Es folgt daraus, daß das auch bei der Translation in einer beliebigen Richtung der Fall sein wird, denn infolge der Linearität der zugrunde gelegten Bewegungsgleichungen gibt die Superposition zweier Lösungssysteme wieder ein mögliches Lösungssystem, und man kann den Strömungszustand bei der betrachteten Translation als Superposition dreier Strömungszustände auffassen, die durch Translation des Körpers in der Richtung der drei Hauptachsen entstehen.

Ausdrücklich soll hier nochmals die vorausgesetzte „Langsamkeit" der Bewegung betont werden, denn nur dadurch wird der Widerspruch, in welchem die Ganssche Regel mit alltäglichen Beobachtungen an fallenden Gegenständen zu stehen scheint, gehoben. Selbstverständlich handelt es sich auch bei der eben aufgestellten Regel erstens um Teilchen, deren

1) R. B. Abbott, a. a. O.
2) K. Przibram, Sitzb. Akad. Wien. 121. Abt. IIa. S. 2346. 1912.
3) R. Gans, a. a. O.

Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt, und zweitens um eine Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik; bei hinreichend kleinen Teilchen muß die Brownsche Rotationsbewegung berücksichtigt werden.

§ 12. Bewegung einer flüssigen Kugel.

Das Stokessche Gesetz läßt sich auch leicht auf den Fall der Bewegung einer flüssigen Kugel (Koeffizient der inneren Reibung μ') ausdehnen, indem sowohl die Bewegung der äußeren, wie die der inneren Flüssigkeit durch die Differentialgleichung (2) der „langsamen" Bewegung beherrscht werden; der Zusammenhang der beiden Strömungszustände ergibt sich aus der Bedingung, daß die drei Geschwindigkeitskomponenten und die drei Komponenten der Zugkraft sich beim Überschreiten der Kugeloberfläche stetig aneinanderschließen müssen. Die Rechnung zeigt, daß die Kugel ihre Gestalt während der Bewegung beibehält; offenbar wird das nur solange der Fall sein, als die Trägheitskräfte, die eine Abplattung der Kugel bewirken, vernachlässigt werden können, d. h. solange die Bewegung „langsam" und die Bewegungsgleichungen linear in den Geschwindigkeitskomponenten bleiben. Da die Lage des Angriffspunktes der äußeren Kräfte nicht gleichgültig ist, so nimmt man zweckmäßig von vornherein die infolge der Dichtedifferenz der beiden Flüssigkeiten wirkende Schwere als Bewegungsursache an.

Unabhängig voneinander finden Rybczynski[1]) und Hadamard[2]) die folgende Formel für den Widerstandskoeffizienten der flüssigen Kugel

$$W = 6\pi\mu a \frac{3\mu' + 2\mu}{3\mu' + 3\mu} \quad (29)$$

Danach ist die Fallgeschwindigkeit im Verhältnis

$$k = \frac{3\mu' + 3\mu}{3\mu' + 2\mu} \quad (29')$$

größer als diejenige einer eben solchen festen Kugel; k ist also zwischen den Grenzen 1 und $^3/_2$ (für $\mu' \ll \mu$) veränderlich. Die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit, oder die Ver-

1) W. Rybczynski, Anz. Ak. Krakau, S. 40, 1911.

2) J. Hadamard, Compt. rend. 152. S. 1735. 1911; 154. S. 109. 1912.

kleinerung des Widerstandskoeffizienten hängt nur von dem Verhältnis der Koeffizienten der inneren Reibung der beiden Flüssigkeiten und keineswegs vom Radius der Kugel ab.

Die Experimente an fallenden Quecksilberkugeln in Ricinusöl von Roux[1]) und an Quecksilberkugeln in wasserhaltigem Glyzerin und Nitrobenzolkugeln in Wasser von Nordlund[2]) haben jedoch die Rybczynski-Hadamardsche Formel keineswegs bestätigt. Vielmehr ergaben sich Fallgeschwindigkeiten, die nur ganz wenig diejenigen gleichgroßer, fester Kugeln überstiegen; auch zeigte sich in den Experimenten von Roux ein gewisser Gang dieser Vergrößerung mit dem Radius der Kugeln, worauf wir noch gleich zu sprechen kommen. In den besonders sorgfältig ausgeführten Messungen von Nordlund an Quecksilberkügelchen von etwa 20 μ Durchmesser wurde die Fallgeschwindigkeit im Bereiche der experimentellen Fehler gleich derjenigen gefunden, die sich aus dem gewöhnlichen Stokesschen Gesetze ergibt, während sie nach Formel (29) um etwa 46 Proz. größer sein sollte. Übrigens gibt Nordlund an, daß „die Fallgeschwindigkeit von 0,076 Proz. größer als nach Stokes-Ladenburg[3]) ist", was wohl als eine grobe Überschätzung der Genauigkeit seiner Messungen bezeichnet werden darf. Es bedeute $\bar{\mu}$ den „scheinbaren" Koeffizienten der inneren Reibung der „Fallflüssigkeit" (Glyzerin mit etwa 11 Proz. Wasser), wie er mit Hilfe des gemessenen Wertes der Fallgeschwindigkeit aus dem Stokesschen Gesetze [mit der Ladenburgschen Korrektion (30) für den Einfluß der zylindrischen Gefäßwand] berechnet wird und μ, wie gewöhnlich, den Koeffizienten der inneren Reibung der Fallflüssigkeit, dann stellen die bei Nordlund tabellierten Werte von $100\,\frac{\bar{\mu}-\mu}{\mu}$ die relativen, prozentuellen Vergrößerungen des Widerstandskoeffizienten in bezug auf das gewöhnliche Stokessche Gesetz für die einzelnen Messungen dar. Nach der Formel (29) mit Einsetzung der entsprechenden Reibungskoeffizienten des Quecksilbers und des Glyzerins sollten diese Werte etwa gleich -46 sein, während sie bei Nordlund unregelmäßig etwa zwischen

1) J. Roux, Ann. de Chim. et Phys. **29**. S. 69. 1913.

2) J. Nordlund, Ark. för Mat. Astr. och Fysik **9**. Nr. 13. 1913.

3) Das Fallgesetz, nach welchem feste Kugeln in den gebrauchten zylindrischen Gefäßen sich bewegen würden.

± 10 schwanken. Ihr arithmetisches Mittel beträgt — 0,0076 (zufällig haben sich also die positiven und negativen Werte fast aufgehoben, die Auslassung einer einzigen Messung wäre aber genügend, um diesen Mittelwert auf das 10fache zu steigern), während der (quadratische) Mittelwert der Abweichungen vom arithmetischen Mittel etwa 8,4 beträgt. Daraus kann man die Genauigkeit des Resultates der 105 Messungen auf etwa 0,8 Proz. schätzen und als Schlußresultat die Tatsache ansehen, daß bei den Nordlundschen Messungen die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit in bezug auf die Fallgeschwindigkeit eben so großer fester Kugeln 0,8 Proz. jedenfalls nicht viel überschreiten kann. Da die Rybczynski-Hadamardsche Formel (29) 46 Proz. erfordert, so ist dadurch ihre Unhaltbarkeit zur Genüge bewiesen.

Beide Autoren haben nun die Vermutung ausgesprochen, daß es sich hier um eine gewisse Wirkung der bei der Ableitung der Formel (29) nicht berücksichtigten Oberflächenspannung handeln müßte, was durch die theoretischen Untersuchungen von Boussinesq[1]) auch bestätigt erscheint. Selbstverständlich kommt man hier mir dem gewöhnlichen Ansatz für die Oberflächenspannung nicht aus, denn die Oberflächenspannung, wie man sie gewöhnlich betrachtet, könnte höchstens die Erhaltung der kugelförmigen Gestalt des Teilchens begünstigen, was in der Rybczynski-Hadamardschen Theorie sowieso durch die „Langsamkeit" der Bewegung gewährleistet wird. Um zu einer brauchbaren Erklärung der eigenartigen Wirkung der Kapillarkräfte zu gelangen, welche darin besteht, daß eine kleine Flüssigkeitskugel sich beim Fallen fast wie ein fester Körper verhält, muß man die Oberflächenschicht in einem Bewegungszustande und nicht, wie das gewöhnlich geschieht, in einem Gleichgewichtszustande betrachten und eine Art innerer Reibung in dieser Schicht einführen. Das Bestehen einer solchen Oberflächenviskosität ist ja bereits von vornherein als sehr wahrscheinlich zu bezeichnen; Boussinesq, der unseres Wissens zum ersten Male ihre Wirkung auf die Bewegung der Flüssigkeit untersuchte, kommt mit Hilfe sehr plausibler molekularkinetischer Vorstellungen und gewisser Symmetriebetrachtungen zu den folgenden Aus-

1) J. Boussinesq, Ann. d. Chimie et Phys. 29. S. 349, 357, 364. 1913; vgl. auch Beibl. d. Phys. 37. S. 1357. 1913.

drücken für die beiden „Haupt"-Oberflächenspannungen (pro Längeneinheit)

$$\text{(30)} \qquad \begin{cases} F = f + e_1(\partial + \partial') + 2e\partial, \\ F' = f + e_1(\partial + \partial') + 2e\partial', \end{cases}$$

wo ∂ und ∂' die beiden „Haupt"-Dilatationsgeschwindigkeiten der Oberflächenschicht (in zwei zueinander senkrechten „Haupt"-Richtungen) bedeuten; e und e_1 sind zwei Koeffizienten der Oberflächenviskosität, und f, die Oberflächenspannung im Gleichgewicht, ist die gewöhnliche Kapillaritätskonstante.

In (30) sehen wir das zweidimensionale Analogon der Ansätze für die elastischen Spannungen, die gewöhnlich zum Plausibelmachen der Ansätze für die Spannungen in einer viskosen Flüssigkeit gebraucht werden. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man in der Theorie der inneren Reibung von Flüssigkeiten die beiden Konstanten mittels einer besonderen Annahme [§ 2, Gleichung (5)] auf nur eine reduziert, während hier diese Reduktion nicht durchgeführt wurde. Übrigens ist das für das Weitere sowieso ohne Belang, da in der endgültigen Formel für den Widerstandskoeffizienten die beiden Konstanten e und e_1 nur in einer Kombination

$$\text{(31)} \qquad \varepsilon = e + e_1$$

auftreten.

Das am Anfange dieses Paragraphen formulierte hydrodynamische Problem ist nun in ersichtlicher Weise zu modifizieren; anstatt die Differenz der Zugkräfte in den beiden Flüssigkeiten an der Oberfläche der Kugel gleich Null anzunehmen, muß man sie gleich den durch (30) gegebenen Spannungen in der Oberflächenschicht setzen. Der weitere Gang der Rechnung wird von Boussinesq nach einer von ihm bereits im Jahre 1885 angegebenen, allgemeinen Methode zur Lösung des Stokesschen Problems durchgeführt, und schließlich gelangt er zur folgenden Formel für k, die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit der flüssigen Kugel im Verhältnis zu der Geschwindigkeit einer ebenso großen festen Kugel

$$\text{(32)} \qquad k = \frac{\varepsilon + a(3\mu' + 3\mu)}{\varepsilon + a(3\mu' + 2\mu)}.$$

Hierin bedeuten μ' den Reibungskoeffizienten der inneren, μ denjenigen der äußeren Flüssigkeit und ε ist die eben erwähnte Konstante der Oberflächenviskosität.

Wir bemerken gleich, daß diese Formel mindestens qualitativ von den oben besprochenen experimentellen Ergebnissen Rechenschaft zu geben gestattet. Die Werte für den Widerstandskoeffizienten, die sie liefert, liegen stets zwischen den Werten für feste Kugeln ($k = 1$) und denjenigen, die sich aus der Rybczynski-Hadamardschen Formel ergeben [k nach Formel (29′)]; mit kleiner werdendem Radius nähert sich die Fallgeschwindigkeit immer mehr der Geschwindigkeit fester Kugeln. Deshalb konnte auch Nordlund bei seinen Versuchen an Quecksilberkugeln keine merklichen Abweichungen vom gewöhnlichen Stokesschen Gesetz finden, während Roux, der mit viel größeren Hg-Kugeln arbeitete (600—900 μ, allerdings in einer anderen Flüssigkeit — Olivenöl bei Roux — Glyzerin bei Nordlund) 6—12 prozentige Abweichungen beobachtete. Auch der allgemeine Gang dieser Abweichungen — sie wuchsen mit dem Radius der Teilchen — stimmt mit der Boussinesqschen Theorie überein.[1]) Nichtsdestoweniger muß die Frage nach der experimentellen Verifizierung der von Boussinesq für die Oberflächenviskosität gemachten Ansätze solange als offen betrachtet werden, als keine ausgedehnteren Untersuchungen (für größere, einheitliche Bereiche von a) vorliegen. Denn daß das ursprüngliche Stokessche (feste Kugeln) und das Rybczynski-Hadamardsche Problem (flüssige Kugeln ohne Oberflächenviskosität) zwei Grenzfälle darstellen, zwischen welche sich die tatsächlich beobachteten Fallgeschwindigkeiten flüssiger Kugeln einordnen würden, das war von vornherein, ohne spezielle Theorie, einleuchtend; auch die Vergrößerung der Abweichungen vom Stokesschen Gesetze mit wachsenden Durchmessern der Teilchen konnte wohl ohne weiteres vorhergesehen werden. Es ist nur die Frage zu beantworten, ob der tatsächlich beobachtbare Gang der Veränderlichkeit des Widerstandskoeffizienten mit dem Teilchenradius dem von Boussinesq abgeleiteten wirklich entspricht, und dazu reichen die Experimente von Roux und Nordlund keineswegs aus. Es wäre vielmehr

1) Der numerische Wert von ε läßt sich daraus ganz roh zu 1,4 g/sek schätzen.

erforderlich, in derselben Fallflüssigkeit und mit denselben flüssigen Teilchen, nur mit veränderlichen Radien, die allmählige Veränderung des Widerstandskoeffizienten von solchen Werten an, die dem Stokesschen Gesetz für feste Kugeln entsprechen, bis zu solchen, wo die Oberflächenviskosität zu vernachlässigen ist und die also der Rybczynski-Hadamardschen Formel gehorchen, zu verfolgen.

Teilweise kann eine solche Kenntnis den bereits oft erwähnten Messungen von Arnold an aufsteigenden Luftbläschen in verschiedenen Ölen, sowie den analogen, früheren Messungen von Allen[1]) an Luftbläschen in Anilin entnommen werden. Wie wir im § 10 bereits erwähnt haben, hat Smoluchowski darauf hingewiesen, daß hier ein Beispiel für die Anwendung der Rybczynski-Hadamardschen Theorie vorliegt, aber erst durch Mitberücksichtigung der Oberflächenviskosität findet ein großer Teil der Arnoldschen Resultate seine sachgemäße Erklärung. So liegt die Mehrzahl der Steighöhen der Bläschen zwischen den Voraussagen des Stokesschen und des Rynczynski-Hadamardschen Gesetzes. Die Fig. 8 von Arnold, die den „scheinbaren" Reibungskoeffizienten des Olivenöls (der unserem k umgekehrt proportional ist) in Funktion des Radius der Luftblasen darstellt, zeigt alle die von der Boussinesqschen Formel (32) geforderten Phasen der Abhängigkeit des Widerstandskoeffizienten vom Radius: Sehr kleine Kugeln ($a < 0{,}01$ cm) befolgen das gewöhnliche Stokessche Gesetz; der „scheinbare" [nach der Formel (20′) aus der gemessenen Steiggeschwindigkeit berechnete] Koeffizient der inneren Reibung ist gleich dem wirklichen, mit einem Viskosimeter meßbaren Koeffizienten. Mit wachsenden Radien folgt ein schnelles Abnehmen der scheinbaren Viskosität, die Steiggeschwindigkeit nimmt schneller zu, wie bei festen Kugeln, und bei $a = 0{,}04$—$0{,}05$ cm erreicht die Steiggeschwindigkeit den von der Rybczynski-Hadamardschen Formel geforderten Wert, d. h. (da μ' gegen μ zu vernachlässigen ist) $^2/_3$ der Geschwindigkeit gleichgroßer fester Kugeln. Das weitere Ansteigen der Arnoldschen Kurve erklärt sich durch das bereits erwähnte (vgl. § 8) Versagen der Ladenburgschen Korrektion.

1) H. S. Allen, a. a. O.

So weit stimmt alles schön mit der Theorie überein; doch kann man sich bei näherer Betrachtung leicht davon überzeugen, daß die Arnoldsche Kurve unmöglich mit der Boussinesqschen zur Deckung gebracht werden kann: Während die erste für verschwindende Radien der a-Achse parallel wird, ist das für die theoretische Kurve keineswegs der Fall. Noch schlimmer steht es um die Übereinstimmung in den Experimenten von Arnold in Leinöl. Die Frage, ob man die Schuld der Theorie oder den Experimenten zuschreiben soll, muß bis auf weiteres offen gelassen werden. In den Experimenten von Arnold trat eine interessante Nebenerscheinung auf, die die Messungen sehr erschwerte; es war das nämlich die „Erosion" der Oberfläche der Teilchen, ein stetiges Abnehmen des Teilchenradius mit der vom Teilchen zurückgelegten Strecke.[1]) Bei größeren Tropfen von Alkohol in Olivenöl konnte man das Loslösen der Außenschicht, die sich dann zu einer großen Zahl von kleinen Tröpfchen zusammenzieht, direkt beobachten. Arnold hat gezeigt, daß man aus der Annahme, daß während der Bewegung der Kugel eine Schicht von der Dicke der Wirkungssphäre der molekularen Attraktion von der Kugel abgeschält wird und in der Fallflüssigkeit zurückbleibt, zu einer sehr plausiblen Größe dieser Wirkungssphäre gelangt. Obwohl es sich hier um eine grobe Schätzung handelt, so ist jedenfalls dadurch die Tatsache nahegelegt, daß wir es mit einer gewissen Wirkung der Kapillarkräfte zu tun haben, und es ist sehr wohl möglich, daß diese Erscheinung von der Bewegung der Kugel durch die Flüssigkeit, wie sie die Theorie von Boussinesq behandelt, nie streng geschieden werden kann.[2]) Auch wird wohl, wie bei allen Oberflächeneffekten,

1) Einige analoge Erscheinungen, wo die Kapillarkräfte vielleicht eine ausschlaggebende Rolle spielen und von denen man sich noch schwerer eine geeignete Vorstellung bilden kann, fand Targonski (Arch. d. Geneve 41. S. 187. 1916) an Quecksilbertröpfchen in Luft; die Teilchen waren so klein, daß sie eine merkliche Brownsche Bewegung zeigten; das erschwert ungemein das Verständnis des beobachteten Einflusses der sichtbaren Bewegung auf die Größenabnahme der Teilchen.

2) Die Erosion muß um so kleiner sein, je größer der Molekulardruck, die Zerreißfestigkeit ist. Vielleicht ließen sich die Experimente über die Erosion zu einer Methode der Messung des Molekulardruckes ausbilden.

die Reinheit der benutzten Materialien bei jeder experimentellen Verifikation der Boussinesqschen Formel eine große Rolle spielen; so beobachtete Allen bei seinen Luftbläschen in Anilin unregelmäßige Schwankungen der Steiggeschwindigkeit von Teilchen zu Teilchen, die höchstwahrscheinlich mit der zufälligen Beschaffenheit der Oberfläche (des Koeffizienten ε der Oberflächenviskosität) im Zusammenhange standen.

Jedenfalls scheinen die theoretische und die experimentelle Evidenz dafür zu sprechen, daß sich genügend kleine, flüssige Teilchen, wie klein auch ihre Oberflächenviskosität sein mag, in bezug auf ihre Beweglichkeit von ebensolchen, festen Teilchen nicht unterscheiden lassen. Diese Tatsache ist für die theoretische Kolloidchemie von außerordentlicher Wichtigkeit. Auch wird dadurch ein Einwand behoben, den Smoluchowski[1]) gegen die Anwendung der verschiedenen Theorien der Kataphorese auf Emulsoide erhebt, Theorien, die alle nur für feste (nichtleitende) Teilchen aufgestellt wurden; für Teilchen, die in der Kolloidchemie in Betracht kommen, werden schon die Kapillarkräfte dafür sorgen, daß man diese Teilchen als fest ansehen darf. Die Theorie der Kataphorese braucht also nur noch auf leitende Teilchen ausgedehnt zu werden.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

1) M. v. Smoluchowski, „Elektrische Endosmose und Strömungsströme", § 32 in Graetz' „Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus", Bd. II, *Lf.* 2.

(Eingegangen 14. August 1919.)

2. *Die Einführung eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Gravitationsfeld einer schweren Kugel;* *von Gustav Mie.*

1. Die Einsteinsche Gravitationstheorie bringt die eigentümliche Schwierigkeit mit sich, daß die gewöhnlichen praktischen Definitionen der geraden Linie und der Längengleichheit unbrauchbar werden. Die praktische Durchführbarkeit der ganzen Geometrie beruht auf der Existenz unveränderlicher Körper, die man an den verschiedensten Orten und zu den verschiedensten Zeiten als Maßstäbe benutzen kann, um die zu messenden Abstände irgendwelcher Raumpunkte mit ihrer Länge zu vergleichen. Ebenso braucht man zur Vergleichung von Zeitintervallen unveränderliche physikalische Vorgänge (Schwingungen). Daß man solche unveränderlichen Maßstäbe für Längen und Zeiten praktisch einwandfrei herstellen kann, beruht letzten Grundes auf der Unveränderlichkeit der Atome und der Unabhängigkeit ihrer Beschaffenheit von Ort und Zeit.

Die Existenz absolut unveränderlicher Atome galt als eine Selbstverständlichkeit, solange man glaubte, zwischen den „von Materie erfüllten" Teilchen und dem sie umgebenden „absolut leeren Raum" scharf unterscheiden zu können. Nun wissen wir aber, daß diese Auffassung nicht richtig ist, daß vielmehr der sogenannte leere Raum als Weltäther selber der Schauplatz mannigfacher physikalischer Vorgänge ist und daß er überall auch in die Vorgänge, die man speziell als materielle Vorgänge bezeichnet, ganz wesentlich mit eingreift. Sobald man aus diesen Erkenntnissen die notwendige Konsequenz zieht und die scharfe Abgrenzung zwischen „Materie" und „leerem Raum" fallen läßt, gelangt man dazu, in einer nunmehr zu erstrebenden „Theorie der Materie" die materiellen Teilchen nur als Stellen im Äther aufzufassen, an welchen eine Zusammen-

ziehung ganz enormer Energiemengen auf einen winzigen Raumteil stattfindet. Sie können dann keine absolut unveränderlichen Atome sein. Man muß vielmehr mit Bestimmtheit erwarten, daß diese Energiekroten im Äther sich verändern, wenn sie von Gegenden, wo der Äther an und für sich feldfrei ist, in Gebiete überführt werden, wo von vornherein starke elektromagnetische oder Gravitationsfelder vorhanden sind. Es ist eines der wichtigsten Probleme der „Theorie der Materie", eine Erklärung dafür zu finden, daß sich trotzdem in Wirklichkeit die materiellen Teilchen fast wie feste harte Partikelchen verhalten, die von dem Vorhandensein irgendwelcher Felder so wenig beeinflußt werden, daß man ihre Veränderungen mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden experimentellen Hilfsmitteln noch nicht beobachtet hat.[1]) Für die Gravitationsfelder ist dieses Problem durch die Einsteinsche Gravitationstheorie vollständig gelöst. Nach dieser Theorie sind die Veränderungen der materiellen Teilchen in einem Gravitationsfeld ganz allein durch das Gravitationspotential bedingt. Die Feldstärke des Gravitationsfeldes kommt lediglich als Gefälle des Gravitationspotentials in dem Teilchen zur Geltung, so daß in einem Gravitationsfeld nach Maßgabe dieses Gefälles die Veränderung des Teilchens mehr oder weniger inhomogen ist. Die Veränderungen selber bestehen nach der Einsteinschen Theorie nur in einer Veränderung sämtlicher Maßeinheiten, man kann sagen: sie bestehen in einer Deformation des von dem Teilchen und den in ihm sich abspielenden Vorgängen erfüllten kleinen Raum-Zeitgebietes. Das Gravitationspotential selber ist ein vierdimensionaler Tensor, seine Komponenten seien im folgenden mit $\omega^{\mu\nu}$ bezeichnet. Ich will die aus diesen $\omega^{\mu\nu}$ gebildete Determinante mit ω bezeichnen, ferner seien die Größen $\omega_{\mu\nu}$ durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_i \omega_{\mu i} \cdot \omega^{i\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}, \\ \text{wo} \\ \delta^{\mu}_{\mu} = 1 \text{ und } \delta^{\nu}_{\mu} = 0, \ \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Endlich führe ich noch ein:

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 551. 574. 596. 1917.

$$(2)\quad \begin{cases} g_{\mu\nu} = \sqrt{\omega}\cdot\omega_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} = \dfrac{\omega^{\mu\nu}}{\sqrt{\omega}}, \end{cases}$$

so daß also auch

$$\sum g_{\mu i}\cdot g^{i\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}.^{1})$$

Ein Raum-Zeitelement, das im gravitationsfreien Gebiet die Form einer vierdimensionalen Kugel vom Radius 1 hat, bekommt durch den Einfluß des Gravitationspotentials $\omega^{\mu\nu}$ die Form eines Ellipsoides, dessen Gleichung lautet:

$$(3)\quad \begin{cases} g_{11}\cdot\xi_1^2 + g_{22}\cdot\xi_2^2 + g_{33}\cdot\xi_3^2 + g_{44}\cdot\xi_4^2 + 2g_{23}\cdot\xi_2\xi_3 \\ \quad + 2g_{31}\cdot\xi_3\xi_1 + 2g_{12}\cdot\xi_1\xi_2 + 2g_{14}\cdot\xi_1\xi_4 \\ \quad + 2g_{24}\cdot\xi_2\xi_4 + 2g_{34}\cdot\xi_3\xi_4 = \pm 1. \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist, je nachdem es sich um raumartige oder um zeitartige Radienvektoren handelt, als + oder als − zu wählen. Im gravitationsfreien Gebiet nimmt das Gravitationspotential den skalaren Wert 1 an, $\omega^{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$, entsprechend ist dann auch $g_{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$.

Sollen in einem Gravitationsfeld Längen und Zeiten bestimmt werden, so muß man an den mit den deformierten Atomen direkt gemessenen Werten nach Maßgabe des Gravitationspotentials an der betreffenden Stelle erst noch Korrekturen anbringen. Man muß also zur Bestimmung der richtigen Werte von Längen und Zeiten das Gravitationspotential schon haben. Dazu aber muß man ein Koordinatensystem besitzen, denn das Potential kann nur als Funktion der Raum-Zeitkoordinaten gegeben sein. Da man nun dieses Koordinatensystem nicht durch praktisch-geometrische Messungen, die sich auf die Annahme unveränderlicher Atome stützen, bekommen kann, so muß man sich fürs erste mit einer willkürlichen Numerierung der Raum-Zeitpunkte begnügen. Um ein für die physikalischen Anwendungen brauchbares Koordinatennetz zu ge-

1) Da ich im folgenden öfters das Buch von H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, zitiere, sei hier gleich bemerkt, daß meine $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ das *umgekehrte* Vorzeichen haben, wie die entsprechend bezeichneten Größen bei Weyl. Ferner ist in diesem Buch, wie auch in den Einsteinschen Veröffentlichungen die Determinante der $g_{\mu\nu}$ mit g bezeichnet, es ist leicht zu sehen, daß $\omega = g$.

winnen, geht man am besten von der fundamentalen Tatsache aus, daß das Tensorpotential $\omega^{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes auch in den stärksten Feldern, die in der Wirklichkeit vorkommen, nur um ganz winzig kleine Beträge von dem skalaren Wert 1 abweicht. Es sind also auch die vier Werte g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} von der 1, und die $g_{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, von der 0 praktisch kaum zu unterscheiden. Wir legen nun durch einen geeignet gewählten Koordinatenanfang vier aufeinander senkrechte Koordinatenachsen, indem wir die Methoden der praktischen Geometrie, die auf der Annahme der Unveränderlichkeit der Atome beruhen, zur Konstruktion der Geraden und der senkrechten Winkel benutzen. Die so konstruierten Geraden und Winkel werden wir mit Einstein als die natürlichen Geraden und Winkel bezeichnen. Die Konstruktionsmethoden sind für *räumliche* Geraden jedem, der einmal geometrisch gezeichnet hat, so geläufig, daß ich sie hier wohl nicht zu erörtern brauche. Eine *zeitliche* natürliche Gerade wird von dem Schwerpunkt eines materiellen Körpers beschrieben, wenn auf ihn keine Kräfte wirken. Ruht der Punkt in dem Koordinatenanfang, so beschreibt er eine zeitliche Gerade, die auf den drei zur Zeit $t = 0$ konstruierten räumlichen Koordinatenachsen senkrecht steht. Wir denken uns nun weiter die Koordinatenachsen in lauter „natürlich" gleiche Teile geteilt, beispielsweise die drei räumlichen Achsen in Zentimeter, die zeitliche Achse in die entsprechende Zeiteinheit: $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ Sek. Wir können uns diese Teilung immer so fein denken, daß in dem kleinen vierdimensionalen Einheitswürfel am Koordinatenanfang die Geometrie auch mit den feinsten jeweils praktisch zur Verfügung stehenden Mitteln von der Euklidischen bzw. Minkowskischen Geometrie nicht zu unterscheiden ist. Schreitet die Verfeinerung der Meßmethoden fort, so macht man die Teilung entsprechend feiner, so daß unsere Bedingung für den Würfel im Koordinatenanfang immer erfüllt bleibt. Wir wollen nun zunächst die beiden Koordinatenachsen 1 und 2 betrachten. In der Nähe des Koordinatenanfanges bestimmen sie eine Ebene, in welcher die eine quadratische Seitenfläche des Würfels liegt. Wir verlängern die beiden anderen Seiten dieses Quadrates zu beliebig langen, natürlichen Geraden 1′ und 2′ und bringen auf diesen beiden zu den Achsen 1 und 2 „parallel" laufenden Geraden eine ganz gleiche Teilung an, wie auf den Achsen

selber. Legen wir durch je zwei entsprechende Punkte von 1 und 1′ und ebenso von 2 und 2′ immer je eine natürliche Gerade, so bekommen wir eine Art ebenes Koordinatennetz.[1]) Jedoch wird sich in etwas größeren Entfernungen vom Koordinatenanfang der Einfluß der Deformationen durch das Gravitationsfeld in der Weise bemerkbar machen, daß sich die Netzfäden in den Netzknoten nicht richtig schneiden, sondern nur dicht aneinander vorbeikreuzen. Da das Gravitationspotential nur sehr wenig von dem skalaren Wert 1 verschieden ist, so sind die Mängel des unter der Annahme unveränderlicher Atome konstruierten Netzes auch in weiten Gebieten des Raumes nur sehr klein. Man denke sich nun an jedem der etwas mangelhaften Netzknoten einen Punkt zwischen den beiden sich kreuzenden Geraden, an welchem beide sehr dicht vorbeigehen, und betrachte diesen mit einer gewissen Willkürlichkeit gewählten Punkt als den eigentlichen Netzknoten. Die so festgelegten Netzknoten definieren dann zusammen, wenn man das Netz unendlich dicht macht, die Koordinatenebene (1. 2.). Wir wollen die wirklich durch die Netzknoten hindurchlaufenden Linien als die „richtigen" korrigierten Koordinatengeraden auffassen im Gegensatz zu den unkorrigierten „natürlichen Geraden". In derselben Weise konstruieren wir mit ähnlichen Willkürlichkeiten Koordinatenebenen (1. 3.) und (2. 3.) mit Koordinatennetzen darin, ferner drei sehr benachbarte Ebenen (1′ 2′) sowie (1′ 3′) und (2′ 3′), welche in der Nähe des Koordinatenanfanges in die entsprechenden Seitenflächen des kleinen vierdimensionalen Einheitswürfels übergehen. Auch in diesen drei sehr benachbarten Ebenen denken wir uns Koordinatennetze ausgeführt. Legen wir schließlich durch je zwei entsprechende Punkte der Ebenen (1. 2.) und (1′ 2′), ebenso (1. 3.) und (1′ 3′), endlich auch (2. 3.) und (2′ 3′), je eine natürliche Gerade, so bekommen wie ein dreidimensionales Koordinatennetz, welches aber denselben Mangel

1) Ich beschränke mich in dieser Untersuchung der Einfachheit halber auf den Fall, daß der leere Raum an sich euklidisch ist. Bekanntlich hat Einstein seine Theorie in der Abhandlung „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie"(Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin, Jahrgang 1917, S. 142) auf den Fall ausgedehnt, daß der dreidimensionale leere Raum sphärisch ist. Die Übertragung meiner Betrachtungen auf diesen Fall bietet keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten.

richtiger Netzknoten aufweist, wie das aus natürlichen Geraden vorhin konstruierte zweidimensionale Netz. Die natürlichen Geraden des dreidimensionalen Netzes schneiden sich wenigstens in größeren Entfernungen von den Achsen nicht mehr genau in Netzknoten, sondern sie kreuzen nur an den Knotenstellen dicht aneinander vorbei. Man wählt nun wieder mit einiger Willkür an jeder Knotenstelle einen Punkt, an welchem die drei Koordinatenlinien sehr dicht vorbeigehen, als den eigentlichen Netzknoten, legt durch das so bestimmte System von Netzknoten Linien, die man im Gegensatz zu den natürlichen Geraden als die richtigen korrigierten Geraden des Koordinatennetzes zu bezeichnen hat. Macht man die Maschen des Netzes unendlich klein, so bilden die gewählten Netzknotenpunkte die dreidimensionale Koordinatenebene (1. 2. 3.). Genau ebenso kann man die anderen dreidimensionalen Ebenen, nämlich (2. 3. 4.), ferner (3. 1. 4.) und (1. 2. 4.) mit ihrem ganzen Koordinatennetz konstruieren. Es ist leicht zu sehen, wie man von da aus weiter zu einem vierdimensionalen Koordinatennetz kommt, in welchem überall in einem ziemlich weiten Bereich um den Koordinatenanfang herum, die korrigierten geraden Koordinatenlinien nur wenig von natürlichen Geraden abweichen, in welchem also auch die natürlichen Geraden an den Netzknoten überall sehr nahe vorbeikreuzen.

Hat man auf diese Weise, nicht ohne einige Willkürlichkeit, ein Koordinatennetz konstruiert, so kann man weiter so verfahren, daß man die Deformationen der Atome und der Atomvorgänge bestimmt, indem man die gewählten Koordinatenlinien als die richtigen Geraden betrachtet. Die Abweichungen der natürlichen unkorrigierten Geraden von ihnen geben die Möglichkeit, überall den Deformationstensor, dessen Komponenten ich $g_{\mu\nu}$ nennen will, zu berechnen. Für die Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) einer natürlichen Geraden bestehen nämlich die vier Differentialgleichungen[1]):

$$\frac{d^2 x_i}{dp^2} + \sum_{h,k} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{dp} \cdot \frac{dx_k}{dp} = 0, \tag{4}$$

wo p ein den Punkten der Kurve zugeordneter Parameter ist, z. B. die Bogenlänge von einem bestimmten Kurvenpunkt an,

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 102.

wo ferner die $\left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\}$ die Christoffelschen Symbole[1]) bedeuten:

$$(5)\qquad \left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\sum_j g^{ij}\cdot\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j}\right).$$

Im folgenden werde ich mich in allen Formeln, die ich gelegentlich noch brauche, der von Einstein eingeführten einfacheren Schreibweise bedienen, in welcher die Summenzeichen einfach weggelassen werden. Es soll also ein für allemal festgesetzt sein, daß ein Ausdruck, in welchem ein Indexzeichen doppelt vorkommt, über diesen Index von 1 bis 4 zu summieren ist. Nach dieser Schreibweise sehen die Gleichungen (4) und (5) folgendermaßen aus:

$$(4')\qquad \frac{d^2x_i}{dp^2}+\left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\}\cdot\frac{dx_h}{dp}\cdot\frac{dx_k}{dp}=0.$$

$$(5')\qquad \left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}g^{ij}\cdot\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j}\right).$$

Um noch ein Beispiel zu bringen, sei angeführt:

$$\left\{\begin{matrix} \mu\,r \\ r \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mu\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} \mu\,2 \\ 2 \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} \mu\,3 \\ 3 \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} \mu\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\}.$$

In den Formeln (4) und (5) bedeuten, um es noch einmal deutlich hervorzuheben, die $g_{\mu\nu}$ die Komponenten des Tensors der Deformation der Atome und der Atomvorgänge in bezug auf das von uns konstruierte und als geradlinig-orthogonal angenommene Koordinatensystem, die $g^{\mu\nu}$ sind Funktionen der $g_{\mu\nu}$, die sich aus den Gleichungen

$$g_{i\mu}\cdot g^{i\nu}=\delta_\mu^\nu$$

berechnen lassen. Wir wollen nun sehen, wie man die Werte $g_{\mu\nu}$ finden kann. Da die natürlichen Geraden uns empirisch gegeben sind, so sind auch die Differentialquotienten dx_i/dp und d^2x_i/dp^2 durch Messungen zu ermitteln, und die Gleichungen (4) geben uns, wenn wir eine bestimmte natürliche Gerade herausgreifen, vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchten Tensorkomponenten $g_{\mu\nu}$ mit empirisch bestimmten Koeffizienten. Gehört die herausgegriffene Gerade zu einer Schar von Geraden, die Raum und Zeit lückenlos ausfüllen, etwa zu der Schar aller natürlichen Ge-

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 98.

raden, die auf einer dreidimensionalen Koordinatenebene senkrecht stehen, so bekommt man die Koeffizienten der Differentialgleichungen (4) als Funktionen der Koordinaten, die man aus den Ergebnissen der praktischen Messungen bestimmen kann. Wenn man in derselben Weise andere Scharen von natürlichen unkorrigierten Geraden benutzt, so bekommt man andere Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$, und man kann sich so immer eine genügende Zahl von Gleichungen verschaffen, um schließlich die $g_{\mu\nu}$ vollständig als Funktionen der (x_1, x_2, x_3, x_4) zu gewinnen. Wie man diese Berechnung des Deformationstensors $g_{\mu\nu}$ wirklich durchführen kann, werden wir weiter unten an einem einfachen Beispiel sehen.

Aus den so erhaltenen Werten $g_{\mu\nu}$ kann man nun aber ohne weiteres nach (1) und (2) das Gravitationspotential berechnen:

$$\omega^{ik} \cdot g_{il} = \sqrt{g} \cdot \delta^k_l .$$

Denn bei Annahme dieses Gravitationspotentials sind zunächst einmal die Deformationen der von dem Gravitationsfeld erfüllten Raum-Zeitgebiete gerade die, welche die Einsteinsche Gravitationstheorie verlangt. Außerdem aber erfüllen die $\omega^{\mu\nu}$ auch die Grundgleichungen des Gravitationsfeldes, immer vorausgesetzt natürlich, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie zutrifft, denn nach dieser Theorie müssen die Abweichungen der Geometrie der natürlichen Geraden von der Minkowskischen Geometrie folgendermaßen mit der Anwesenheit schwerer Körper verknüpft sein: Man berechne 40 Größen $\mathfrak{k}^a_{\mu\nu}$, die wir späterhin als die 40 Komponenten des Gravitationsfeldes bezeichnen werden, nach den Formeln:

$$\mathfrak{k}^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ a\end{matrix}\right\} - \frac{1}{4}\delta^a_\nu \cdot \left\{\begin{matrix}\mu r\\ r\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\delta^a_\mu \cdot \left\{\begin{matrix}\nu r\\ r\end{matrix}\right\}, \tag{6}$$

wo die Christoffelschen Symbole nach (5) zu berechnen sind, dann ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{k}^a_{\mu\nu}}{\partial x_a} = -h_{\mu\nu}, \tag{7}$$

wo $h_{\mu\nu}$ die $\mu\nu$-Komponente des Tensors „Dichtigkeit der schweren Masse" bedeutet. Diese Dichtigkeit der schweren Masse kann man aus der Weltfunktion H des gesamten Ätherzustandes an der betreffenden Stelle berechnen als:

$$h_{\mu\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \omega^{\mu\nu}} . \tag{8}$$

Das von uns ziemlich willkürlich, angenommene Koordinatensystem ist also für die Physik sofort brauchbar, insofern in ihm die Grundgleichungen der Physik die einfachste Form annehmen, die sie haben können. Denn auch die Gleichungen für das elektromagnetische Feld haben in ihm die bekannte einfache Form. Es ist eben die charakteristische Eigentümlichkeit der Einsteinschen Theorie, daß die Grundgleichungen für jedes ganz beliebig gewählte Koordinatensystem ihre Form unverändert behalten. Oder mit anderen Worten: Die Grundgleichungen der Physik sind, wenn man das Gravitationspotential in der eben beschriebenen Weise definiert, für jede beliebige Koordinatentransformation invariant.

2. Danach könnte es so scheinen, als ob jedes beliebige Koordinatensystem für Raum und Zeit völlig gleichberechtigt wäre. Wir haben aber schon im vorhergehenden eine wesentliche Beschränkung eingeführt, deren Notwendigkeit jeder ohne weiteres zugeben wird, indem wir verlangten, daß die korrigierten Geraden des anzunehmenden Koordinatensystems in einem weiten Gebiet um den Nullpunkt herum von den natürlichen Geraden nur äußerst wenig abweichen dürfen. Würde man diese Beschränkung nicht machen, so würde man zu solchen physikalischen Monstra geführt werden, wie ich in meinen Göttinger Vorträgen[1]) eines in dem sich ohne alle reelle Ursachen schlängelnden Stabe geschildert habe, oder es würden Wellen vorkommen können, die sich, ohne Energie zu übertragen, durch den Raum fortpflanzen[2]), dergleichen Unsinnigkeiten kann es noch mehr geben. Wir müssen das Koordinatensystem so wählen, daß auch die allerwinzigsten Spuren solcher physikalischer Sinnlosigkeiten ausgeschlossen werden.

Wie notwendig für die Physik die Wahl eines in dieser Beziehung einwandfreien Koordinatensystems ist, erkennt man besonders gut an einem einfachen Beispiel, an welchem ich zugleich das bisher Gesagte erläutern will, nämlich dem Gravitationsfeld einer im Raume ruhenden Kugel.

Als Koordinatenanfang wähle ich den Kugelmittelpunkt O. Dieser Punkt liefert, wenn man sich ihn im Ablauf der Zeit

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 599. 1917.

2) A. Einstein, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 696.

vorstellt, eine zeitartige Gerade, welche wir als Zeitachse wählen. Außerdem konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ nach den Methoden der praktischen Geometrie drei aufeinander senkrechte Gerade durch O, welche die x-, y- und z-Achse darstellen. Weiter konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ein vollständiges Koordinatennetz. Erfahrungsgemäß wird die räumliche Geometrie von dem Gravitationsfeld so wenig beeinflußt, daß man auch mit den allerfeinsten Mitteln von der Unvollkommenheit der Netzknoten des natürlich konstruierten Koordinatensystems nichts bemerken kann. Das korrigierte Koordinatennetz in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ist also praktisch völlig identisch mit dem unkorrigierten natürlichen Netz. Ich teile nun mit Hilfe einer Uhr die Zeitachse in lauter gleiche Abschnitte und lege durch jeden Teilpunkt einen Raum $t = \text{const.}$ mit einem Koordinatennetz, das genau so liegt, wie das im Raume $t = 0$. Ein Punkt $(x, y, z) = \text{const.}$ beschreibt dann eine zeitartige Linie, die überall von der Zeitachse gleichen Abstand hat, eine „Parallele" zur Zeitachse. Aber diese Parallele ist nicht identisch mit einer natürlichen Geraden. Beobachten wir einen freischwebenden schweren Massepunkt, der zur Zeit $t = 0$ im Punkte (x, y, z) ruht, so nähert er sich, wenn keine Kräfte (selbstverständlich außer der Schwerkraft) auf ihn wirken, wenn er also eine natürliche zeitartige Gerade beschreibt, nach dem Fallgesetz beschleunigt dem Kugelzentrum O. Wollen wir also das vierdimensionale Koordinatennetz nach den natürlichen Methoden konstruieren, so finden wir, daß in einiger Entfernung von der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ die unkorrigierten zweiartigen Koordinatenlinien an den ihnen entsprechenden Netzknoten des raumartigen Netzes in der dreidimensionalen Ebene $t = \text{const.}$ vorbeikreuzen. Die zeitartigen natürlichen Koordinatenlinien werden von solchen schweren Punkten beschrieben, die bis zur Zeit $t = 0$ aufwärts steigen, im Punkte $t = 0$ ihre größte Höhe erreichen, und von da an fallen. Die so definierten Zeitlinien stehen auf der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ senkrecht, weil zur Zeit $t = 0$ der Punkt die Geschwindigkeit Null hat, d. h. die von ihm beschriebene zeitartige Linie keine raumartigen Komponenten hat. Zu den $t = 0$ unendlichen benachbarten Zeiten gehen diese zeitartigen Linien durch die entsprechenden

Netzknoten genau hindurch, wenn man von unendlich kleinen Abweichungen zweiter Ordnung absieht.

Daß die zeitartigen Linien gegenüber den raumartigen Linien eine besondere Rolle spielen, liegt an der Konstitution der Welt, wenn man sie vierdimensional betrachtet. Die materiellen Körper bilden in der Raum-Zeit massive Zylinder, die sich in zeitartiger Richtung beiderseits ins Unendliche erstrecken, während ihre raumartigen Querschnitte (die von den Körpern erfüllten dreidimensionalen Raumgebiete) verhältnismäßig sehr eng begrenzt sind. Man muß dabei beachten, daß eine Zeitstrecke von nur 1 Sekunde Länge gleich zu setzen ist einer raumartigen Strecke von 300000 km. Danach ist es leicht zu verstehen, daß an zeitlichen Linien, die in unbegrenzter Ausdehnung nahe an dem schweren Körper verlaufen, die Abweichungen der natürlichen Geometrie von der Minkowskischen Geometrie viel eher zu beobachten sind, als an raumartigen Linien, die nur über eine kurze Strecke dem Gravitationszentrum nahe sind und im allgemeinen in fast gravitationsfreien Gebieten verlaufen.

Wollte man nun einfach nach der oben gegebenen Anweisung zur Konstruktion des vierdimensionalen Koordinatennetzes verfahren, so hätte man als Netzknoten irgendwelche Punkte zu wählen, die zwischen den Punkten, wo sich die raumartigen natürlichen Geraden ungefähr schneiden, und zwischen der daran vorbeikreuzenden zeitartigen natürlichen Geraden liegen. So willkürlich darf man nun aber in der Physik nicht verfahren. Man *muß* vielmehr als korrigierte zeitartige Geraden die vorhin als Parallelkurven zur Zeitachse definierten Linien wählen, die überall durch entsprechende Netzknoten der durch die Punkte der Zeitachse hindurchgelegten dreidimensionalen ebenen Koordinatennetze gehen. Das heißt mit anderen Worten, man *muß* die Punkte der schweren Kugel selbst und alle Punkte, die, natürlich gemessen, relativ zu ihr ruhen, als ruhend ansehen. Wollte man das Koordinatennetz anders konstruieren, so würden sich die Punkte der Kugel selber bewegen, ohne daß diese Bewegung eine andere Ursache hätte, als die Wahl des Koordinatennetzes. Diese Wahl des Koordinatennetzes verstieße gegen den obersten Grundsatz der Vernunft, keine anderen Veränderungen in der Welt und im Weltgeschehen anzunehmen, als solche, die durch den objektiven Tatbestand

unbedingt notwendig begründet sind. Diesen Grundsatz nennt Kant die Maxime der Vernunft. Sie ist es, die uns zwingt, den ohne reelle Ursache sich schlängelnden Stab und die Gravitationswellen ohne Energieübertragung zu verwerfen. Ebenso zwingt sie uns, ein Koordinatennetz, in welchem sich die Punkte unserer Kugel noch bewegen, als „unvernünftig" zu verwerfen.

8. Das Koordinatennetz im Felde einer ruhenden schweren Kugel ist danach schon so weit festgelegt, daß wir „praktisch" keine Wahl mehr haben. In der Tat sind denn auch praktisch im Felde der Erde Ort und Zeit überall ganz eindeutig zu definieren. Ich will nun zeigen, wie man das Gravitationspotential aus den Abweichungen der natürlichen von den vernünftig korrigierten Zeitgeraden berechnen kann. Eine vernünftig korrigierte Zeitgerade beschreibt ein Punkt $(x_0\, y_0\, z_0)$, der sich relativ zur Kugel immer an derselben Stelle befindet. Dieser Punkt $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ sei der Kulminationspunkt eines senkrecht aufwärts geworfenen Massenteilchens, welches sich zur Zeit t im Punkte $(x,\ y,\ z)$ befinde, zur Zeit $t = 0$ gerade $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ erreiche und dann wieder frei herunterfalle. Dieses Massenteilchen beschreibt eine natürliche Zeitgerade, welche die vernünftige Gerade in dem Punkt $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ 0)$ berührt. In einem unendlich benachbarten Punkt $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ idt)$ hat die natürliche Zeitgerade von der vernünftigen Geraden eine Abweichung, die unendlich klein von zweiter Ordnung ist, wir haben demnach an dieser Stelle in die Gleichung (4) einzusetzen:

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0, \quad dx_4 = i \cdot dt.$$

Wir bekommen so für das Gravitationspotential die Gleichungen:

$$d^2x = \left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\} \cdot dt^2, \quad d^2y = \left\{\begin{matrix}44\\2\end{matrix}\right\} \cdot dt^2, \quad d^2z = \left\{\begin{matrix}44\\3\end{matrix}\right\} \cdot dt^2,$$

$$d^2t = \left\{\begin{matrix}44\\4\end{matrix}\right\} \cdot dt^2.$$

Beachtet man nun, daß in außerordentlich guter Näherung $g^{ij} = \delta_i^j$, daß ferner alle Differentialquotienten nach $x_4 = it$ Null sind, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x}, \quad \left\{\begin{matrix}44\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial y}, \quad \left\{\begin{matrix}44\\3\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial z},$$

$$\left\{\begin{matrix}44\\4\end{matrix}\right\} = 0,$$

wenigstens mit äußerst guter Näherung. $-\frac{1}{2}g_{44}$ ist also das, was man das Newtonsche Gravitationspotential nennen könnte, sein Gradient ist die Fallbeschleunigung. Setzt man die in der Nähe einer schweren Kugel empirisch ermittelten Werte für d^2x/dt^2 usw. in die Gleichungen ein, so bekommt man für g_{44} Differentialgleichungen, durch welche es vollkommen bestimmt ist. Bekanntlich ergibt sich, jedenfalls mit einer Annäherung, welche die Beobachtungen durchweg mit ausreichender Genauigkeit wiedergibt:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r},$$

wo a eine Konstante ist, die von der schweren Masse der Kugel abhängt. Praktisch ist a/r immer winzig klein gegen 1. Die anderen Komponenten des Deformationstensors lassen sich aus praktischen physikalischen oder geometrischen Messungen noch nicht ermitteln, aber nur aus dem Grunde, weil die räumlichen Deformationen unmeßbar klein sind und deswegen die empirischen Unterlagen für die Aufstellung der zur Berechnung notwendigen Gleichungen zur Zeit noch fehlen. Sehen wir über diesen Mangel zunächst hinweg, so haben wir die auf S. 52 allgemein gestellte Aufgabe der Ermittelung der $g_{\mu\nu}$ in unserm Spezialfall wirklich gelöst.

4. Ich will jetzt annehmen, die Meßkunst sei so weit fortgeschritten, daß man die räumlichen Deformationen ebenfalls erkennen kann, daß man also feststellen kann, in welchen Entfernungen die natürlichen unkorrigierten räumlichen Koordinatenlinien an den Knotenstellen aneinander vorbeikreuzen, anstatt sich wirklich zu schneiden. Dann wäre die Wahl des Koordinatensystems nicht mehr so eindeutig, wie wir bisher angenommen haben. Denn dann müßte man erst noch über die Lage der „richtigen korrigierten" Netzknoten des räumlichen Koordinatensystems Annahmen machen, die bis zu einem gewissen Grade wieder willkürlich wären. Daß man aber auch hier nicht völlig willkürlich vorgehen kann, sieht man daraus, daß die Koordinatengeraden in der Umgebung eines Körpers, der als kugelsymmetrisch beschrieben werden *kann*, auch so definiert werden *müssen*, daß der Körper in dem Koordinatensystem wirklich kugelsymmetrisch ist. Denn im anderen Falle handelte man wieder gegen die oben ausgesprochene Maxime unserer Vernunft, indem man lediglich durch die Wahl des Koordinaten-

systems eine Unsymmetrie bekäme, die gar nicht im objektiven Tatbestand begründet ist.

Es ist nun die Frage, ob dieser Grundsatz ausreicht, um, abgesehen natürlich von den immer erlaubten Lorentzschen Transformationen, ein einziges Koordinatensystem als das vernünftige oder das physikalisch ausgezeichnete Koordinatensystem festzulegen und damit die vernünftigen Geraden und die vernünftige Teilung der Geraden eindeutig zu definieren.

Es könnte auf den ersten Blick so scheinen, als ob das nicht der Fall wäre. Schwarzschild, der zuerst das Gravitationsfeld einer ruhenden kugelig-symmetrischen schweren Masse durch Integration der Einsteinschen Differentialgleichungen (7) des Schwerefeldes berechnete[1]), fand, daß auch bei Hinzuziehung der Annahmen, daß

1. alle im Problem vorkommenden Größen von x_4 unabhängig sind,
2. bei Annahme eines Polarkoordinatensystems alle Größen nur vom Radiusvektor abhängen,
3. das Potential in großen Entfernungen vom Gravitationszentrum in den skalaren Wert 1 ($g_{ik} = \delta_i^k$) übergeht,

doch immer noch Willkürlichkeiten bleiben, daß also durch diese Bedingungen immer das Koordinatensystem noch nicht festgelegt ist. Zunächst fügt Schwarzschild deswegen ohne besondere Begründung noch die weitere Annahme $g_{h4} = 0$, $h = 1, 2, 3$, hinzu, deren Bedeutung wir im folgenden einsehen werden. Dann bleibt immer noch eine willkürliche Konstante in der Lösung. So ergibt sich für die 4-4-Komponente:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{\sqrt[3]{r^3 + a^3}},$$

wo über a noch ganz willkürlich verfügt werden darf.[2]) Setzt man $a = 0$, so wird der Wert g_{44} mit dem oben von uns als sehr gute Annäherung gefundenen Wert

---

1) K. Schwarzschild, Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 186.

2) Übrigens bekommt Schwarzschild diese spezielle Form der Funktion von r nur deswegen, weil er verlangt, daß die Determinante g konstant den Wert 1 habe. Läßt man diese durch nichts begründete Forderung fallen, so findet man für g_{44} eine ganz willkürliche Funktion von r, die nur der einen Beschränkung unterworfen ist, daß sie überall äußerst wenig von $1 - a/r$ abweicht.

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r}$$

identisch. Mit den praktischen Messungen sehr wohl vereinbar wäre es aber auch, wenn a nur eine Länge bedeutet, die gegen r sehr klein ist. Schwarzschild setzt beispielsweise $a = a$, was deswegen möglich ist, weil a die Dimension einer Länge hat und a/r praktisch immer äußerst klein gegen 1 ist. Dagegen rechnet Hilbert[1]) mit der Lösung $a = 0$, welche den Vorteil der größeren Einfachheit hat. Beide Lösungen unterscheiden sich also nur durch eine etwas verschiedene Wahl der richtigen Netzknoten, an denen die unkorrigierten natürlich konstruierten raumartigen Koordinatenlinien dicht vorbeikreuzen.

5. So ist die Sachlage denn im höchsten Grade unbefriedigend, da man gar nichts darüber weiß, nach welchem Prinzip denn eigentlich das Koordinatennetz, in welchem sich $a = a$, und das, in welchem sich $a = 0$ ergibt, gewählt ist.

Offenbar genügt es nicht, wenn man nur verlangt, daß das Koordinatensystem so gewählt wird, daß alle nicht im objektiven Tatbestand begründeten Unregelmäßigkeiten ausgeschlossen sind. Unsere Vernunft verlangt weiter noch, daß wir im Besitz eines einheitlichen Prinzips zur Konstruktion des Koordinatensystems sind, welches wir anwenden können, ohne von vorneherein zu wissen, welche Symmetrieeigenschaften das Gravitationsfeld etwa haben mag, und welches ganz von selber zu einem vernünftigen, durch den objektiven Tatbestand begründeten Weltbild führt.

Ein allgemeines Prinzip der Konstruktion von Koordinatennetzen, welches diese Bedingung erfüllt, habe ich in meinen Göttinger Vorträgen angegeben.[2]) Ich bin freilich nicht imstande zu beweisen, daß es das einzig mögliche brauchbare Konstruktionsprinzip sei. Es lautet folgendermaßen: Wenn man die natürlich konstruierten Geraden als kürzeste Verbindungen zweier ihrer Punkte auffaßt und wenn man die natürlich gewonnene Teilung von Längen und Zeiten, ohne sie zu korrigieren, als richtig ansieht, also auch überall mit konstanter Lichtgeschwindigkeit (gleich 1) rechnet, so kann

1) D. Hilbert, Nachr. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen, math.-phys. Klasse vom 23. Dezember 1916. S. 18.

2) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 601. 1917.

man die vierdimensionale Raum-Zeit als ein geometrisches Gebilde auffassen, in welchem eine ganz allgemeine Riemannsche Geometrie an die Stelle der speziellen Minkowskischen Geometrie getreten ist. Es gibt nun einen allgemein gültigen Satz der Geometrie, nach welchem man ein n-dimensionales Gebilde, in welchem eine allgemeine Riemannsche Geometrie herrscht, auffassen kann als ein mehr oder weniger unregelmäßig gekrümmtes Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ Dimensionen enthalten ist. So kann man die Raum-Zeit mit ihrer durch die Anwesenheit schwerer Massen gestörten Geometrie — ich habe sie in meinen Göttinger Vorträgen als Hilbertsche Welt im Gegensatz zu der Minkowskischen Welt bezeichnet — auffassen als ein gekrümmtes vierdimensionales Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von 10 Dimensionen enthalten ist. Und zwar müssen wir uns das Hilbertsche Kontinuum als ein Gebilde denken, welches in weiten Strecken fast genau mit einer vierdimensionalen Ebene zusammenfällt, in der die Minkowskische Geometrie gilt. Diese Ebene muß man sich durchzogen denken von vielen ziemlich scharfen Falten oder Rillen, die in zeitartigen Richtungen beiderseits ins Unendliche laufen. Die Falten stellen die Weltröhren der materiellen Teilchen dar, in der Nähe der Falten zeigt das Hilbertsche Kontinuum Abweichungen von der Ebenheit, welche sich als das Gravitationsfeld der Teilchen bemerkbar machen. Wir wollen nun eine vierdimensionale Ebene konstruieren, welche mit den großen ebenen Gebieten des Hilbertschen Kontinuums, die unendlich weit von den Weltröhren der Teilchen entfernt sind, zusammenfällt, und wir wollen ferner in diese vierdimensionale Ebene, welche wir die Koordinatenebene oder auch die physikalische Welt nennen, die Hilbertsche Welt Punkt für Punkt senkrecht hineinprojizieren. Wenn wir dann dieses Abbild der Hilbertschen Welt beschreiben, so beschreiben wir die uns objektiv gegebene Welt jedenfalls richtig. Die Geraden in der Koordinatenebene wollen wir als die vernünftigen Geraden ansehen und ihre Teilung als die vernünftige Teilung. In der Koordinatenebene ist das Koordinatennetz ohne weiteres bis auf die Lorentzschen Transformationen eindeutig definiert und zugleich liefert uns die Projektion in die Koordinatenebene ein vernünftiges Bild der Welt, welches vollkommen auf den ob-

jektiven Tatbestand begründet ist und keine anderen örtlichen oder zeitlichen Unterschiede aufweist, als die objektiv vorhandenen.

Benutzen wir die so definierten Koordinaten zur Numerierung der Raum-Zeitpunkte an Stelle der vorhin mehr oder weniger willkürlich gewählten x_1, x_2, x_3, x_4, so müssen zwischen den $g_{\mu\nu}$ vier Bedingungsgleichungen bestehen, durch welche die besondere Wahl des Koordinatensystems ausgedrückt wird. Die Willkür in der Wahl der Numerierung der Raum-Zeitpunkte nach der Einsteinschen Gravitationstheorie bringt es mit sich, daß vier von den physikalischen Grundgleichungen sich aus den übrigen ergeben.[1]) Die Zahl der selbständigen Gleichungen ist also um vier kleiner als die Zahl der selbständigen Zustandsgrößen, wenn man keine Vorschrift über die Wahl des Koordinatensystems macht. Bei unserer bestimmten Wahl des Koordinatensystems werden die vier fehlenden Grundgleichungen ersetzt durch die vier Bedingungen, welche die Festlegung des Koordinatensystems mit sich bringt. Wahrscheinlich ist es sehr schwer, diese vier Bedingungen allgemein zu formulieren und mit ihnen zu arbeiten. Ich will nun zeigen, daß man das Problem des Gravitationsfeldes einer schweren Kugel lösen kann, ohne die vier Bedingungen explizite zu kennen.

6. Es seien die 10 Koordinaten eines Punktes des Hilbertschen Kontinuums $(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$, davon seien die vier x die Koordinaten in der „Koordinatenebene" und die sechs u die Projektionen des Radiusvektors auf die sechs zur Koordinatenebene senkrechten Achsen. Die Gleichungen der „physikalischen Welt" sind also:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_6 = 0.$$

Das Hilbertsche Kontinuum habe die Gleichungen:

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \ldots, \quad u_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Wir wollen das Problem zunächst einschränken auf den Fall der Statik. Dann muß jeder Schnitt $x_4 = \text{const.}$ aus dem Hilbertschen Kontinuum genau dasselbe dreidimensionale Gebilde ausschneiden, ich will es kurz „die dreidimensionale Welt"

---

1) D. Hilbert, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse. 20. November 1915. Theorem I. S. 3.

nennen. Keineswegs müssen die Gleichungen des Hilbertschen Kontinuums von x_4 unabhängig sein, aber sie müssen für verschiedene Werte $x_4 = a$ und $x_4 = b$ kongruente Schnitte ergeben. Bezeichnen wir die u-Koordinaten eines Punktes (x_1, x_2, x_3, a) durch u, die des Punktes (x_1, x_2, x_3, b) durch u', so müssen sich die u' aus den u durch eine orthogonale Transformation ergeben:

$$u_1' = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \ldots + a_{16} u_6$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_6' = a_{61} u_1 + a_{62} u_2 + \ldots + a_{66} u_6 .$$

Hier sind also die u Funktionen von (x_1, x_2, x_3, a), die $a_{\mu\nu}$ sind von den räumlichen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) unabhängig, hängen dafür aber außer von a auch noch von b ab. Wenn wir die Zeit x_4 als einen besonderen Parameter von den anderen Koordinaten aussondern, so können wir sagen: Im Falle des statischen Problems rotiert die dreidimensionale Welt als starres Gebilde um den euklidischen Raum ($u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots u_6 = 0$), der als Rotationsachse vollkommen in Ruhe bleibt.

Da im Falle eines statischen Problems das Verhalten des Hilbertschen Kontinuums für jeden Wert von x_4 das gleiche sein muß, so muß ferner die Rotationsgeschwindigkeit der dreidimensionalen Welt konstant sein. Um diese Bedingung mathematisch zu formulieren, beachten wir, daß man eine orthogonale Transformation in einem sechsdimensionalen Gebiet durch drei voneinander unabhängige Drehungen in drei aufeinander senkrechten Ebenen beschreiben kann. Eine solche dreifache Drehung läßt sich auffassen als schiefsymmetrischer Tensor mit 15 Komponenten, man könnte sagen als Flächenvektor, das genaue Analogon des sogenannten Sechservektors (Drehung in zwei aufeinander senkrechten Ebenen) im vierdimensionalen Gebiet. Die 15 voneinander unabhängigen Drehungskomponenten reichen ebensowohl zur Beschreibung der orthogonalen Transformation hin, wie die Transformationskoeffizienten $a_{\mu\nu}$ in den oben hingeschriebenen Transformationsformeln. Denn zufolge der Orthogonalitätsbedingungen sind von den $a_{\mu\nu}$ nur 15 voneinander unabhängig.

Ich betrachte nun die infinitesimale Drehung, welche der dreidimensionale Raum in der kleinen Zeit $d x_4$ macht. Das Koordinatensystem der u sei so gelegt, daß in dem Moment

$x_4 = 0$ die drei aufeinander senkrechten Koordinatenebenen (1, 2), (3, 4), (5, 6) gerade mit den drei Drehungsebenen zusammenfallen. Die drei Drehungswinkel seien:

$$a_1 = a_1 \cdot x_4, \quad a_2 = a_2 \cdot x_4, \quad a_3 = a_3 \cdot x_4,$$

wo a_1, a_2, a_3 Konstante sind, also unabhängig von allen vier Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4). Die Transformationsformeln lauten nun:

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_1 \cdot \cos a_1 + u_2 \cdot \sin a_1, \\
u_2' &= -u_1 \cdot \sin a_1 + u_2 \cdot \cos a_1. \\
u_3' &= u_3 \cdot \cos a_2 + u_4 \cdot \sin a_2, \\
u_4' &= -u_3 \cdot \sin a_2 + u_4 \cdot \cos a_2, \\
u_5' &= u_5 \cdot \cos a_3 + u_6 \cdot \sin a_3, \\
u_6' &= -u_5 \cdot \sin a_3 + u_6 \cdot \cos a_3.
\end{aligned}$$

Durch diese Formeln ist die Bedingung von der Konstanz der Rotationsgeschwindigkeiten wiedergegeben. Die Größen u_k hängen nur von x_1, x_2, x_3 ab, die Größen a_1, a_2, a_3 nur von x_4.

Wir sind nun imstande, den natürlich gemessenen Abstand ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums zu berechnen, von denen der eine durch das Wertesystem (x_1, x_2, x_3, x_4), der andere durch $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4)$ charakterisiert ist:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum du_k^2.$$

Die Größen du_k berechnen sich aus den soeben hingeschriebenen Transformationsformeln, beispielsweise:

$$\begin{aligned}
du_1 &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \sin \alpha_1\right) \cdot dx_i \\
&\quad - (u_1 \cdot \sin \alpha_1 - u_2 \cdot \cos \alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4, \\
du_2 &= -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \sin \alpha_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_1\right) \cdot dx_i \\
&\quad - (u_1 \cdot \cos \alpha_1 + u_2 \cdot \sin \alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4,
\end{aligned}$$

usw. $i = 1, 2, 3,$

Setzt man diese Werte du_k in den Ausdruck für ds^2 ein, so sieht man leicht, daß die drei Größen α_1, α_2, α_3, welche x_4 enthalten, herausfallen, man bekommt also Koeffizienten, die nur von x_1, x_2, x_3 abhängen:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum dx_i \cdot dx_k \cdot f_{ik}(x_1, x_2, x_3),$$
$$i, k = 1, 2, 3, 4,$$

wo die f_{ik} aus den $u_\varkappa$ und ihren Ableitungen zu berechnen sind. Beispielsweise ist:

$$f_{44} = a_1^2 \cdot (u_1^2 + u_2^2) + a_2^2 \cdot (u_3^2 + u_4^2) + a_3^2 \cdot (u_5^2 + u_6^2).$$

7. Wir kommen jetzt zu dem Problem der ruhenden, kugelig-symmetrischen schweren Masse. Dieser Symmetrieforderung wird jedenfalls genügt durch die Bedingung, daß die dreidimensionale Welt, d.h. der Schnitt des Hilbertschen Kontinuums mit einer Ebene $x_4 = \text{const.}$, selber kugelig-symmetrisch sei, daß also die $u_\varkappa$ nur von der Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ des vom Symmetriezentrum ausgehenden Radiusvektors abhängen sollen. Man darf vermuten, daß diese Bedingung auch notwendig ist, daß sich also keine Abhängigkeit der $u_\varkappa$ von den Winkelkoordinaten des Radiusvektors angeben läßt, bei welcher sich in dem Ausdruck für ds^2 die Winkelkoordinaten in ähnlicher Weise wegheben würden, wie vorhin die Zeitkoordinate x_4. Einen strengen Beweis vermag ich allerdings für die Notwendigkeit der Bedingung noch nicht zu geben. Wir werden aber sehen, daß der Ansatz, der auf ihrer Annahme beruht, zur Lösung des Problems führt, also zur Konstruktion eines Hilbertschen Kontinuums, das die Eigenschaften des Gravitationsfeldes einer Kugel richtig wiedergibt. Auch das spricht für die Notwendigkeit der Bedingung, weil andernfalls das Hilbertsche Kontinuum nicht eindeutig zu bestimmen wäre. Aus unserer Symmetriebedingung ergibt sich:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + f_1(r) \cdot dr^2 + 2 \cdot f_2(r) \cdot dr \cdot dx_4 + f_3(r) \cdot dx_4^2,$$

wo f_1, f_2, f_3 leicht aus den $u_\varkappa(r)$ und ihren Ableitungen nach r zu berechnen sind.

Setzen wir ein:

$$r \cdot dr = x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + x_3 \cdot dx_3,$$

so bekommen wir für die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Deformationstensors die folgende Tabelle:

$$(9)\quad \begin{cases} 1+f_1\cdot\frac{x_1^2}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}, & f_2\cdot\frac{x_1}{r}, \\ f_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & 1+f_1\cdot\frac{x_2^2}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}, & f_2\cdot\frac{x_2}{r}, \\ f_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}, & 1+f_1\cdot\frac{x_3^2}{r^2}, & f_2\cdot\frac{x_3}{r}, \\ f_2\cdot\frac{x_1}{r}, & f_2\cdot\frac{x_2}{r}, & f_2\cdot\frac{x_3}{r}, & 1+f_2. \end{cases}$$

Die Determinante des Tensors $g_{\mu\nu}$, die wir wie oben (8. 48) mit g bezeichnen wollen, ergibt sich als:

$$(10)\qquad g=(1+f_1)\cdot(1+f_2)-f_3^2.$$

Ich will nun die Abkürzungen einführen:

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{f_1\cdot(1+f_2)-f_3^2}{(1+f_1)(1+f_2)-f_3^2}=F_1(r), \\ \frac{f_3}{(1+f_1)(1+f_2)-f_3^2}=F_3(r), \\ \frac{f_2\cdot(1+f_1)-f_3^2}{(1+f_1)(1+f_2)-f_3^2}=F_2(r), \end{cases}$$

$$(11a)\quad 1-F_1=\frac{1+f_2}{g},\quad 1-F_2=\frac{1+f_1}{g},\quad F_3=\frac{f_3}{g}.$$

Dann ergeben sich für den Tensor $g^{\mu\nu}$, der durch die Gleichungen:

$$g_{\nu\lambda}\cdot g^{\nu\lambda}=\delta_\lambda^\lambda$$

definiert ist, die Ausdrücke:

$$(12)\quad \begin{cases} 1-F_1\cdot\frac{x_1^2}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}, & -F_2\cdot\frac{x_1}{r}, \\ -F_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & 1-F_1\cdot\frac{x_2^2}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}, & -F_2\cdot\frac{x_2}{r}, \\ -F_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}, & 1-F_1\cdot\frac{x_3^2}{r^2}, & -F_2\cdot\frac{x_3}{r}, \\ -F_2\cdot\frac{x_1}{r}, & -F_2\cdot\frac{x_2}{r}, & -F_2\cdot\frac{x_3}{r}, & 1-F_3. \end{cases}$$

Nach einer einfachen Rechnung erhält man für die Christoffelschen Ausdrücke (5) folgende Werte:

$$
(13)\quad
\begin{cases}
\left\{\begin{matrix} h\,k \\ \alpha \end{matrix}\right\} = \dfrac{x_\alpha}{r}\cdot\left[\delta_h^k\cdot\dfrac{F_1}{r}+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^2}\cdot\left(f_1'\cdot(1-F_1)\right.\right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\left.-2\cdot f_2'\cdot F_2-\dfrac{2\cdot F_1}{r}\right)\right], \\
\left\{\begin{matrix} h\,k \\ 4 \end{matrix}\right\} = \delta_h^k\cdot\dfrac{F_2}{r}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^3}\cdot\left(f_1'\cdot F_2-2\cdot f_2'\cdot(1-F_2)+\dfrac{2F_2}{r}\right), \\
\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} = -\dfrac{1}{2}\cdot F_2\cdot f_3'\cdot\dfrac{x_h}{r}\cdot\dfrac{x_\alpha}{r}, \\
\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\cdot(1-F_2)\cdot f_3'\cdot\dfrac{x_h}{r}, \\
\left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} = -\dfrac{1}{2}\cdot(1-F_1)\cdot f_3'\cdot\dfrac{x_\alpha}{r}, \quad \left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} = +\dfrac{1}{2}\cdot F_2\cdot f_3', \\
\qquad h,\ k,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3.
\end{cases}
$$

In diesen und in den im folgenden noch vorkommenden Gleichungen soll durch den Strich die Differentiation nach r bezeichnet werden. Setzt man die Ausdrücke (6) für die vierzig Komponenten des Gravitationsfeldes $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ ein, so findet man:

$$
2\cdot\frac{\partial\,\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial\,x_\alpha}\left\{\begin{matrix}\mu\,\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\,x_\mu}\left\{\begin{matrix}\nu\,\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\,x_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\,\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\},
$$
$$
\mu,\ \nu,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4.
$$

Hier ist:

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}\mu\,\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x_\mu}{r}\cdot(f_1'\cdot(1-F_1)+f_2'\cdot(1-F_2)-2\cdot f_2'\cdot F_2), \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{g'}{g}\cdot\frac{x_\mu}{r}, \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\ln g}{\partial\,x_\mu}.
\end{aligned}
$$

Eine kurze Rechnung ergibt schließlich:

$$
(14)\quad
\begin{cases}
2\cdot\dfrac{\partial\,\Gamma_{hk}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = \left(\delta_h^k-\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{d}{d\,r}(r\cdot F_1)-\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{g'}{g}\right) \\
\qquad -\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^2}\cdot\dfrac{1}{2r^2}\cdot\left[\dfrac{d}{d\,r}\left(\dfrac{r^3\cdot f_3'}{g}\cdot(1+f_1)\right)-2r\cdot\dfrac{g'}{g}\right], \\
2\cdot\dfrac{\partial\,\Gamma_{h4}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = -\dfrac{x_h}{r}\cdot\dfrac{1}{2r^2}\cdot\dfrac{d}{d\,r}\left(\dfrac{r^3\cdot f_3'}{g}\cdot f_2\right), \\
2\cdot\dfrac{\partial\,\Gamma_{44}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = -\dfrac{1}{2r^2}\cdot\dfrac{d}{d\,r}\left(\dfrac{r^3\cdot f_3'}{g}\cdot(1+f_2)\right), \\
\qquad h,\ k = 1,\ 2,\ 3, \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{cases}
$$

Diese Differentialausdrücke hätte man in einem Raum, der völlig frei von schwerer Masse ist, gleich Null zu setzen. Indessen ist dabei zu bedenken, daß man in einem Raum, wo ein Gravitationsfeld vorhanden ist, zumindest die Energie des Gravitationsfeldes selber hat, und daß diese auch ihren Beitrag zu der schweren Masse liefert. Die Dichtigkeit der dem Gravitationsfeld zukommenden schweren Masse berechnet sich nach Formel (8), wenn man hier für H den auf die Gravitation entfallenden Anteil der Hamiltonschen Funktion der Welt einsetzt. Ich will diesen Anteil G nennen, dann ist in der Einsteinschen Theorie[1])

$$(15) \qquad G = \frac{1}{2} \cdot \omega^{\mu\nu} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} \right)$$

und

$$(16) \qquad h_{\mu\nu} = -\frac{\partial G}{\partial \omega^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} \right).$$

Setzt man hier die Werte (13) ein, so erhält man:

$$(17) \quad \begin{cases} 2 \cdot h_{hk} = \left(\delta_h^k - \dfrac{x_h x_k}{r^2} \right) \cdot \dfrac{1}{2r} \cdot \dfrac{g'}{g} \cdot F_1 \\ \qquad + \dfrac{x_h x_k}{r^2} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{f_1' \cdot f_2'}{g} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{g' \cdot f_2' \cdot (1+f_1)}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{h4} = \dfrac{x_h}{r} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{f_2' \cdot f_3'}{g} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{g' \cdot f_3' \cdot f_2}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{44} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{f_3'^2}{g} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{g' \cdot f_3' \cdot (1+f_2)}{g^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_\alpha} + h_{\mu\nu} = 0$$

ergeben vier Differentialgleichungen für die f_1, f_2, f_3:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g}(1 - F_1) = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^3 \cdot f_2'}{g} \cdot (1+f_1) \right) - \frac{f_2' \cdot f_1'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot g' \cdot (1+f_1)}{g^2} - \frac{2 \cdot g'}{r \cdot g} = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^3 \cdot f_3'}{g} \cdot f_3 \right) - \frac{f_3' \cdot f_3'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_3' \cdot g' \cdot f_3}{g^2} = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^3 \cdot f_3'}{g} \cdot (1+f_2) \right) - \frac{f_3' \cdot f_3'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_3' \cdot g' \cdot (1+f_2)}{g^2} = 0,$$

1) H. Weyl, a. a. O., S. 189 u. S. 191. Unser G ist gleich $-\frac{1}{2}\mathfrak{H}$ bei Weyl, ferner $\omega^{\mu\nu} = -\sqrt{g} \cdot g^{\mu\nu}$ bei Weyl, vgl. die Fußnote auf S. 48.

oder nach einer einfachen Umformung der drei letzten Gleichungen:

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{1}{r^3}\ \frac{d}{dr}(r\cdot F_1)-\frac{1}{2r}\cdot\frac{g'}{g}\cdot(1-F_1)=0, \\ \frac{1+f_1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^3\cdot f_3'}{\sqrt{g}}\right)-\frac{2\cdot g'}{r\cdot g}=0, \\ \frac{f_3}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^3\cdot f_3'}{\sqrt{g}}\right)=0, \\ \frac{1+f_3}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^3\cdot f_3'}{\sqrt{g}}\right)=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den folgenden drei Gleichungen:

$$(19)\quad \frac{dg}{dr}=0,\quad \frac{d}{dr}(r^3\cdot f_3')=0,\quad \frac{d}{dr}(r\cdot F_1)=0.$$

Mit Rücksicht darauf, daß f_1, f_2, f_3 im Unendlichen verschwinden, ergibt sich aus der ersten Gleichung (19):

$$(20)\qquad g=1.$$

Daraus folgt weiter, weil:

$$1-F_1=\frac{1+f_3}{g}=1+f_3,$$

$$F_1=-f_3.$$

Die beiden letzten Gleichungen (19) fallen demnach zusammen in die *eine* Gleichung:

$$\frac{d(r\cdot f_3)}{dr}=0,$$

deren Lösung ist:

$$(21)\qquad f_3=-\frac{a}{r},\quad g_{44}=1-\frac{a}{r},$$

wo die Integrationskonstante a sich aus der schweren Masse der Kugel berechnet, die nur noch mit einem von den Maßeinheiten abhängigen Faktor zu multiplizieren ist.

8. Zur Berechnung von f_1 und f_2 haben wir die einzige Gleichung:

$$(22)\qquad g=(1+f_1)\cdot(1+f_2)-f_3^2=1.$$

Die gewonnene Lösung enthält noch eine willkürliche Funktion. Die bisher gemachten Annahmen reichen also immer noch nicht ganz aus, um das Koordinatensystem ein-

deutig zu definieren. Woher diese Vieldeutigkeit rührt, erkennt man, wenn man unter $x_4 = \text{const.}$ nicht ein ebenes Kontinuum versteht, sondern einen auf der Koordinatenebene $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots u_6 = 0$ senkrecht stehenden Zylinder, dessen Spur in der Koordinatenebene ein dreidimensionales Kontinuum ist, das zwar rotationssymmetrisch in bezug auf die Achse $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, im übrigen aber ganz beliebig gekrümmt ist. Bei dieser Wahl des Koordinatensystems ergibt sich durch eine leichte geometrische Überlegung für irgend ein Linienelement in der Koordinatenebene die Form:

$$ds'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + \varphi_1(r) \cdot dr^2 + 2\varphi_2(r) \cdot dr \cdot dx_4,$$

Für die natürliche Länge eines Linienelementes ds im Hilbertschen Kontinuum bekommt man demnach aus:

$$ds^2 = ds'^2 + \sum du_k^2,$$

genau dieselbe Form (9), welche wir bisher benutzt haben. In Formel (9) ist demnach noch nicht von der Bedingung Gebrauch gemacht, daß $x_4 = \text{const.}$ eine Ebene sein soll. Diese Bedingung können wir folgendermaßen formulieren: die Projektion des Hilbertschen Kontinuums in der Koordinatenebene muß zu $x_4 = \text{const.}$ beiderseits symmetrisch sein. Denn das ist dann und nur dann der Fall, wenn die $x_4 = \text{const.}$ ebene Kontinua sind. Es müssen also alle geodätischen Linien, die den Raum $x_4 = \text{const.}$ berühren, überhaupt ganz in seinem Inneren verlaufen, und alle geodätischen Linien, die senkrecht auf $x_4 = 0$ stehen, müssen für $+x_4$ und $-x_4$ genau gleich beschaffen sein. Wenn man die Gleichungen (4) also für raumartige Linien aufstellt, für welche in einem Punkt $dx_4 = 0$ ist, so muß sich auch überall $dx_4 = 0$ ergeben, das heißt: für diese Linien muß $d^2 x_4 = 0$ sein, oder:

$$\left\{ \begin{matrix} h\,k \\ 4 \end{matrix} \right\} \cdot dx_h \cdot dx_k = 0.$$

Nach (13) ergibt sich:

$$\left\{ \begin{matrix} h\,k \\ 4 \end{matrix} \right\} \cdot dx_h \cdot dx_k = -\frac{1}{2}\left(f_1' \cdot F_2 - 2 \cdot f_2' \cdot (1 - F_3)\right) \cdot dr^2.$$

Da $F_2 = f_2$, $1 - F_3 = 1 + f_1$, so muß also sein:

$$(1 + f_1) \cdot f_2' - \tfrac{1}{2} f_2 \cdot f_1' = 0. \tag{28}$$

Stellt man die Gleichungen (4) für zeitartige Linien auf, so müssen in den Gleichungen für die raumartigen Koordinaten die Glieder mit der ersten Potenz von dx_4 wegfallen, es muß also sein:

$$\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} \cdot dx_h = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

oder, da nach (18):

$$\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} \cdot dx_h = -\frac{1}{2} F_2 \cdot f_2' \cdot \frac{x_\alpha}{r} \cdot dr,$$

so muß sein:

$$f_2 \cdot f_2' = 0. \tag{24}$$

Die beiden Symmetriebedingungen (23) und (24) sind dann, und auch nur dann, erfüllt, wenn:

$$f_2(r) = 0. \tag{25}$$

Damit ist auch die letzte Willkürlichkeit beseitigt, das Koordinatensystem ist nunmehr eindeutig festgelegt. $f_1(r)$ berechnet sich aus $g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_2) = 1$. Wir haben nun:

$$f_1 = \frac{\frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{a}{r}, \tag{26}$$

$$F_1 = \frac{a}{r}, \qquad F_2 = 0, \quad F_3 = -\frac{\frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}}. \tag{27}$$

Vergleichen wir diese Formeln mit dem Schwarzschildschen Integral, so sehen wir, daß in unserem Koordinatensystem die willkürliche Konstante a zu Null bestimmt wird, es ist das der von Hilbert bevorzugte Wert.

9. Schwarzschild macht für den natürlich gemessenen Abstand ds zweier unendlich benachbarter Raum-Zeitpunkte den Ansatz[1]):

$$ds^2 = F \cdot dt^2 - G \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) - H \cdot r^2 \cdot dr^2.$$

Vergleicht man hiermit unseren Ansatz auf Seite 65:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + f_1 \cdot dr^2 + 2f_2 \cdot dr \cdot dx_4 + f_3 \cdot dx_4^2,$$

1) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 191. Formel (6).

so findet man, abgesehen von der Wahl des Vorzeichens, völlige Übereinstimmung, wenn man setzt:

$$f_3 = 0,$$
$$H = \frac{f_1}{r^2},$$
$$F = 1 + f_2,$$
$$G = 1.$$

Da sich bei Schwarzschild

$$G = \frac{\sqrt[3]{(r^3 + a^3)^3}}{r^3}$$

ergibt, so erkennt man, daß die Annahme $G = 1$ schon den Wert $a = 0$ involviert. Die Annahme $G = 1$ ergibt sich aber in meinem Ansatz deswegen mit Notwendigkeit, weil die Projektion der Verbindungslinie ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums, welche in dem Schnitt mit einer Ebene $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, ... $u_6 = c_6$ liegen, auf die Koordinatenebene $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... $u_6 = 0$, denselben Wert ds haben muß, wie die Verbindungslinie selbst. Würden wir für die Projektion den Wert ds' annehmen, wo:

$$ds' = \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

so würde sich der Schwarzschildsche Ansatz ergeben. Wegen der Symmetrieverhältnisse schneidet die zur Koordinatenebene parallele Ebene $u_1 = c_1$, ... $u_6 = c_6$ aus der Hilbertschen Welt eine zweidimensionale Kugelfläche $r = \text{const.}$, $x_4 = \text{const.}$ aus. Man erkennt das sofort, wenn man setzt:

$$\sum du_k^2 = f_1 \cdot dr^2 + f_3 \cdot dx_4^2 = 0.$$

Um zu dem Schwarzschildschen Maß für die Projektion zu kommen, muß man den Wert des Radius dieser Kugel, dessen natürlich gemessene Länge ich mit Schwarzschild R nennen will, zu

$$r = \frac{R}{\sqrt{G}}$$

rechnen, denn dann ist

$$ds' = \frac{ds}{\sqrt{G}}.$$

Setzt man ein:

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt[3]{r^3 + \alpha^3}}{r},$$

so erhält man:

$$R = \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3}$$

oder:

$$r = \sqrt[3]{R^3 - \alpha^3}.$$

Um zu dem Koordinatensystem zu kommen, welches der Schwarzschildschen Lösung zugrunde liegt, verfahren wir also zuerst genau nach dem von mir angegebenen Prinzip: wir projizieren das Hilbertsche Kontinuum senkrecht auf die Koordinatenebene $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... $u_6 = 0$. Dann aber rechnen wir in der Koordinatenebene nicht mit den natürlichen Längen, sondern wir rechnen so, als ob ein Punkt, der vom Koordinatenanfang natürlich gemessen die raumartige Entfernung R hat, nur um $r = \sqrt[3]{R^3 - \alpha^3}$ von ihm entfernt sei.

Man muß also, um zu der Schwarzschildschen Lösung zu kommen, der Koordinatenebene rein willkürlich eine recht unvernünftige nichteuklidische Geometrie verleihen.

Übrigens kommt man zu einem Integral der Einsteinschen Differentialgleichungen auch dann, wenn man setzt $G = 1 + \varphi(r)$, wo $\varphi(r)$ eine ganz beliebige Funktion von r ist, deren Größe wir aber immer als äußerst klein gegen 1 ansehen wollen.[1])

Ergebnisse.

1. Nach der Einsteinschen Gravitationstheorie ist es unmöglich, in einem Gravitationsfeld die „natürlich" konstruierten raumartigen und zeitartigen Geraden zum Bau eines Koordinatensystems zu verwenden, weil sich die natürlichen Geraden im allgemeinen nicht in Netzknoten schneiden, sondern an den Knotenstellen vorbeikreuzen.

2. Wenn man eine beliebige Numerierung der Raum-Zeitpunkte annimmt, so ergeben sich nach dem Prinzip der allgemeinen Transformierbarkeit, welches der Einsteinschen

1) Vgl. S. 59, Fußnote 1.

Theorie zugrunde liegt, zwar stets die physikalischen Grundgleichungen in derselben einfachen Form, aber eine ungeeignete Wahl des Koordinatensystems kann es mit sich bringen, daß in ihm scheinbar physikalische Unterschiede, Bewegungsvorgänge oder auch Wellen auftreten, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind, sondern nur der Wahl des unvernünftigen Koordinatensystems ihr Dasein verdanken.

3. Es wird in dieser Arbeit ein Prinzip zur praktischen Ausführung eines stets vernünftigen Koordinatennetzes und damit zur praktischen Bestimmung von geraden Linien und ihrer Teilung angegeben, so daß man also niemals zu Widersprüchen mit der Forderung der Vernunft kommt, daß keinerlei zeitliche Veränderungen oder örtliche Unterschiede in der physikalischen Beschreibung der Welt vorkommen dürfen, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind.

4. Es wird gezeigt, daß bei dieser vernunftgemäßen Wahl des Koordinatennetzes das Gravitationsfeld einer kugelförmigen schweren Masse eindeutig bestimmt ist. Die willkürliche Konstante, oder die willkürliche Funktion, die in dem von Schwarzschild gefundenen Integral noch vorkommt, wird als Null bestimmt. Schon Hilbert hat die Null dem von Schwarzschild angenommenen positiven Wert vorgezogen, jedoch nur aus dem Grunde, weil der Ausdruck für das Gravitationspotential dadurch einfacher wird. Nach meiner Untersuchung kommt man notwendig zu diesem Integral, wenn man das Koordinatensystem vernünftig wählt.

5. Um zu der Schwarzschildschen oder überhaupt irgend einer anderen Lösung zu kommen, muß man der Wahl des Koordinatennetzes eine ganz unvernünftige nichteuklidische Geometrie zugrunde legen.

Halle a. S., Physik. Institut, d. 17. September 1919.

(Eingegangen 21. September 1919.)

3. *Zum Problem der Zustandsgleichung;* *von C. Dieterici.*

In der vorliegenden Arbeit kommt es mir zunächst darauf an, aus den Druckisothermen verschiedener Substanzen tatsächlich bestehende Gesetzmäßigkeiten hervorzuheben, welche bisher nicht oder nicht scharf genug in ihren Folgerungen für die Frage nach der Bildung der Zustandsgleichung bemerkt sind. Ich werde diese Folgerungen dann soweit verfolgen, wie es heute möglich ist; eine endgültige Lösung des Problems der Zustandsgleichung ist noch nicht erreichbar.

Das Beobachtungsmaterial, auf welches sich die folgende Untersuchung stützt, sind die Beobachtungen S. Youngs[1]) am Isopentan und diejenigen Amagats[2]) an Kohlensäure und Äthylen. Im späteren Verlauf der Arbeit werden noch die umfangreichen Beobachtungen S. Youngs[3]) über die Sättigungsdrucke und Volumina von Substanzen herangezogen.

§ 1. In Tab. 1[4]) ist die kritische Druckisotherme des Isopentans unter p wiedergegeben. Eine Aufzeichnung in pv-Blatt ergibt den bekannten Verlauf, der von großen Werten von p bei kleinem v stark abfällt, bei v_k einen Sattelpunkt hat, dann wieder erst langsam, dann schneller abnimmt, um schließlich sich dem Nullwert bei $v = \infty$ zu nähern.

Fragt man, wie bei T_k $\partial p/\partial v$ verlaufen muß, so ist aus Tab. 1 ersichtlich, daß $\partial p/\partial v$ in dem Volumenintervall

1) S. Young, Zeitschr. f. phys. Chem. **29**. S. 193—241. 1899.
2) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) **29**. S. 68—136. 1893.
3) S. Young, Proc. Dublin Soc. **12**. S. 374—443. 1910.
4) In allen nachfolgenden Zahlenangaben ist die Gaskonstante pro Gramm

$$R = \frac{1{,}985}{M} \text{ cal/}^\circ\text{C}$$

gesetzt, wo M das Molekulargewicht ist. Das mechanische Wärmeäquivalent wird gleich 427,4 gm/cal. gesetzt. Die in mm Hg angegebenen Drucke sind durch Multiplikation mit 0,00003181 in cal/cm³ umgewandelt.

Tabelle 1.

Kritische Isothermen des Isopentans C_5H_{12} $M = 72{,}10$.

$T_k = 460{,}8$ °C. $R = 0{,}02753$ cal/°C $RT_k = 12{,}686$ cal $\frac{p_k v_k}{RT_k} = 3{,}735$.

v cm³	p cal/cm³	$\frac{\partial p}{\partial v}$ cal/cm⁶	$\frac{p}{v}$ cal/cm⁶	$\frac{pv}{RT_a}$	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ cal/cm³ °C	$\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)$ cal/cm³	$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$
2,4	1,5612		0,6505	0,2954	0,04042	17,064	10,930
2,5	1,2902	− 2,243	0,5161	0,2542	0,03616	15,371	11,914
2,6	1,1127	− 1,478	0,4273	0,2281	0,03196	13,610	12,281
2,7	0,9947	− 0,961	0,3680	0,2117	0,02820	12,000	12,064
2,8	0,9206	− 0,6125	0,3287	0,2032	0,02562	10,885	11,823
2,9	0,8722	− 0,4075	0,3009	0,1994	0,02330	9,864	11,310
3	0,8417	− 0,275	0,2806	0,1990	0,02037	8,542	10,149
3,2	0,8108	− 0,106	0,2530	0,2045	0,01837	7,654	9,440
3,4	0,7994	− 0,035	0,2350	0,2143	0,01649	6,800	8,506
3,6	0,7968	− 0,008	0,2215	0,2261	0,01477	6,009	7,541
3,8	0,7962	− 0,003	0,2094	0,2385	0,01346	5,406	6,790
4	0,7959	− 0,001	0,1990	0,2510	0,12305	5,217	6,55
4,268	0,7956	− 0,0000	0,1864	0,2678	0,01273	5,070	6,373
5	0,7949	− 0,0018	0,1590	0,3133	0,01115	4,029	5,069
6	0,7902	− 0,0089	0,1317	0,3737	0,00840	3,094	3,916
8	0,7542	− 0,0233	0,0943	0,4757	0,00579	1,914	2,538
10	0,7011	− 0,0283	0,0701	0,5527	0,00414	1,207	1,721
12	0,6457	− 0,0265	0,0538	0,6108	0,00334	0,893	1,383
15	9,5719	− 0,0231	0,0383	0,6763	0,00255	0,603	1,054
20	0,4721	− 0,0168	0,236	0,7443	0,00185	0,381	0,807
30	0,3469	− 0,0106	0,0116	0,8204	0,00110	0,160	0,461
30	0,2726	− 0,0049	0,0066	0,8596	0,00078	0,086	0,315
60	0,1909	− 0,0027	0,0031	0,9029	0,00048	0,030	0,157
80	0,1468	− 0,0017	0,0018	0,9255	0,00037	0,023	0,157
100	0,1190	− 0,0011	0,0012	0,9381	0,00029	0,015	0,126
∞	0	− 0,0000	0,0000	1	0,00000	0,000	

vom kleinsten v bis v_k von sehr großen negativen Werten bis zum Nullwert bei v_k zunimmt. Da $\partial p/\partial v$ alle Werte von großen negativen Werten bis zur Null kontinuierlich durchläuft, muß also auch ein Wert $(\partial p/\partial v)_m$ auftreten, bei dem

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m = -\left(\frac{p}{v}\right)_m$$

ist; denn p/v nimmt von großen Werten anfangend nur bis zu dem in der Tabelle angegebenen immer noch positiven Wert $(p/v)_k$ ab. Daher muß bei einem bestimmten Volumen v_m ein Wert auftreten, bei dem

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m = -\left(\frac{p}{v}\right)_m$$

ist. Die Tab. 1 zeigt diesen Wert bei dem Volumen 8 cm³.[1]) Bei v_k ist

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_k = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_k = 0,$$

die Druckisotherme hat ihren Sattelpunkt. In dem Volumenintervall zwischen v_k und $v = \infty$ hat die Größe $(\partial p/\partial v)$ sowohl bei v_k wie bei $v = \infty$ den Wert 0, dazwischen aber ist sie negativ, folglich muß notwendig ein Volumen auftreten, bei dem $\partial p/\partial v$ ein negatives Maximum hat. Die Tabelle ergibt dieses Volumen bei $v = 10$ cm³. Der gesamte Verlauf der Kurve, welche bei T_k $(\partial p/\partial v)$ als Funktion von v darstellt, ist in Fig. 1 wiedergegeben, durch eine Kurve, welche stets

Verlauf von $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_k}$ und $-\frac{p}{v}$ bei T_k.

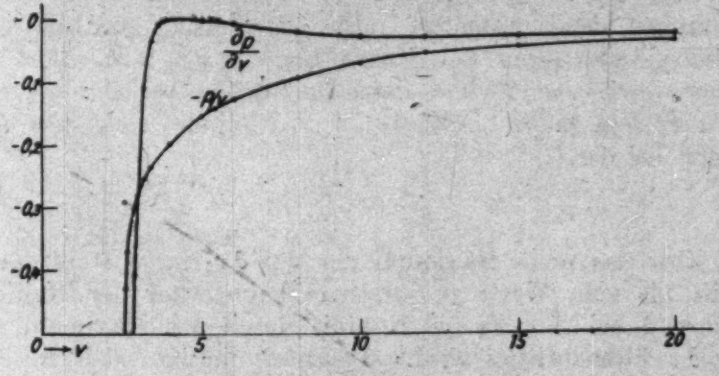


Fig. 1.

negativ ist, ein Maximum bei v_k und ein Minimum ergibt. Die Lage des Volumens v_m, bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, ergibt die Zeichnung genauer bei $v_m = 2{,}95$ cm³, so daß also

$$\frac{v_m}{v_k} = \frac{2{,}95}{4{,}268} = 0{,}6912$$

1) L. Schames, Ann. d. Phys. 57. S. 321—346. 1918, bezeichnet diesen Punkt als Boylepunkt.

ist und die Lage des zweiten Minimum ist genauer

$$v = 11{,}50 \text{ cm}^3 = 2{,}5\, v_k.$$

Die Festlegung dieser zwei ausgezeichneten Punkte in dem Verlauf von $\partial p/\partial v$ ist deshalb von Wichtigkeit, weil man damit zur Bestimmung der Konstanten in einer Zustandsgleichung nicht mehr auf den kritischen Doppelpunkt allein angewiesen ist, sondern noch zwei ausgezeichnete Punkte in der kritischen Isotherme zur Verfügung hat, den ersten bei v_m, wo

$$\frac{\partial p}{\partial v_j} = -\frac{p}{v}$$

ist, und noch einen zweiten, in dem zwar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

ist, aber $\partial p/\partial v$ negativ ist. Beide sind durch die Beobachtungen sicher festgelegt. Die für $T = T_k$ gegebene graphische Darstellung der Kurve für $\partial p/\partial v$ läßt sofort erkennen, wie der Verlauf derselben Größe bei $T > T_k$ und $T < T_k$ sein muß. Denn bei $T > T_k$ findet sich stets eine Stelle, bei der

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, aber das erste Maximum der $\partial p/\partial v$-Kurve steigt nicht mehr bis zum Werte 0, sondern bleibt unter der Nullinie. Während bei $T < T_k$ die Nullinie durch das Maximum von $\partial p/\partial v$ überschritten wird. Demnach müßten sich bei den unteren Isothermen fünf ausgezeichnete Volumina finden, eines bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, zwei Volumina, in denen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0$$

ist und zwei, in denen $\partial p/\partial v$ ein Maximum und ein Minimum hat. Diese Volumina liegen alle im Zweiphasengebiet und sind der unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich. Bei der kritischen Isotherme fallen die drei mittleren ausgezeichneten Punkte im kritischen Doppelpunkte zusammen, bei den oberen

Isothermen schieben sich die drei verbleibenden ausgezeichneten Werte von $\partial p/\partial v$ immer mehr zusammen, um bei genügend hoher Temperatur beim Übergang in den idealen Gaszustand ganz zu verschwinden.

Das Volumen v_m, bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, findet man am sichersten, indem man bei verschiedenen Temperaturen die Kurve aufzeichnet, welche pv/RT oder das Verhältnis $v : v_0$ des tatsächlichen zum „idealen" Gasvolumen darstellt. In den folgenden Tab. 2a, 2b, 2c ist diese Größe für die kritische und einige obere und untere Isothermen für Isopentan, Kohlensäure und Äthylen wiedergegeben und

Tabelle 2a.

pv/RT für Isopentan bei verschiedenen T und v.
$R = 0{,}02753$ cal/°C.

v cm³	$T = 493$	473	460,8	453	443
2,4			0,2954	0,2412	0,1694
2,5		0,3332	0,2542	0,2045	0,1370
2,6		0,3016	0,2281	0,1816	
2,7		0,2802	0,2117	0,1685	
2,8		0,2674	0,2032	0,1630	
2,9	0,3536	0,2599	0,1994		
3	0,3487	0,2566	0,1990		
3,2	0,3418	0,2569	0,2045		
3,4	0,3422	0,2629	0,2143		
3,6	0,3474	0,2721	0,2261		
3,8	0,3554	0,2899	0,2385		
4	0,3646	0,2945	0,2510		
4,268	0,3760	0,3090	0,2678		
5	0,4170	0,3549	0,3133		
6	0,4690	0,4126	0,3737		
8	0,5550	0,5083	0,4757	0,4536	
10	0,6194	0,5804	0,5527	0,5344	
12	0,6685	0,6352	0,6108	0,5960	
15	0,7232	0,6950	0,6763	0,6627	0,6452
20	0,7812	0,7596	0,7443	0,7349	0,7218
30	0,8455	0,8298	0,8204	0,8138	0,8039
40	0,8794	0,8665	0,8596	0,8551	0,8482
60	0,9138	0,9063	0,9029	0,8997	0,8959
80	0,9360	0,9295	0,9255	0,9225	0,9204
100	0,9475	0,9414	0,9381	0,9350	0,9340
	1	1	1	1	1

Tabelle 2b.[1])

pv/RT für Kohlensäure bei verschiedenem T und v.
$R = 0{,}04516$ cal/°C.

$T = 293$		$T = 303$		$T = 313$	
v cm³	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT
12,149	0,7767	11,594	0,7934	11,76	0,8042
11,250	0,7600	10,939	0,7727	10,052	0,7733
10,053	0,7344	9,271	0,7367	9,200	0,7550
8,673	0,6967	8,414	0,7133	8,684	0,7424
8,354	0,6865	7,895	0,6971	7,976	0,7228
7,491	0,6567	7,169	0,6711	7,534	0,7084
		6,723	0,6531		
6,927	0,6325	5,671	0,6009	6,554	0,6723
6,122	0,5925	4,662	0,5352	5,690	0,6322
5,603	0,5628	4,007	0,4813	5,206	0,6052
5.321	0,5442	3,420	0,4228	4,897	0,5860
				4,162	0,5338
1,320	0,1877	1,650	0,2069	3,438	0,4702
1,290	0,1414	1,578	0,2006		
		1,507	0,1970	3,125	0,4380
		1,487	0,1970	2,606	0,3788
		1,440	0,1983	1,930	0,2969
		1,417	0,2001	1,684	0,2734
				1,574	0,2691
				1,450	0,2726

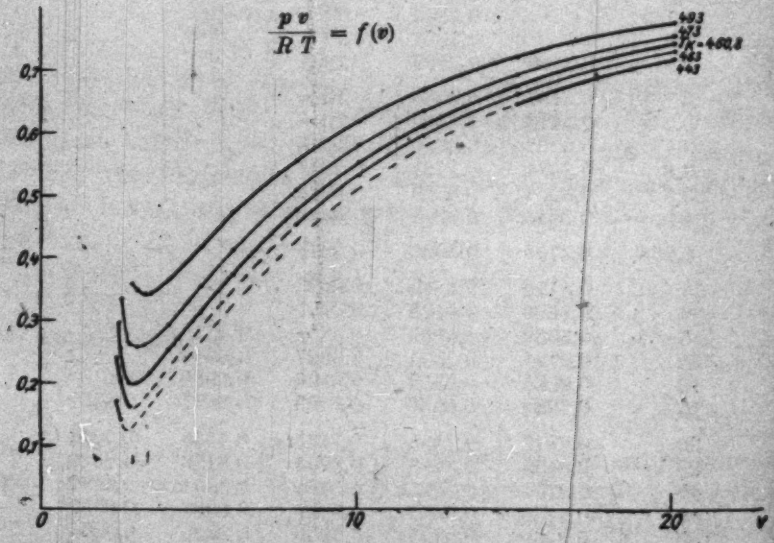


Fig. 2.

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) 29. S. 110—111. 1893.

Tabelle 2c.[1])

pv/RT für Äthylen bei verschiedenen T und v. $R = 0{,}071$ cal/°C.

$T = 273$		$T = 278$		$T = 283$		$T = 293$		$T = 303$	
v	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT
14,10	0,6340	13,67	0,6373	13,995	0,6579	13,95	0,6820	11,70	0,6586
13,34	0,6165	12,32	0,6044	13,38	0,6449	12,42	0,6503	10,24	0,6221
12,89	0,5955	10,92	0,5627	12,14	0,6145	11,90	0,6373	8,271	0,5582
10,67	0,5330	10,18	0,5372	10,97	0,5817	10,07	0,5860	6,773	0,4955
		9,366	0,5057	9,78	0,5422	9,197	0,5567	5,523	0,4352
3,143	0,1610	8,468	0,4684						
2,992	0,1570			8,465	0,4896	8,315	0,5227	4,641	0,3874
2,941	0,1580	3,289	0,1856	7,677	0,4534	7,482	0,4877	3,992	0,3595
2,910	0,1600	3,150	0,1817	6,723	0,4052	6,630	0,4477	3,482	0,3527
2,862	0,1645	3,093	0,1822	4,552	0,2798	5,736	0,4006	3,226	0,3631
2,827	0,1695	3,062	0,1841	3,694	0,2315	4,076	0,3084		
				3,394	0,2209				
2,809	0,1755	3,042	0,1866			3,556	0,2896		
2,786	0,1810	2,994	0,1910	3,245	0,2190	3,319	0,2896		
2,701	0,2055	2,930	0,2013	3,153	0,2204	3,167	0,2949		
2,587	0,2425	2,861	0,2106	3,088	0,2233	2,997	0,3140		
2,566	0,2565	2,705	0,2489	2,833	0,2561	2,882	0,3354		
2,481	0,3100			2,786	0,2687				
				2,645	0,3188				

für den ersten Stoff in Fig. 2 dargestellt. Da

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{pv}{RT_k}\right) = \frac{1}{RT_k}\left(v\frac{\partial p}{\partial v} + p\right)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{pv}{RT_k}\right) = \frac{1}{RT_k}\left(2\frac{\partial p}{\partial v} + v\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)$$

ist, folgt, daß bei T_k dasjenige Volumen, bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, dasjenige ist, bei dem die Größe pv/RT_k ein Minimum hat. Dieses Volumen v_m findet sich hier noch sicherer als aus den Differentialquotienten bei $v = 2{,}95\,\text{cm}^3 = 0{,}6912\,v_k$. Mit steigender Temperatur verschiebt sich, wie die Kurvendarstellung erkennen läßt, die Lage des Minimums, wenn auch nur wenig, nach größerem Volumen und ebenso deutet der Verlauf der Größe pv/RT bei niederen Temperaturen darauf hin, daß im Zweiphasengebiet die Lage des Minimums bei kleinerem Volumen als bei T_k zu suchen ist.

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) **29**. S. 113. 1893.

Im kritischen Punkt ist

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

und folglich hat bei v_k die Kurve, welche das Verhältnis

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p v}{R T_k}$$

darstellt, ihren Wendepunkt und zwar ist hier ihre maximale Neigung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p v}{R T_k}\right) = \frac{p_k}{R T_k} = \frac{1}{v_{0k}} = s_{0k}$$

gleich der „idealen" Gasdichte.

Bei höheren Temperaturen verschiebt sich auch die Stelle, an der die Kurve $p v / R T$ ihren Wendepunkt hat nach größerem Volumen. Bei niederen Temperaturen ist eine sichere Aussage über die Lage des Wendepunktes nicht möglich.

In bezug auf den Verlauf der Größe $p v / R T$ bei Kohlensäure und bei Äthylen sei hervorgehoben: Kohlensäure zeigt in der Isotherme von 30° C das Minimum von $p v / R T$ bei $v_m = 1{,}49\,\text{cm}^3$. In der kritischen Isotherme bei 31,35° C kann das Minimum von $p v / R T$ nicht merklich verschieden sein. Das kritische Volumen ist $v_k = 2{,}155\,\text{cm}^3$, so daß auch hier wieder

$$\frac{v_m}{v_k} = \frac{1{,}49}{2{,}155} = 0{,}6914$$

ist. Bei Äthylen findet sich bei der kritischen Temperatur 10° C das Volumen v_m des Minimums von $p v / R T$ bei $v_m = 3{,}20\,\text{cm}^3$; das kritische Volumen v_k ist leider nicht so scharf bestimmt, annähernd ist $v_k = 4{,}55\,\text{cm}^3$. Daraus ergibt sich hier $v_m = 0{,}703\, v_k$. Wie es scheint, steht also dasjenige Volumen, in dem bei T_k die Größe $p v / R T$ ein Minimum hat, in einem bestimmten konstantem Verhältnis zu v_k und es ist:

$$v_m : v_k = 0{,}6912 = \ln 2, \text{ also } e^{\frac{v_m}{v_k}} = 2.$$

Im übrigen zeigen auch die Kurven, welche für Kohlensäure und Äthylen die Größe $p v / R T$ darstellen, daß auch bei diesen Stoffen sich die Lage des Minimums mit steigender Temperatur langsam nach größerem Volumen verschiebt. In allen Stücken tritt ein gleichartiges Verhalten, wie bei Isopentan, auf.

§ 2. Ein ganz anders Verhalten zeigt der Druck in seiner Abhängigkeit von der Temperatur oder der Spannungskoeffizient $(\partial p/\partial T)_v$, für den Young besondere Tabellen gegeben hat. Für die kritische Temperatur ist in Tab. 1 der Spannungskoeffizient verzeichnet und mit ihm sind die durch die Überschriften der einzelnen Spalten gekennzeichneten Rechnungsoperationen ausgeführt. $\partial p/\partial T$ ist stets größer als p/T, so daß, wenn man den Spannungskoeffizienten bei T_k durch

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} f(v)$$

darstellen wollte, $f(v)$ eine Funktion sein müßte, die mit zunehmender Dichte zunimmt, aber nicht gleichmäßig, sondern bei v_k tritt eine deutliche Verlangsamung der Zunahme mit der Dichte auf. Bei v_k tritt die schon früher bemerkte auffällige Tatsache hervor[1]), welche auch Kohlensäure zeigt, daß

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_k} = \frac{2R}{v_k}$$

wird, also

$$f(v_k) = 2\frac{RT_k}{p_k v_k}.$$

Entsprechend zeigt die thermodynamische Größe $\partial U/\partial v$ bei v_k den Wert

$$\frac{1}{v_k}(2RT_k - p_k v_k).$$

Da der Spannungskoeffizient $\partial p/\partial T$ ähnlich verläuft wie p selbst, insofern beide Größen von $v = \infty$ anfangend beschleunigt mit abnehmendem Volumen wachsen, bei v_k nahezu konstant sind, um dann bei geringeren Dichten wieder weiter zu wachsen, könnte man auf den Gedanken kommen, daß

$$\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial T} = f(v)$$

eine einfache Gesetzmäßigkeit zeigt. Das ist aber nicht der Fall, denn diese Funktion zeigt ebenso, wie die in Tab. 1 berechnete

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial T} - 1$$

ein ausgesprochenes Maximum beim Volumen $v = 2{,}6\,\text{cm}^3$.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. S. 144—153. 1903.

§ 3. Es soll nunmehr untersucht werden, wie die bisher vorliegenden Formen der Zustandsgleichungen den hier hervorgehobenen Tatsachen entsprechen. Die van der Waalssche Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

verlangt ja, solange man bei $T =$ konst. die Größen a und b als konstant ansieht, die Bestimmung

$$b = \tfrac{1}{3} v_k, \quad a = \tfrac{9}{8} R T_k v_k.$$

Wie diese Gleichung die tatsächlichen Beobachtungen wiederzugeben vermag, ist wohl am übersichtlichsten und kürzesten durch die Tab. 3 dargestellt, in der die nach van der Waals ausgeführte Berechnung mit der Beobachtung verglichen ist.

Tabelle 3.

Kritische Isotherme des Isopentans berechnet nach van der Waals, $RT_k = 12{,}686$; $a = \frac{9}{8} R T_k v_k = 60{,}912$ cal·cm³; $b = \frac{1}{3} v_k = 0{,}423$ cm³.

v	p cal/cm³		$\frac{\partial p}{\partial v}$ cal/cm⁶		$\frac{pv}{RT_k}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
2,4	2,410	1,5612	− 4,479		0,4559	0,2954
2,5	2,033	1,2902	− 3,141	− 2,243	0,4006	0,2542
2,6	1,767	1,1127	− 2,227	− 1,478	0,3621	0,2281
2,7	1,578	0,9947	− 1,590	− 0,961	0,3358	0,2117
2,8	1,444	0,9206	− 1,141	− 0,613	0,3187	0,2032
2,9	1,346	0,8722	− 0,820	0,408	0,3077	0,1994
3,0	1,276	0,8417	− 0,589	− 0,275	0,3017	0,1990
3,2	1,191	0,8108	− 0,300	− 0,106	0,3004	0,2045
3,4	1,148	0,7994	− 0,146	− 0,035	0,3077	0,2143
3,6	1,127	0,7968	− 0,065	− 0,008	0,3198	0,2261
3,8	1,119	0,7962	− 0,042	− 0,003	0,3352	0,2385
4	1,115	0,7959	0,006	− 0,001	0,3516	0,2510
4,268	1,114	0,7956	− 0,0000	− 0,000	0,3748	0,2678
5	1,111	0,7949	− 0,038	− 0,002	0,4379	0,3133
6	1,080	0,7902	− 0,042	− 0,009	0,5109	0,3737
8	0,977	0,7542	− 0,055	− 0,023	0,6161	0,4757
10	0,870	0,7011	− 0,051	− 0,028	0,6859	0,5527
12	0,7764	0,6457	− 0,036	− 0,026	0,7344	0,6108
15	0,6636	0,5719	− 0,033	− 0,023	0,7845	0,6763
20	0,5306	0,4721	− 0,022	− 0,017	0,8365	0,7443

Daraus ergibt sich: qualitativ ist der Verlauf des Druckes als Funktion von p richtig wiedergegeben, quantitativ aber

nicht; die berechneten Werte von p sind stets erheblich größer als die beobachteten. Damit hängt natürlich auch zusammen, die schon früher[1]) bemerkte Tatsache, daß das Verhältnis $p\,v/R\,T_k$ im kritischen Punkt keineswegs der Beobachtung entspreiht.

Die Lage des Minimums dieses Verhältnisses ergibt die Berechnung bei $v = 3{,}2\,\text{cm}^3$, während es bei Isopentan bei $v = 2{,}95\,\text{cm}^3$ beobachtet ist. Es erfüllt also die Berechnung auch nicht die Bedingung, daß $v_m = 2{,}95\,\text{cm}^3$ ist. Endlich gibt die Berechnung die Lage des Minimums von $\partial p/\partial v$ bei $v = 8\,\text{cm}^3$, während sie bei $v = 10{,}5$ beobachtet ist. Die Waalssche Gleichung gibt also in der Tat zwar die Möglichkeit, die zwei ausgezeichneten Punkte, in denen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

wird, auf die im Abschnitt 1 die Aufmerksamkeit gelenkt ist, zu berücksichtigen, aber gibt nicht ihre Lage richtig wieder.

Es liegt natürlich nahe, die vielseitigen Untersuchungen von Lorentz, Boltzmann, Happel[2]) und neuerdings Holm[3]) zu berücksichtigen, um die Größe b so als Funktion von v so darzustellen, daß auch die zwei neuen ausgezeichneten Punkte der kritischen Isotherme erfüllt werden. Indessen scheint mir bei diesen Bemühungen ein Punkt übersehen zu sein, der ihren Erfolg in Frage stellt.

Nach den kinetischen Vorstellungen, die allen diesen Untersuchungen zugrunde liegen, kommt eine Molekel, welche aus dem Innern eines Gases oder kondensierten Gases sich zur druckempfindenden Wand bewegt, nicht selbst zu dieser Wand, sondern trifft auf ihrer Fahrt auf andere Molekeln, die den Transport der Bewegungsgröße übernehmen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die jedesmaligen Zusammenstöße bizentrale seien, so wird bei jedem Zusammenstoß eine Strecke gleich dem Durchmesser der Molekeln gespart, es tritt also eine „Förderung der Bewegungsgröße" ein und die vom Stoß der Molekel zurückgelegte Strecke erscheint kürzer, als der lineare Abstand von der Wand um die Zahl der Kollisionen

1) C. Dieterici, Wied. Ann. **69.** S. 685—705. 1899.
2) H. Happel, Ann. d. Phys. **21.** S. 342—380. 1906.
3) E. A. Holm, Ann. d. Phys. **51.** S. 768—796. 1916.

multipliziert mit dem Durchmesser der Molekeln bei der gemachten vereinfachenden Annahme von bizentralen Zusammenstößen.

Diese einleuchtende Vorstellung ist aber nur dann richtig, wenn man die Molekeln selbst als vollkommen starr ansieht; das ist aber im Widerspruch mit der Grundanschauung der kinetischen Gastheorie, nach denen die Molekeln als vollkommen elastische Körper angesehen werden. Wenn aber die Molekeln elastische Körper sind, so verläßt die getroffene Molekel ihre bisherige Stelle erst um so viel später, als die Zeit ist, welche der elastische Stoß gebraucht, um sich durch den Körper der Molekeln hindurch um die Strecke ihres Durchmessers fortzupflanzen. Es kann also nur eine Förderung der Bewegungsgröße auftreten, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des elastischen Stoßes in der Molekel größer ist als die translatorische Schwerpunktsgeschwindigkeit. Die Verfolgung dieser Vorstellung ist, wenn überhaupt möglich, jedenfalls nur verfolgbar unter neuen Annahmen über die Geschwindigkeit der Stoßfortpflanzung in der Molekel selbst. Sie würde dahin führen die Waalssche Größe b, in anderer Weise, als es schon Reingamm tat, als Temperaturfunktion aufzufassen und damit die Möglichkeit geben, auch die Waalssche Gleichung in ihren Folgerungen auf den Spannungskoeffizienten $\partial p/\partial T$, die in keiner Weise mit den Beobachtungen sich decken, mit diesen in Einklang zu bringen. Ich verlasse hier die Waalssche Zustandsgleichung, um so mehr als ein zweiter Weg wesentlich weiter führt.

§ 4. Clausius hat die Vorstellung ausgesprochen, daß im Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und gesättigtem Dampf gleichviel Molekeln aus der Flüssigkeit und koexistenten Dampf ein- und austreten, also in der Oberfläche ein fortgesetzter Austausch der „fortschreitenden, schwingenden und drehenden Bewegung" eintritt.

Beschränkt man sich entsprechend der Grundanschauung der kinetischen Gastheorie, daß für den Druck nur die Energie der fortschreitenden Bewegung in Betracht kommt, allein auf diese und dehnt die Clausiusschen Vorstellungen aus auf jeden Zustand, den die Substanz annehmen kann, so wird man unter Annahme, daß für alle Zustände die mittlere lebendige Kraft der Schwerpunktsbewegung proportional RT sei,

auf eine Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v} e^{-\frac{D}{RT}}$$

geführt, worin D die Durchbruchsarbeit zum kohäsionsfreien idealen Gaszustand bedeutet. Diese Gleichung ist heute auf dem Gebiet der Elektronenemission bekannt. Ich habe früher[1]) nachgewiesen, daß, wenn man bei $T = \text{konst.}$

$$\frac{D}{RT} = \frac{a}{v}$$

setzt, und die Waalssche Volumenkorrektion einführt, man durch

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{v}}$$

eine Zustandsgleichung erhält, die dieselben glücklichen Eigenschaften der Kontinuität hat, wie die Waalssche, und daß die Bedingungen des kritischen Doppelpunktes auf

$$b = \tfrac{1}{3} v_k, \quad a = 4b = 2v_k$$

führt.

Inwieweit diese Zustandsgleichungen die kritische Isotherme des Isopentans zu berechnen gestattet, zeigt die folgende Tab. 4.

Die berechneten und die beobachteten Werte des Druckes sind, abgesehen von den kleinsten Volumen, faßt durchgängig in überraschend guter Übereinstimmung. Entsprechend gibt auch pv/RT_k fast überall die Beobachtungen gut wieder. Aber, wie auch in der Tabelle kenntlich gemacht ist, gibt die Berechnung das Volumen v_m, wo pv/RT_k ein Minimum hat, oder wo

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, nicht genau bei dem Volumen $v_m = 2{,}95\,\text{cm}^3$, welches die Beobachtungen verlangen, sondern bei $v = 2{,}80\,\text{cm}^3$; eine zwar kleine, aber doch deutlich erkennbare Differenz. Dagegen zeigt die Tabelle wiederum dasjenige Volumen, wo $\partial p/\partial v$ sein Minimum hat, in Berechnung und Beobachtung gut übereinstimmend bei $v = 10\,\text{cm}^3$.

---

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 5. S. 51—88. 1901. Vgl. auch Künen, Die Zustandsgleichung. Braunschweig 1907.

Tabelle 4.

Kritische Isothermen des Isopentans, berechnet nach $p_k = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{v}}$.

$RT_k = 12{,}686$ cal; $a = 2v_k = 8{,}536$ cm³; $b = \frac{1}{2} v_k = 2{,}134$ cm³.

v	p cal/cm³		$\frac{\partial p}{\partial v}$ cal/cm⁶		$\frac{pv}{RT_k}$		$\frac{p}{v}$ cal/cm⁶	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
2,4	1,361	1,561	– 3,100		0,2575	0,2975	0,567	0,651
2,5	1,125	1,290	– 1,537	– 2,243	0,2217	0,2542	0,450	0,516
2,6	1,022	1,113	– 0,902	– 1,478	0,2095	0,2281	0,303	0,427
2,7	0,9485	0,995	– 0,995	– 0,961	0,2019	0,2117	0,351	0,368
2,8	0,9034	0,921	– 0,371	– 0,613	0,1994	0,2032	0,323	0,329
2,9	0,8734	0,8722	– 0,2532	– 0,408	0,1997	0,1994	0,301	0,301
3,0	0,8505	0,8417	– 0,1675	– 0,275	0,2010	0,1990	0,283	0,281
3,2	0,8258	0,8108	– 0,0859	– 0,106	0,2083	0,2045	0,258	0,253
3,4	0,8140	0,7994	– 0,0423	– 0,035	0,2182	0,2143	0,240	0,235
3,6	0,8071	0,7968	– 0,0186	– 0,008	0,2212	0,2261	0,224	0,222
3,8	0,8056	0,7962	0,0072	– 0,003	0,2413	0,2385	0,212	0,209
4,0	0,8043	0,7959	– 0,0016	– 0,001	0,2536	0,2510	0,201	0,199
4,268	0,8046	0,7956	– 0,0000	– 0,000	0,2707	0,2678	0,188	0,1864
6	0,8028	0,7949	– 0,0092	– 0,002	0,3164	0,3133	0,160	0,159
6	0,7907	0,7902	– 0,0187	– 0,009	0,3740	0,3737	0,132	0,132
8	0,7436	0,7542	– 0,0275	– 0,023	0,4689	0,4757	0,093	0,094
10	0,6869	0,7011	– 0,0290	– 0,028	0,5415	0,5527	0,069	0,070
12	0,6305	0,6457	– 0,0267	– 0,026	0,5964	0,6108	0,053	0,054
15	0,5581	0,5719	– 0,0223	– 0,023	0,6599	0,6763	0,037	0,038
20	0,4631	0,4721	– 0,0161	– 0,017	0,7301	0,7443	0,023	0,024

Man wird also zugeben müssen, daß die mit dieser Zustandsgleichung ausgeführte Berechnung einen unvergleichlich besseren Anschluß an die Beobachtungen gibt als die in Tab. 3 nach der Waalsschen Gleichung angestellte und wird daraus die Berechtigung herleiten müssen, die hier aufgestellte Form der Zustandsgleichung weiter zu verfolgen.

Die Unzulänglichkeit auch dieser Zustandsgleichung tritt aber hervor, wenn man den Spannungskoeffizienten berücksichtigt. Denn durch die für $T = T_k$ eingeführte Hypothese für die Durchbruchsarbeit D ist

$$\frac{D}{RT_k} = \frac{a}{v}$$

gesetzt, eine Hypothese, die der Waalsschen Annahme über den Kohäsionsdruck nachgebildet ist.

Es liegt nahe, mit van der Waals die Durchbruchsarbeit als eine rein mechanische, von T unabhängige Größe aufzufassen, also allgemein

$$\frac{D}{RT} = \frac{a}{vT}$$

und damit

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{vT}}$$

anzunehmen. Damit folgt aber sofort, sofern man nur b als unabhängig von T betrachtet, gleichgültig ob und welche Funktion b von v ist,

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} + p\frac{a}{vT^2}$$

und

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{1}{p}\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) = \frac{a}{vT}$$

oder bei $T = c$ müßte die Größe

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$$

mit der Dichte kontinuierlich zunehmen. In Tab. 1 ist aber diese Größe berechnet und schon von vorn darauf hingewiesen, daß zwar die thermodynamische Größe $\partial U/\partial v$ ähnlich verläuft, wie p selbst, daß aber das Verhältnis

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$$

ein ausgeprägtes Maximum bei $v = 2{,}6\,\mathrm{cm}^3$ zeigt. Daher läßt sich also nicht die Größe

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$$

durch eine einfache mit v kontinuierliche abnehmende Funktion darstellen.

§ 5. Durch den Übergang auf den Spannungskoeffizienten und die zusammenhängende Änderung der Gesamtenergie U mit dem Volumen ist aber auch sofort dargetan, daß weder die van der Waalssche noch die von mir auf Grund der Clausiusschen Vorstellungen aufgestellte Zustandsgleichung den Bedingungen des Problems genügen können, denn beide Zustandsgleichungen halten den Grundsatz der kinetischen Gastheorie fest, daß nur die lebendige Kraft der Schwerpunkts-

bewegung der Molekeln für den Druck entscheidend ist, wenn diese auch durch Berücksichtigung der Raumanfüllung und der Kohäsion gegenüber dem idealen Gasdruck verändert ist, daß aber die innere Energie keinen Anteil an dem kinetischen Druck hat. Da aber die mit U bezeichnete thermodynamische Energie in kinetischer Deutung die Energie der gesamten Bewegungszustände umfaßt, also neben der Energie der fortschreitenden Bewegung auch die der „drehenden und schwingenden" nach Clausius, die in neuerer Zeit als schwingende allein angesehen wird, so muß auch in den Ausdruck für p, also in die Zustandsgleichung, ein Ausdruck aufgenommen werden, der einen Umsatz dieser Bewegungen Rechnung trägt. Gelingt es, durch einen solchen Schritt die endgültige Form der Zustandsgleichung zu finden, so ist damit auch zugleich die thermodynamische Energie U als Funktion von T und v dargestellt, und damit ist gesagt, daß der tiefere Sinn des Problems der Zustandsgleichung darin liegt, durch eine kinetische Vorstellung die Energiefunktion in ihrer Abhängigkeit von T und v darzustellen.

Daß die inneren Bewegungen sich in äußere Arbeit umsetzen können, wissen wir aus den adiabaten Vorgängen idealer Gase, wenn auch bisher die Ausbildung der kinetischen Gastheorie auf Arbeitsprozesse noch fehlt und sich daher die Mechanik des Umsatzes innerer Energie in translatorische nicht übersehen läßt. Es liegt aber im Sinne der Clausiusschen Vorstellungen die Annahme nahe, daß die „befähigten" Molekeln, welche aus dem Innern an die Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf kommen, mit genügend großer lebendiger Kraft, um die Kohäsion zu überwinden, im dichteren Zustand einen anderen Energiebetrag an drehenden und schwingenden Bewegungen haben als im weniger dichten und daß sich die Energiedifferenz in kinetischen Druck umsetzt.

Ich habe versucht, diese Vorstellungen durch den Ansatz

$$p = \frac{RT}{v} x e^{-y} \quad \text{oder} \quad \ln \frac{pv}{RT} = \ln x - y$$

zum Ausdruck zu bringen, worin x und y zwei nach den Beobachtungen zu bestimmende Funktionen von T und v sind. Aber obgleich man in der kritischen Isotherme, die die ausgezeichneten Punkte des Minimums von pv, den kritischen

Doppelpunkt und den zweiten Punkt, in dem

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

ist, zur Verfügung hat, ferner auch die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{p v}{R T} = \frac{1}{R T}\left(v \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{1}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}(\ln x - y)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{p v}{R T} = \frac{1}{p T} \cdot \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial T}(\ln x - y)$$

in ihrem ganzen Verlauf nach den Beobachtungen angebbar sind, ist es mir nicht gelungen, in den beiden Funktionen x und y den Umsatz innerer Energie in translatorische zum Ausdruck zu bringen.

Auch der Versuch, durch Hinzufügen einer weiteren Funktion von v durch

$$p = \frac{R T}{v}[x e^{-y} + \varphi(v)]$$

den Umsatz innerer Energie zum Ausdruck zu bringen, schlug fehl, so daß ich mich damit begnügen muß, darauf hinzuweisen, daß ein grundsätzlicher Fortschritt in der Lösung des Problems der Zustandsgleichung nicht durch weiteren Ausbau der Waalsschen Raumkorrektion erzielt werden kann, sondern nur, indem man den bisher in der kinetischen Gastheorie festgehaltenen Grundsatz, daß nur die lebendige Kraft der translatorischen Bewegung für den Druck bestimmend sei, dahin erweitert, daß auch ein Umsatz von innerer Energie in Arbeitsenergie, auch bei isothermen Vorgängen, angenommen wird.

§ 6. Für die Verfolgung dieses Gedankens ist die Frage von wesentlicher Bedeutung, was unter der inneren Verdampfungswärme

$$\varrho = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial U}{\partial v} d v = \left(T \frac{d p_s}{d T} - p_s\right)(v_2 - v_1)$$

in kinetischer Deutung zu verstehen ist. Hr. W. Voigt hat zuerst die Deutung ausgesprochen, daß die Durchbruchsarbeit D, welche in der Gleichung

$$p = \frac{R T}{v - b} e^{-\frac{D}{R T}}$$

auftritt, gleich der inneren Verdampfungswärme ϱ sein müsse, so daß auf die Sättigungszustände angewendet

$$D = \varrho = R T \ln \frac{v_2 - b}{v_1 - b}$$

folgt, wobei wiederum die Waalssche Raumkorrektion als konstant angenommen ist. Ich habe dann durch empirische Berechnung nachgewiesen[1]), daß man die Raumkorrektion entbehren und

$$\varrho = c R T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

setzen kann, worin c ein Faktor ist, der für alle Substanzen, die S. Young als normale bezeichnet, einen nahezu gleichen Wert hat, der durch die kritischen Daten durch

$$c = \frac{1}{R T_k}\left(T_k \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_k - p_k\right) v_k = 2 - \left(\frac{p v}{R T}\right)_k$$

bestimmt ist und weil alle „normalen" Substanzen nach Young den fast gleichen Wert für das Verhältnis des idealen zur tatsächlichen Volumen im kritischen Punkt

$$\frac{R T_k}{p_k v_k} = 3{,}75$$

zeigen, findet sich auch der Faktor c nahezu konstant für alle solche Stoffe.

Es ist mir aber nicht gelungen, die innere Verdampfungswärme so in zwei Teile zu zerlegen, daß der eine die Kohäsionsarbeit, der andere die Änderung der totalen Bewegungsenergie der Molekeln darstellt.

Bei diesen vielfältigen Berechnungen bin ich aber auf eine Beziehung gestoßen, die allgemeine Bedeutung hat und deshalb der Mitteilung wert erscheint.

Bildet man die Differenz der Arbeit, welche eine Substanz im idealen Gaszustand zwischen den beiden Sättigungsvolumen leisten könnte:

$$A_{id} = R T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

und der tatsächlichen äußeren Arbeit:

$$A_a = p_s (v_2 - v_1),$$

so ergibt sich, daß diese Differenz, die im $p v$-Blatt eine leicht verständliche Bedeutung hat, dargestellt werden kann durch

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. **25.** S. 569—585. 1908 u. Ann. d. Phys. **35.** S. 220—242. 1911.

$$A_{id} - A_s = (a - R\,T\,v_k)\,(s_1 - s_2),$$

worin s_1 und s_2 die Sättigungsdichten bezeichnet und a eine Konstante ist, die wiederum durch den Faktor c der inneren Verdampfungswärme bestimmt ist, durch

$$a = c\,R\,T_k\,v_k.$$

In den folgenden Tab. 5 und 6 ist für Isopentan und Kohlensäure die Berechnung mit Hilfe der Sättigungsdaten ausgeführt.

Verfolgt man in Tab. 5 den Gang der „idealen" Sättigungsarbeit

$$A_{id} = R\,T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

für Isopentan und den der tatsächlichen $A_s = p_s\,(v_2 - v_1)$, so sieht man, daß die erstere kontinuierlich mit abnehmenden T wächst, die zweite aber ein deutlich ausgeprägtes Maximum hat. Trotzdem ist die Differenz mit überraschender Schärfe

Tabelle 5.

Isopentan; $M = 72{,}10$.

$T_k = 460{,}8$ °C; $R = 0{,}02753$ cal/°C; $R\,T_k = 12{,}686$ cal; $v_k = 4{,}268$ cm³; $\frac{R\,T_k}{p_k\,v_k} = 3{,}735$; $a = 93{,}79$ cal/cm³.

T	p_s cal/cm³	v_2	v_1	A_s	A_{id}	$A_{id} - A_s$	$(a - R\,T\,v_k)\,(s_1 - s_2)$
460,8	0,7956	4,268	4,268	0	0	0	0
458	0,7637	6,355	3,183	2,423	8,72	6,30	6,27
453	0,7086	7,95	2,858	3,608	12,76	9,15	9,09
443	0,6078	10,71	2,555	4,956	17,48	12,52	12,44
433	0,5184	13,72	2,378	5,879	20,89	15,01	14,92
423	0,4394	17,14	2,250	6,542	23,64	17,10	17,03
413	0,3699	21,15	2,153	7,027	25,98	18,95	18,87
403	0,3090	26,10	2,072	7,425	28,11	20,68	20,63
393	0,2559	32,20	2,0037	7,727	30,04	22,31	22,28
383	0,2100	39,80	1,9455	7,949	31,82	23,87	23,86
373	0,1704	49,5	1,8940	8,112	33,51	25,40	25,38
363	0,1367	61,7	1,8475	8,181	35,06	26,88	26,85
353	0,1082	77,7	1,8055	8,212	36,56	28,35	28,31
343	0,08444	98,7	1,7679	8,185	37,98	29,80	29,71
333	0,06479	127,6	1,7329	8,155	39,41	31,25	31,09
323	0,04877	67,9	1,7005	8,105	40,84	32,74	32,50
313	0,0360	24,4	1,6700	8,018	42,24	34,22	33,89
303	0,02595	306,2	1,6413	7,905	43,61	35,70	35,26
293	0,01821	426,6	1,6141	7,747	44,18	36,43	36,65
283	0,01243	606,0	1,5885	7,514	46,31	38,80	38,01

Tabelle 6.

Kohlensäure; CO_2[1]) $M = 44$.

$T_k = 304{,}35$; $R = 0{,}04518$ cal/°C; $v_k = 2{,}155$ cm³; $\frac{RT_k}{p_k v_k} = 3{,}620$;

$a = 51{,}08$ cal/cm³.

T	p_s cal/cm³	v_2 cm³	v_1 cm³	A_s	A_{1s}	$A_{1s} - A_s$	$\frac{(a - RTv_k)}{(s_1 - s_2)}$
304,35	1,7635	2,155	2,155	0	0	0	0
304	1,7103	2,994	1,672	2,261	7,979	5,718	5,663
298	1,5313	4,167	1,422	4,203	14,473	10,473	10,218
293	1,3619	5,262	1,308	5,385	18,425	13,040	12,946
288	1,2095	6,329	1,228	6,170	21,336	15,166	15,213
283	1,0692	7,518	1,168	6,789	23,806	17,017	17,011
273	0,8329	10,42	1,095	7,767	27,790	20,023	20,017
263	0,6474	13,70	1,042	8,196	30,608	22,412	22,574
253	0,4820	18,87	1,000	8,613	33,578	24,965	25,04
248	0,4140	23,10	0,983	9,157	35,360	26,203	26,21

gleich $(a - RTv_k)(s_1 - s_2)$, einem Ausdruck, in dem die auftretenden Konstanten allein durch die kritischen Daten bestimmt sind.

Auch Kohlensäure zeigt eine vollkommene Übereinstimmung in dem Temperaturbereich, für den Beobachtungen vorliegen.

Auch an anderen normalen Stoffen, wie Benzol, Methylformiat und anderen, für welche das Beobachtungsmaterial in Youngs umfangreichen Tabellen vorliegt, bestätigt sich die aufgestellte Beziehung, bei anomalen Stoffen, wie Wasser und Äthylalkohol zeigen sich allerdings Abweichungen.

Man hat also in der aufgestellten Beziehung eine ähnliche aus den Beobachtungen abgelesene empirische Tatsache, wie die für die innere Verdampfungswärme $\varrho = c\,RT \ln \frac{v_2}{v_1}$ schon früher ermittelte.

Alle meine Versuche, diese Beobachtungstatsachen im Sinne eines Umsatzes von innerer Energie in Arbeitsenergie in die kinetische Gastheorie einzuführen und sie damit für die notwendige Erweiterung der Zustandsgleichung fruchtbar zu machen, haben aber nicht zu einem Resultat geführt, welches ich der Mitteilung für wert erachte.

Kiel, Oktober 1919.

1) Sättigungsdaten nach Landolt-Börnsteinschen Tabellen.

(Eingegangen 28. November 1919.)

4. *Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie;* von *A. Sommerfeld.*

Hr. Weyl hat dieses von mir vor zehn Jahren behandelte Problem einer Neubearbeitung unterzogen und dabei *in methodischer Hinsicht* erfreuliche Fortschritte erreicht, wie bei einem Mathematiker vom Range des Hrn. Weyl selbstverständlich ist. So gelten die Näherungen Weyls für den ganzen Halbraum $z > 0$ (Luft), während ich mich auf die nächste Umgebung der Trennungsfläche $z = 0$ (Luft gegen Erde) beschränkt habe. Auch die von Weyl betonte (von mir übrigens ebenfalls ins Auge gefaßte) Darstellung meiner Lösung als eines komplexen Doppelintegrales (an Stelle eines komplexen, einfachen Integrales mit Besselschen Funktionen) leuchtet ein. Ob der Weylsche Weg zur Diskussion meiner Lösung schließlich bequemer ist als der meinige, läßt sich objektiv kaum beurteilen und hängt von der Denkgewöhnung ab; daß er eine Verschärfung der Fehlerabschätzung bedeutet, ist sicher.

Dagegen glaube ich, für solche Leser, welche sich auf den verschlungenen Pfaden komplexer Integration, zumal denjenigen der Weylschen komplexen Doppelintegrale, nicht mühelos zurechtfinden — und das dürfte bei den Interessenten der drahtlosen Telegraphie die Mehrzahl sein — feststellen zu sollen, daß die Weylsche Behandlung *in sachlicher Hinsicht* und *für praktische Zwecke* nichts Neues bietet. Die Weylsche Schlußformel (23) für $z = 0$ ist mit meinen Formeln (47) und (55) bis auf die abgeänderten Bezeichnungen völlig identisch. Ebenso stimmen seine Reihenentwicklungen von S. 498 mit meinen Reihen (54) und (42) nach auf- und absteigenden Potenzen der numerischen Entfernung genau überein. Unter diesen Umständen ist mir die von Hrn. Weyl an meinen Resultaten geübte Kritik nicht recht verständlich. Wenn Hr. Weyl als Raumwellen nur solche Wellen definiert, deren Energie wie $1/r^2$ abnimmt, so ist seine Zerlegung auf S. 500 von der meinigen natürlich verschieden. Ich definierte als „Raumwellen“

solche Wellen, deren Energie wie $1/r^3$ und stärker, als „Oberflächenwellen" solche, deren Energie wie $1/r$ abnimmt (Zylinder statt Kugel als Wellenfläche). Ich glaube, daß man dieser Definition ebensoviel oder ebensowenig „sachliche Berechtigung zuerkennen" muß, wie der Weylschen. Das interessante Resultat meiner Arbeit war doch, daß die von Uller und Zenneck früher beschriebenen elektromagnetischen Wellen sich aus der Strahlung eines Dipols heraus von selbst entwickeln und sich hier als Oberflächenwellen erweisen, weil die Energie, abgesehen von der exponentiellen Dämpfung, wie $1/r$ abnimmt. Daß diese Wellen bei mir aus dem Gesamtvorgang durch bloße Residuenbildung isoliert werden konnten (mein Pol $\lambda = s$ ist identisch mit dem Weylschen Pole $\gamma = ta$), war besonders befriedigend. Auch die „Nebenwellen" des Hrn. Weyl kommen bei mir als „Raumwellen Q_2" [Gl. (34)] vor; daß sie belanglos sind, ist auch aus meiner Darstellung unmittelbar ersichtlich. Wenn Hr. Weyl am Ende von § 2 „keine Andeutung für die Trennung des Vorganges in Raum- und Oberflächenwellen" findet, so steht auch das nicht in Widerspruch mit meinen Resultaten, da Hr. Weyl hier stillschweigend den Fall großer numerischer Entfernung voraussetzt, in welchem die Oberflächenwellen exponentiell abgedämpft sind und in der asymptotischen Darstellung von Weyl naturgemäß nicht mehr vorkommen. Die dann allein übrigbleibenden Raumwellen andererseits lauten für die Nähe der Trennungsfläche bei Weyl und mir wieder vollkommen gleich.

Die von mir als „numerische Entfernung" bezeichnete und in ihrer prinzipiellen Bedeutung herausgearbeitete Größe kommt bei Hrn. Weyl anhangweise als rechnerische Abkürzung $r_1 = r/|n^2|$ vor. Daß aber in der Einführung dieser Abkürzung das *Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie* liegt und daß die Verhältnisse für kleine und große numerische Entfernung sich ganz verschieden gestalten, trotzdem sie sich in eine einheitliche Formel, bei mir Gl. (55), bei Weyl Gl. (23), zusammenfassen lassen, wird dem Leser der Weylschen Abhandlung kaum zum Bewußtsein kommen.

(Eingegangen 7. Januar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur [illegible]

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, [illegible]

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationszwecken und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P. — System [illegible], D.R.P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neu konstruierte nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen.

Trockene Schieber-luftpumpen.

Quecksilberluftpumpen aller Systeme.

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 cm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrations-schaltung.

Alle Hilfsapparate.

Lieferung nach Vereinbarung.

Inhalt.

Seite

1. Moritz Auras Schirmann. Zur Theorie der Doppelgitter. I. (Ein elektrostatisches Problem.) 97
2. Karl F. Lindman. Zur Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität 107
3. W. Schottky. Thermodynamik der salzarmen Zustände im Dampfraum. (Thermische Ionisierung und thermisches Leuchten.) I. Teil 113
4. Otto Schaefer. Die Schwingungen biegungsgeteilter Saiten . 156
5. J. Traube. Über Balloelektrizität, Molekularkräfte und elektrische Kräfte 165
6. Erich Rumpf. Über die Polarisation in der Geißlerentladung 173

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herausgegeben. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 6.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in der Korrektur der beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls zusätzliche mehr gewünscht werden, so muß die bei Rücksendung der ersten Korrekturbogen an die Druckerei auf denen erste Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben bezw. auch der geschützten Schriftzüge ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung der Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in den Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren setzen möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskripts recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bücher sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskripts selbst kurzen Text selbst und zwar vollständig in der in den Publikationen der Physik üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Stadt, Bandes und Jahreszahl einzuführen.

1920. № 10.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Zur Theorie der Doppelgitter. I. (Ein elektrostatisches Problem);* von *Marie Anna Schirmann.*

1. Problemstellung.

In neuester Zeit gelangen für Verstärkerzwecke Hochvakuumröhren mit Doppelgitter mit Vorteil zur Verwendung. Das elektrische Verhalten dieser Elektronenröhren steht in engster Beziehung zu einer bloß von den Elektrodendimensionen abhängigen, in der Röhrendynamik meist „*Durchgriff*" genannten Konstanten. Diese gibt an, in welchem Maße bei gegebener Spannung die Anode durch die Gitter hindurch, im Vergleich mit dem Steuergitter, zu dem auf der Kathode mündenden Kraftflusse beiträgt. Sie ist für einige ganz einfache Elektrodenanordnungen von J. Cl. Maxwell[1]), M. Abraham[2]) und M. v. Laue[3]) berechnet worden.

Im folgenden soll der Durchgriff für eine gewisse Anordnung der Elektroden in Doppelgitterröhren (die sogenannte Zylinderanordnung) berechnet werden. Das Schema dafür ist in Fig. 1 angegeben: Als *Kathode* (K) dient ein Draht von kreisförmigem Querschnitt (Radius k), als *Anode* (A) ein konzentrischer Kreiszylinder (Radius b); zwischen ihnen befinden sich zwei *Gitter* (G_1) und (G_2), jedes bestehend aus n gleichen Drähten (Radius c), deren äquidistante Mittelpunkte $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1 \ldots n-1$) auf ebenfalls konzentrischen Zylindern vom Radius a_1 und a_2 liegen, und zwar so, daß a_1 größer als a_2 ist.

2. Mathematische Formulierung.

Das vorliegende Problem ist ein Sonderfall des Vierleiterproblems der Elektrostatik. Die zu den Leitern A, G_1, G_2, K gehörigen Potentiale sind V_1, V_2, V_3, V_4, die Ladungen

1) J. Cl. Maxwell, Treatise I, § 203—206.
2) M. Abraham, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 1919. S. 13.
3) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 59. S. 465. 1919.

pro Längeneinheit e_1, e_2, e_3, e_4. Da die Gesamtladung des Systems gleich Null ist:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0, \tag{1}$$

so sind von den vier Ladungen nur drei voneinander unabhängig. Andererseits sind von den sechs Spannungen zwischen

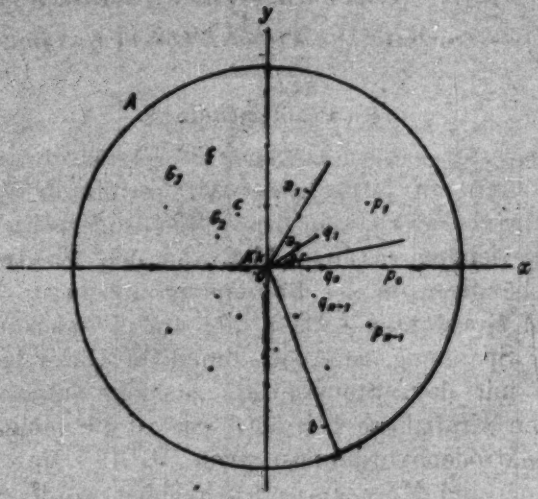


Fig. 1.

den Leitern

$$\{V_1 - V_2,\ V_1 - V_3,\ V_1 - V_4,\ V_2 - V_3,\ V_2 - V_4,\ V_3 - V_4\}$$

nur drei unabhängig vorzugeben. Es sind also die Beziehungen zwischen Ladungen und Spannungen vollständig charakterisiert durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} e_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) + C_{14}(V_1 - V_4), \\ e_3 = C_{13}(V_3 - V_1) + C_{23}(V_3 - V_2) + C_{34}(V_3 - V_4), \\ e_4 = C_{14}(V_4 - V_1) + C_{24}(V_4 - V_2) + C_{34}(V_4 - V_3). \end{cases} \tag{2}$$

Die gestellte Aufgabe geht dahin, von den sechs *Kapazitätskoeffizienten*[1])

$$\left.\begin{matrix} C_{12},\ C_{13},\ C_{14} \\ C_{23},\ C_{24} \\ C_{34} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{die drei in der letzten Kolonne} \\ \text{angeschriebenen als Funktionen} \\ \text{von } (a_1,\ a_2,\ b,\ c,\ k,\ n) \end{matrix}$$

zu bestimmen. Setzt man

1) Auch *wechselseitige* (elektrostatische) *Induktionskoeffizienten* genannt.

$$(3) \qquad a_1 = \frac{C_{14}}{C_{34}}, \quad a_2 = \frac{C_{24}}{C_{34}},$$

so kann man die letzte der Gleichungen (2) schreiben:

$$(4) \qquad -e_4 = C_{34}\{a_1 a_2 (V_1 - V_4) + a_2 (V_2 - V_4) + (V_3 - V_4)\}.$$

Hier bedeuten $-e_4$ den Betrag der Ladung der Kathode, $V_1 - V_4$, $V_2 - V_4$ und $V_3 - V_4$ die Spannungen von Anode, erstem und zweitem Gitter gegen die Kathode. Die Zahl a_1 bzw. a_2 gibt an, in welchem Maße die Anodenspannung durch das erste bzw. dann durch das zweite Gitter „hindurchgreift". Der Durchgriff durch das Doppelgitter ist gleich dem Produkt aus den Durchgriffen durch G_1 und dann durch das G_2

$$D = D_1 D_2,$$

und da

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = a_2,$$

so wird

$$D = a = \frac{C_{14}}{C_{24}} \cdot \frac{C_{24}}{C_{34}} = \frac{C_{14}}{C_{34}}.$$

3. Lösung.

Es seien (Fig. 2) R, Θ Polarkoordinaten in der XY-Ebene. In dem Ursprung O und in den Punkten $P(A_1)$ und $Q(A_2)$ der X-Achse $(A_1 > A_2)$ wird die XY-Ebene senkrecht von elektrisch, mit den Liniendichten λ', λ_1 und λ_2 geladenen Linien durchstochen. Dann ist das elektrostatische Potential im Aufpunkt T:

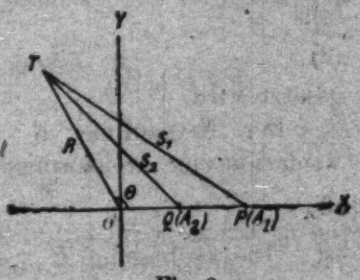


Fig. 2.

$$(5) \qquad \begin{cases} V = -2\lambda_1 \log S_1 - 2\lambda_2 \log S_2 \\ \qquad\quad - 2\lambda' \log R + C, \end{cases}$$

mit

$$(6) \qquad \begin{cases} S_1 = \sqrt{A_1^2 - 2A_1 R\cos\Theta + R^2} \\ S_2 = \sqrt{A_2^2 - 2A_2 R\cos\Theta + R^2}. \end{cases}$$

In Entfernungen $R \gg A_1$ von O wird $S_1 = S_2 = R$ und

$$V = -2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda') \log R;$$

also gehen die Niveaulinien im Kreise um O über. Einer von ihnen vom Radius $B \gg A_1$ soll als Durchschnitt eines das

System abschließenden Kreiszylinders gedacht werden, welcher innen die Ladung $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')$ pro Längeneinheit trägt.

Nun werde durch die Beziehung:

$$X + i\,Y = (x + i\,y)^n \tag{7}$$

die $X\,Y$-Ebene konform auf die $x\,y$-Ebene abgebildet; sind r, ϑ Polarkoordinaten in der letzteren, so ergibt (7):

$$R e^{\Theta i} = r^n \cdot e^{n\vartheta i}, \tag{7a}$$

mithin

$$R = r^n, \quad \Theta = n\,\vartheta. \tag{7b}$$

Dem Ursprung ($R = 0$) der $X\,Y$-Ebene entspricht somit der Ursprung ($r = 0$) der $x\,y$-Ebene. Dem Punkt P in Fig. 2 mit den Polarkoordinaten $R = A_1$, $\Theta = 2\pi\varkappa$ ($\varkappa$ ganzzahlig) entsprechen in Fig. 1 die n Gitterpunkte $p_\varkappa$ mit den Koordinaten

$$r = a_1, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1 \ldots n-1)$$

dem Punkte Q in Fig. 2 mit den Polarkoordinaten $R = A_2$, $\Theta = 2\pi\varkappa$ ($\varkappa$ ganzzahlig) entsprechen in Fig. 1 die n Gitterpunkte $q_\varkappa$ mit den Koordinaten

$$r = a_2, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1 \ldots n-1)$$

falls

$$A_1 = a_1^n \quad A_2 = a_2^n \tag{8}$$

gesetzt wird.

Der Niveaulinie $R = B$ entspricht in der $x\,y$-Ebene wiederum eine kreisförmige Niveaulinie $r = b$, wobei

$$B = b^n \tag{8a}$$

ist. Die Bedingung $B \gg A_1$ läßt sich schreiben:

$$\left(\frac{a_1}{b}\right)^n \ll 1. \tag{8b}$$

Diese ist z. B. mit genügender Genauigkeit erfüllt, wenn $b = 7/4\,a_1$, und $n = 10$ ist; dann ist der Fehler nur von der Ordnung 10^{-3}, wenn man den Durchschnitt des Anodenzylinders, der in Fig. 1 das Feld abschließt, als Niveaulinie des Potentials (5) betrachtet. Das Potential (5) entspricht nämlich nach der Theorie der konjugierten Funktionen in der $x\,y$-Ebene einem zweidimensionalen Felde, mit einer Punkt-

ladung $n\lambda'$ in O, n Punktladungen, je mit der Ladung λ_1, in den n Gitterpunkten $p_\varkappa$ und n Punktladungen λ_2 in den n Gitterpunkten $q_\varkappa$. Sein analytischer Ausdruck folgt aus (7b) und (8):

$$V = -2\lambda_1 \log S_1 - 2\lambda_2 \log S_2 - 2n\lambda' \log r + C \tag{9}$$

mit

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{a_1^{2n} - 2a_1^n r^n \cos n\vartheta + r^{2n}}, \\ S_2 = \sqrt{a_2^{2n} - 2a_2^n r^n \cos n\vartheta + r^{2n}}. \end{cases} \tag{9a}$$

Zwar bezieht sich das vorliegende Vierleiterproblem nicht auf geladene Linien durch O, $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$, sondern auf leitende Drähte von kleinem, aber endlichem kreisförmigen Querschnitt. Doch ist bekannt, daß in der Nähe der geladenen Punkte O, $p_\varkappa$, $q_\varkappa$ die Niveaulinien des ebenen Potentiales in Kreise übergehen, so daß man, falls die Radien k, c der Drähte klein gegen deren Abstände sind, die Begrenzung ihrer Querschnitte als Niveaulinien ansehen kann. Das Potential (9) führt dann durch Einführung der Grenzbedingungen zur angenäherten Lösung des gestellten Problems.

Für $r^n \ll a_2^n$ ergibt (9a) $S_1 = a_1^n$, $S_2 = a_2^n$; also wird

$$V = -2n\lambda_1 \log a_1 - 2n\lambda_2 \log a_2 - 2n\lambda' \log r + C.$$

Somit ist auf der Oberfläche der *Kathode* K, wo $r = k$, das *Potential*

$$V_4 = -2n\lambda_1 \log a_1 - 2n\lambda_2 \log a_2 - 2n\lambda' \log k + C, \tag{10}$$

falls

$$\left(\frac{k}{a_2}\right)^n \ll 1. \tag{10a}$$

Auch zeigt es sich, daß das Potential (9) konstant ist auf Kreisen vom Radius c um die Gitterpunkte $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$, wofern

$$\frac{nc}{a_2} \ll 1. \tag{10b}$$

Dann wird für die Punkte[1]) auf der Oberfläche des ersten Gitters (G_1)

$$r^{(1)} = a_1 \pm c, \quad \vartheta = \frac{2\pi\varkappa}{n}$$

1) Die eingeklammerten oberen Indizes bezeichnen den Ort (1. oder 2. Gitter), an welchem die Größen gelten.

CORNELL UNIVERSITY LIBRARY

und für die Punkte auf der Oberfläche des zweiten Gitters (G_2)

$$r^{(2)} = a_2 \pm c, \quad \vartheta = \frac{2\pi\varkappa}{n},$$

wo die Radienvektoren $o\,p_\varkappa$ bzw. $o\,q_\varkappa$ jene Kreise schneiden gemäß (9a):

$$(11)\quad \begin{cases} S_1^{(1)} = \left| a_1^n - r^{(1)n} \right| = a_1^n \left| 1 - \left(1 \pm \frac{c}{a_1}\right)^n \right| = a_1^n \left(\frac{nc}{a_1}\right), \\ S_2^{(1)} = \left| a_2^n - r^{(1)n} \right| = a_1^n \left| \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n - \left(1 \pm \frac{c}{a_1}\right)^n \right| \\ \qquad = a_1^n \left[1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n \right] = a_1^n e^{-n\delta_1}, \\ S_1^{(2)} = \left| a_1^n - r^{(2)n} \right| = a_2^n \left| \left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \left(1 \pm \frac{c}{a_2}\right)^n \right| \\ \qquad = a_2^n \left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n - 1 \right] = a_2^n e^{-n\delta_2}, \\ S_2^{(2)} = \left| a_2^n - r^{(2)n} \right| = a_2^n \left| 1 - \left(1 \pm \frac{c}{a_2}\right)^n \right| = a_2^n \left(\frac{nc}{a_2}\right), \end{cases}$$

mithin

$$(11a)\quad \begin{cases} \log S_1^{(1)} = n\,(\log a_1 - \gamma_1) \\ \log S_2^{(1)} = n\,(\log a_1 - \delta_1) \\ \log S_1^{(2)} = n\,(\log a_2 - \delta_2) \\ \log S_2^{(2)} = n\,(\log a_2 - \gamma_2), \end{cases}$$

wobei

$$(11b)\quad \begin{cases} \gamma_1 = -\frac{1}{n} \log \frac{nc}{a_1}, \\ \gamma_2 = -\frac{1}{n} \log \frac{nc}{a_2}, \\ \delta_1 = -\frac{1}{n} \log \left[1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n \right], \\ \delta_2 = -\frac{1}{n} \log \left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n - 1 \right]. \end{cases}$$

Gleichung (9) ergibt somit die Potentiale auf den Gittern; und zwar das *Potential auf dem Gitter* G_1:

$$12)\quad \begin{aligned} V_2 &= -2\lambda_1 \log S_1^{(1)} - 2\lambda_2 \log S_2^{(1)} - 2n\lambda' \log a_1 + C, \\ V_2 &= -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda') \log a_1 + 2n\lambda_1\gamma_1 + 2n\lambda_2\delta_1 + C, \end{aligned}$$

das *Potential auf dem Gitter* G_2:

$$13)\quad \begin{aligned} V_3 &= -2\lambda_1 \log S_1^{(2)} - 2\lambda_2 \log S_2^{(2)} - 2n\lambda' \log a_2 + C, \\ V_3 &= -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda') \log a_2 + 2n\lambda_2\gamma_2 + 2n\lambda_1\delta_2 + C. \end{aligned}$$

Schließlich wird auf der *Anode* $r = b$, unter der Bedingung (8 b), $S_1 = S_2 = b^n$, mithin das *Potential*

$$V_1 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log b + C. \tag{14}$$

Zusammenstellung der *Potentiale*:

Auf

$A \ldots V_1 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log b + C,$

$G_1 \ldots V_2 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log a_1 + 2n\lambda_1\gamma_1 + 2n\lambda_2\delta_1 + C,$

$G_2 \ldots V_3 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log a_2 + 2n\lambda_2\gamma_2 + 2n\lambda_1\delta_2 + C,$

$K \ldots V_4 = -2n\lambda_1\log a_1 - 2n\lambda_2\log a_2 - 2n\lambda'\log k + C.$

Zusammenstellung der *Ladungen auf den Leitern*:

Auf

$$A \ldots e_1 = -n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda'), \tag{15}$$

$$G_1 \ldots e_2 = n\lambda_1, \tag{16}$$

$$G_2 \ldots e_3 = n\lambda_2, \tag{17}$$

$$K \ldots e_4 = n\lambda'. \tag{18}$$

Somit ergeben sich aus (10), (12), (13), (14) folgende Ausdrücke für die *Spannungen zwischen den Leitern*:

$$\left\{\begin{aligned}
V_1 - V_2 &= 2e_1\left[\log\left(\frac{b}{a_1}\right) + \gamma_1\right] + 2e_3(\gamma_1 - \delta_1) + 2e_4\gamma_1,\\
V_1 - V_3 &= 2e_1\left[\log\left(\frac{b}{a_2}\right) + \delta_2\right] - 2e_3(\gamma_2 - \delta_2) + 2e_4\delta_2,\\
V_1 - V_4 &= 2e_1\log\left(\frac{b}{a_1}\right) + 2e_3\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - 2e_4\log\left(\frac{a_1}{k}\right),\\
V_2 - V_3 &= -2e_1\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_1 - \delta_2\right] - 2e_3(\gamma_1 + \gamma_2 - \delta_1 - \delta_2)\\
&\qquad - 2e_4(\gamma_1 - \delta_2),\\
V_2 - V_4 &= -2e_1\gamma_1 + 2e_3\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \gamma_1 + \delta_1\right]\\
&\qquad - 2e_4\left[\log\left(\frac{a_1}{k}\right) + \gamma_1\right],\\
V_3 - V_4 &= 2e_1\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \delta_2\right] + 2e_3\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2 - \delta_2\right]\\
&\qquad - 2e_4\left[\log\left(\frac{a_1}{k}\right) + \delta_2\right].
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Indem man aus der 3., 5. und 6. dieser Gleichungen e_1 und e_3 eliminiert, erhält man eine Gleichung nach dem Schema der 3. Gleichung von (2) mit

$$(19a)\quad C_{14} = \frac{8\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left\{\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\delta_2 - \delta_1 - \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right] - (\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)\right\}}{N(a_1, a_2, b, c, k, n)},$$

$$19b)\quad C_{24} = \frac{8\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left\{\log^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2\right] - \delta_2\log\left(\frac{a_2}{b}\right)\right\}}{N(a_1, a_2, b, c, k, n)},$$

$$(19c)\quad C_{34} = \frac{8\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left\{\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \delta_1\right] + \gamma_1\log\left(\frac{a_2}{b}\right)\right\}}{N(a_1, a_2, b, c, k, n)},$$

wobei N eine ganz bestimmte Funktion von (a_1, a_2, b, c, k, n) ist. Durch (19a, b, c) und (11b) ist das gestellte Problem gelöst, nämlich die zur Berechnung der durch (8) definierten „Durchgriffe" erforderlichen Kapazitätskoeffizienten des Vierleitersystems durch dessen geometrische Bestimmungsstücke auszudrücken.

Der Durchgriff durch das erste bzw. dann durch das zweite Gitter ist demnach:

$$(20)\quad \begin{cases} D_1 = \alpha_1 = \dfrac{\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\delta_2 - \delta_1 - \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right] - (\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)}{\log^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2\right] - \delta_2\log\left(\frac{a_2}{b}\right)}, \\ D_2 = \alpha_2 = \dfrac{\log^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2\right] - \delta_2\log\left(\frac{a_2}{b}\right)}{\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \delta_1\right] + \gamma_1\log\left(\frac{a_2}{b}\right)}, \end{cases}$$

somit wird der *Durchgriff durch das Doppelgitter*:

$$(21)\quad D = D_1 D_2 = \frac{\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\delta_2 - \delta_1 - \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right] - (\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)}{\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \delta_1\right] + \gamma_1\log\left(\frac{a_2}{b}\right)};$$

er ist also wie beim Einfachgitter von k, dem Radius des Kathodendrahtes unabhängig.

Die im vorstehenden angegebene Lösung für den Durchgriff in Doppelgitterröhren ist eine näherungsweise, da ihre

Gültigkeit (unter Vernachlässigung der Raumladungen und des Potentialabfalls längs der stromdurchflossenen Glühkathode) an die Bedingungen (8b), (10a) und (10b) des zweidimensionalen Problems geknüpft ist, die aber unter den praktischen Verhältnissen meist erfüllt sind.

Ist auch noch

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n \ll 1, \tag{22}$$

so vereinfachen sich die Ausdrücke für die Durchgriffe zu:

$$\left\{\begin{aligned} D_1 &= \frac{\log\left(\frac{a_1}{nc}\right)}{n\log\left(\frac{b}{a_1}\right)}, \\ D_2 &= \frac{\log\left(\frac{a_2}{nc}\right)\log\left(\frac{b}{a_1}\right)}{n\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\log\left(\frac{b}{a_2}\right)\log\left(\frac{a_1}{nc}\right)}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

und somit

$$D = \frac{\log\left(\frac{a_1}{nc}\right)\log\left(\frac{a_2}{nc}\right)}{n\left[n\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\log\left(\frac{b}{a_2}\right)\log\left(\frac{a_1}{nc}\right)\right]}. \tag{24}$$

In allen jenen Fällen, in denen die vorausgesetzten einschränkenden Bedingungen zutreffen, wird der in Formel (21) und (24) angegebene Durchgriff bzw. seine Faktoren, die — wie die Theorie der Verstärkerröhren zeigt — nicht nur ein Maß für die Größe des inneren Widerstandes und der Verstärkung sind, sondern auch ohne wesentliche Beeinträchtigung der Verstärkung für die Herabsetzung des Sättigungsstromes (Minimalbelastung des Glühfadens), wertvolle Dienste leisten.

4. Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit behandelt einen Sonderfall des Vierleiterproblems der Elektrostatik, nämlich die folgende Zylinderanordnung: Ein Draht von kreisförmigem Querschnitt (Kathode), ein konzentrischer Kreiszylinder (Anode), dazwischen zwei Gitter (Hilfselektroden), jedes bestehend aus n gleichen, äquidistanten auf ebenfalls konzentrischen Kreiszylindern angeordneten Drähten.

Unter gewissen einschränkenden, in den praktischen Fällen aber meist erfüllten Bedingungen wird jene, bloß von den Elektrodendimensionen abhängige, in der Röhrendynamik „Durchgriff" genannte Konstante berechnet, welche angibt, in welchem Maße bei gegebener Spannung die Anode durch die Gitter hindurch, im Vergleich mit dem Steuergitter, zu dem auf der Kathode mündenden Kraftflusse beiträgt.

Wien, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 17. November 1919.)

2. *Zur Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität;*

von Karl F. Lindman.

1. Die Frage, ob es überhaupt eine wahre, d. h. nur durch Temperaturveränderung bedingte Pyroelektrizität gibt oder ob die pyroelektrische Erregung sich vollständig auf die durch die Erwärmung bzw. Abkühlung erzeugte Deformation des Kristalles zurückführen läßt, ist bekanntlich verschieden beantwortet worden, je nach den Werten der thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Turmalins (des einzigen Kristalles, in dem man eine wahre pyroelektrische Wirkung überhaupt hat nachweisen zu können geglaubt), welche man der Rechnung zugrunde gelegt hat. Eine von Riecke und Voigt[1]) gemeinsam ausgeführte Untersuchung, bei der die von Pfaff[2]) gefundenen Werte der Dilatationskoeffizienten des Turmalins benutzt wurden, ergab einen so geringen Unterschied zwischen der piezo- und der pyroelektrischen Erregung — es betrug dieser Unterschied etwa 10 Proz. —, daß diese Forscher angesichts der Unsicherheit der vielen verschiedenartigen Messungen, auf welche sich ihre Berechnung stützte, den Schluß zogen, daß in Übereinstimmung mit der von Röntgen und den Entdeckern der Piezoelektrizität, F. und P. Curie, schon früher ausgesprochenen Ansicht eine wahre Pyroelektrizität nicht existiere. In einer späteren Abhandlung kam Voigt[3]) dagegen zu einem entgegengesetzten Ergebnis. Es war ihm und Riecke früher entgangen, daß der Pfaffsche Wert für den Koeffizienten der thermischen Dilatation des Turmalins senkrecht zur Hauptachse von dem von Fizeau nach einer genaueren Methode gefundenen Werte stark abwich. Auf Voigts Veranlassung

1) E. Riecke u. W. Voigt, Wied. Ann. **45**. S. 523. 1892.
2) F. Pfaff, Pogg. Ann. **104**. S. 171. 1858.
3) W. Voigt, Wied. Ann. **66**. S. 1030. 1898.

war jetzt der von ihm (und Riecke) in anderen Beziehungen untersuchte Turmalin mit Bezug auf seine thermische Ausdehnung von Pulfrich und Kellner in Jena untersucht worden und zwar mit einem Ergebnis, das mit dem Fizeauschen Werte des soeben erwähnten Dilatationskoeffizienten besser als mit dem Pfaffschen übereinstimmte. Mit Benutzung der Pulfrich-Kellnerschen Werte der Dilatationskoeffizienten des Turmalins [1]), bezogen auf eine mittlere Temperatur von +22,2°C., fand Voigt jetzt, daß 18 oder rund 20 Proz.[2]) der bei der Erwärmung des Turmalins stattfindenden pyroelektrischen Erregung als eine direkte Wirkung der Temperaturerhöhung aufzufassen sei und somit übrig bleibe, wenn man durch geeignete Drucke die thermische Deformation aufheben könnte.

In einer Abhandlung vom Jahre 1914, wo er seine späteren pyro- und piezoelektrischen Untersuchungen zusammenfaßt, erörtert Röntgen[3]) auch die Frage nach der Existenz einer wahren Pyroelektrizität. Nach seinen Erfahrungen ist die Bestimmung namentlich der elektrischen Konstanten des Turmalins noch mit mancher Unsicherheit verknüpft. Zwar sind von Voigt wohl alle Konstanten an Präparaten aus einem Kristall beobachtet worden, aber ob deshalb alle Präparate in ihren, namentlich elektrischen, Eigenschaften auch wirklich gleichartig waren, das scheint nicht festzustehen angesichts der Versuche von ihm (Röntgen) und Riecke, nach denen ein anscheinend homogener Kristall an zwei Stellen verschieden stark pyroelektrisch erregbar sein kann. Als Ergebnis seiner und der von ihm veranlaßten Versuche teilt Röntgen zuletzt Zahlenwerte mit, die kein Anzeichen für die Existenz wahrer Pyroelektrizität in Turmalin liefert (die lediglich aus den thermischen Deformationen berechnete pyroelektrische Erregung

1) Auch einige andere Konstanten des Kristalles waren jetzt von neuem sorgfältig bestimmt worden. Die Abweichung von den älteren Werten dieser Konstanten war jedoch so gering, daß sie bei der Berechnung des Moduls der wahren Pyroelektrizität nur eine untergeordnete Rolle spielte.

2) Durch Wiederholung seiner Rechnung mit Benutzung der von ihm angegebenen Konstanten habe ich als Resultat die Zahl 18,6 bekommen.

3) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 45. S. 737. 1914. — Wegen des Krieges habe ich erst kürzlich Kenntnis von dieser Arbeit bekommen.

γ' ist bei der Temperatur + 20° C. nach seinen Versuchen 4 Proz. größer als die beobachtete pyroelektrische Konstante γ, während Voigt für seinen Turmalin bei + 22,2° C. γ um etwa 20 Proz. größer als γ' fand). Obwohl Röntgen diesem Ergebnis keineswegs volle Beweiskraft für die Nichtexistenz wahrer Pyroelektrizität beilegt, so findet er doch, daß die Voigtschen Versuche nicht genügen, um das Vorhandensein dieser Pyroelektrizität außer allem Zweifel zu stellen oder, richtiger ausgedrückt, um den Betrag der wahren Pyroelektrizität, deren Existenz er jetzt aus theoretischen Gründen nicht als unwahrscheinlich hält, festzustellen.

2. Bei der Ausrechnung der Ergebnisse der von Kellner ausgeführten Messungen der thermischen Ausdehnung des Hrn. Voigt gehörigen Turmalins bediente sich Pulfrich des von Reimerdes[1]) kurz vorher bestimmten Wertes des axialen Dilatationskoeffizienten des als Vergleichskörper benutzten Quarzringes, welcher Wert indessen, wie ich durch Versuche mit demselben Quarzringe nachgewiesen habe[2]), nicht unwesentlich (bei $t = 50°$ C. um etwa $0{,}25 \cdot 10^{-6}$ Einh.) zu klein ist. Die Pulfrich-Kellnerschen Werte der Ausdehnungskoeffizienten des oben erwähnten Turmalins müssen demnach auch etwas zu klein sein, welches auch meine Untersuchung über

1) F. Reimerdes, Inaug.-Dissert., Jena 1896.

2) Karl F. Lindman, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, XLVI. Nr. 5. 1916. Die Versuche wurden von mir schon im Winter 1898/99 im Physikalischen Institut der Universität Jena mit wohlwollender Unterstützung der Firma Zeiss (durch Vermittlung von Dr. Pulfrich) ausgeführt, obwohl die Bearbeitung des Beobachtungsmaterials (hauptsächlich wegen eines erst viele Jahre später entdeckten verhängnisvollen Rechenfehlers) leider so lange Zeit unbeendigt blieb, daß die Veröffentlichung erst im Jahre 1916 stattfinden konnte. Meine Versuche über die Ausdehnung des Quarzes ∥ zur Achse bezogen sich auf Temperaturen zwischen + 9° und + 434° C. und zwar stimmen die von mir erhaltenen Werte mit den von Scheel (Ann. d. Phys. 9. S. 837. 1902) für Temperaturen zwischen + 15° und + 100° C. gefundenen sehr gut überein. Die Diskrepanz zwischen meinen und Reimerdes' Beobachtungen dürfte darauf zurückgeführt werden können, daß die von ihm gemessenen Temperaturen im allgemeinen ein wenig höher als die des Quarzpräparates waren. — Außer der Ausdehnung ∥ zur Achse untersuchte ich auch die Ausdehnung eines Quarzwürfels ⊥ zur Achse im Temperaturintervall + 10° bis + 334° C.

die thermische Ausdehnung desselben Turmalinkristalles, die Hr. Voigt durch Hrn. Pulfrich gütigst zu meiner Verfügung gestellt hatte, direkt bestätigte.[1]) Hierzu kommt noch, daß die Temperatur von 22,2° C., auf welche sich Voigts Untersuchung über die pyro- und piezoelektrischen Eigenschaften des Turmalins bezieht, nicht unwesentlich außerhalb des Temperaturintervalles fällt, für welches die Pulfrich-Kellnerschen Dilatationsformeln aufgestellt worden sind (für α_1 41,0—52,5° und für α_3 33,5—50,5° C.).

Für Temperaturen zwischen etwa + 9° und + 320° C. lassen sich die Koeffizienten α_1 und α_3 der thermischen Ausdehnung des Turmalins $\perp$ und $\parallel$ zur kristallographischen Hauptachse nach meinen Versuchen durch die folgenden Formeln darstellen:

$$\perp \text{ zur Achse: } \alpha_1 = (3{,}583 + 0{,}00898\,t)\cdot 10^{-6},$$
$$\parallel \text{ „ „ } \alpha_3 = (8{,}624 + 0{,}01125\,t)\cdot 10^{-6}.$$

Für $t = + 22{,}2°$ C. hat man demnach

$$\alpha_1 = 3{,}782\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}874\cdot 10^{-6},$$

während die entsprechenden durch Extrapolation erhaltenen Pulfrich-Kellnerschen Werte waren:

$$\alpha_1 = 3{,}36\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}29\cdot 10^{-6}.$$

Zum Vergleich mag hier erwähnt werden, daß man nach Fizeau[2]) für dieselbe Temperatur hat:

$$\alpha_1 = 3{,}481\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}480\cdot 10^{-6},$$

welche Werte auch etwas größer als die zuletzt erwähnten sind. Die entsprechenden Pfaffschen Werte (a. a. O.), die für eine mittlere Temperatur von + 50° C. gefunden wurden, sind dagegen:

$$\alpha_1 = 7{,}732\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 9{,}369\cdot 10^{-6}.$$

---

1) Karl F. Lindman, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, XLVI. Nr. 6. 1916. Die Versuche, auf welche diese Abhandlung sich stützt, wurden im Zusammenhang mit meinem soeben erwähnten Versuche über die Ausdehnung des Quarzes im Winter 1898/99 in Jena ausgeführt.

2) H. Fizeau, l'Annuaire du Bureau des Longitudes 1877, zitiert nach Jamin, Cours de physique 2. S. 80. 1878.

Für den von Röntgen (a. a. O.) untersuchten Turmalin hatte sich ergeben für $t = 20°$ C.:

$$\alpha_1 = 3{,}51 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}72 \cdot 10^{-6}.$$

Aus meinen Formeln ergibt sich für $t = 20°$ C.:

$$\alpha_1 = 3{,}763 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}849 \cdot 10^{-6}.$$

Die Übereinstimmung zwischen den zuletzt angeführten Werten ist sogar sehr gut, wenn man bedenkt, daß sie an verschiedenen Kristallen beobachtet worden sind und daß Röntgen die Dilatationskonstanten seines Kristalles als „mit kleiner Unsicherheit behaftet" bezeichnet, während die nach meinen Formeln berechneten um $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ unsicher sein dürften.

3. Die Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität spitzt sich nach Voigts Theorie zu auf die Untersuchung des Wertes der mit dem Modul der wahren Pyroelektrizität proportionalen Größe λ, definiert durch

$$\lambda = \nu - \mu \frac{(s_{11} + s_{12})\alpha_3 - 2s_{13}\alpha_1 + (s_{33}\alpha_1 - s_{13}\alpha_3)2\delta_{31}/\delta_{33}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}.$$

Es bezeichnen hier die Größen s_{hk} $(h = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3)$ Elastizitätsmodulen, δ_{31} und δ_{33} zwei piezoelektrische Modulen, α_1 und α_3 die Koeffizienten der thermischen Dilatation $\perp$ und $\parallel$ zur Hauptachse, μ eine mit δ_{13} und ν eine mit dem Modul der totalen pyroelektrischen Wirkung proportionale Größe. Je nachdem λ von Null verschieden oder gleich Null ist, ist wahre Pyroelektrizität vorhanden oder nicht. Im ersteren Falle ergibt dann λ/ν den Bruchteil der ganzen pyroelektrischen Erregung, der als wahre Pyroelektrizität zu bezeichnen ist.

Die Zahlenwerte der im Ausdrucke für λ vorkommenden Größen — mit Ausnahme von α_1 und α_3 — welche Voigt in seiner letzteren Untersuchung benutzte, sind die folgenden (zum Teil in willkürlichen Einheiten ausgedrückt und auf eine mittlere Temperatur von $+ 22{,}2°$ C. bezogen):

$$\nu = 645; \qquad \mu = 30{,}2; \qquad \delta_{31}/\delta_{33} = 0{,}129;$$

$$s_{11} = 3{,}91 \cdot 10^{-7}; \qquad s_{12} = -1{,}01 \cdot 10^{-7}; \qquad s_{13} = -0{,}16 \cdot 10^{-}$$

$$s_{33} = 6{,}12 \cdot 10^{-7}.$$

Mit Benutzung dieser Konstanten und die oben erwähnten von mir erhaltenen Werte von α_1 und α_3 ergibt sich

$$\lambda = 645 - 568 = 77 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{77}{645} = 0{,}119.$$

Der Teil der totalen Pyroelektrizität des betreffenden Turmalins, der als eine wahre Pyroelektrizität aufgefaßt werden könnte, hat sich hierdurch von dem von Voigt angegebenen Werte 18 (eigentlich 18,6 oder rund 20) zu nur 11,9 Proz. reduziert. Der durch zufällige Versuchsfehler bedingte mittlere Fehler dieser Prozentzahl (11,9) beträgt allerdings, wie eine Durchmusterung der Genauigkeit der verschiedenen Konstantenbestimmungen, auf welche sich die Berechnung von λ stützt, ergeben hat, nicht mehr als etwa $\pm$ 1,5. Wenn man aber in Betracht zieht, daß die betreffende Prozentzahl nicht direkt erhalten worden ist, sondern auf einem Umweg durch Kombination vieler Konstantenbestimmungen, bei denen systematische Fehler nicht ganz ausgeschlossen und namentlich die elektrischen Konstanten nach Röntgen nicht ganz zuverlässig sind, so scheint jedoch die nur durch die Neubestimmung der thermischen Dilatationskonstanten bewirkte Reduzierung dieses Teils von dem von Voigt angegebenen Werte zu dem hier erhaltenen die Zuverlässigkeit der Voigtschen Schlußfolgerung von der Existenz wahrer Pyroelektrizität so wesentlich zu verringern, daß man wohl behaupten darf, daß es gegenwärtig keinen experimentellen Beweis für die Existenz wahrer Pyroelektrizität gibt. Unter solchen Umständen scheint die oben erwähnte Röntgensche Untersuchung die Nichtexistenz dieser Elektrizität recht genau bewiesen zu haben.

Åbo, im Januar 1920.

(Eingegangen 14. Januar 1920.)

3. *Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum.*[1]) *(Thermische Ionisierung und thermisches Leuchten.) I. Teil;*

von W. Schottky.

(Würzburger Habilitationsschrift.)

Einleitung.

Im überwiegenden Teile ihres Anwendungsbereiches erscheint die Thermodynamik als eine Wissenschaft von ausgesprochen demokratischem Charakter. Maßgebend für das Verhalten eines thermodynamischen Systems ist der Durchschnitt; die spezifische Wärme, die Arbeitsfähigkeit, die Raumerfüllung sind nur abhängig von den betreffenden Durchschnittsbeiträgen außerordentlich vieler Elementarbestandteile des Systems. Das abweichende Verhalten einiger weniger Bestandteile interessiert nicht, weil es die Durchschnittswerte nicht nennenswert zu beeinflussen imstande ist.

Eine andere Betrachtungsweise wird notwendig, wenn die seltenen Zustände mit neuen spezifischen Erscheinungen verknüpft sind, die der Gesamtheit der durchschnittlichen Zustände fremd sind. Auffallende Erscheinungen elektrischer und optischer Natur, die mit gewissen ausgezeichneten Zuständen verknüpft sind, lenken die Aufmerksamkeit in ganz anderem Maße als es etwa die Beiträge zu der Gesamtenergie tun würden, auch auf die seltenen Zustände der Elementarteilchen eines thermischen Systems. Die Zahl dieser seltenen Zustände, die sonst nur als Fehlergröße Bedeutung hätte, erfährt durch das Spezifische der mit diesen Zuständen verbundenen Erscheinungen unter Umständen eine derartig größenordnungsmäßige Verschiebung ihrer Bedeutung, daß eine ganz andere Genauigkeit in ihrer Berechnung notwendig wird als für die gewöhnlichen Zwecke der Thermodynamik.

1) Auf einige Resultate dieser Arbeit ist bereits bei einem Vortrag in der Deutschen Phys. Gesellschaft am 25. Juli 1919 hingewiesen worden. (Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 529—532. 1919.)

Dem Historiker sind ähnliche Dinge ja geläufig: er kennt die spezifische Wirkung der Ausnahmenaturen, die aus der Masse hervorragen und trotz ihrer geringen Zahl doch für gewisse Züge im Leben der Völker ausschlaggebend sind.

Ehe man jedoch daran gehen kann, eine statistische Behandlungsweise auszuarbeiten, die genügend viel Faktoren enthält, um das Auftreten der seltenen Erscheinungen mit berücksichtigen zu können, ist noch ein Einwand zu prüfen, der nicht nur auf historischem, sondern auch auf physikalischem Gebiete im Hinblick auf diese Ausnahmeerscheinungen gemacht wird. Das Fremdartige, den Gesetzen der Masse Widersprechende, das in dem Auftreten der seltenen Erscheinungen liegt, fordert offenbar dazu heraus, für diese Erscheinungen die Gültigkeit der ausgleichenden Gesetze, die die Masse beherrschen, zu leugnen; eine neue Ursache (zunächst unbekannten Ursprungs) wird für ihr Auftreten verantwortlich gemacht.

Etwas Derartiges trifft nun auch auf die Beurteilung der Vorgänge zu, deren Behandlung wir uns zum Ziel gesetzt haben: der „seltenen Zustände im Dampfraum", worunter ich vor allem das Auftreten geladener Bestandteile (Elektronen, Ionen, geladener Moleküle und Molekülgruppen) verstehe, daneben aber auch (im allgemeinen Einsteinschen[1]) Sinne) die Zustände der Teilchen, die sie befähigen, Licht von bestimmter Frequenz auszusenden. Es ist das also das Gebiet der Ionenbildung an glühenden Substanzen, die Frage des Auftretens (oder Nichtauftretens) von Ladungen beim Verdampfen eines geladenen Körpers, ferner ein großer Teil der Vorgänge in der Flamme, bei der Verdampfung von Salzen und anderen Substanzen. Auch gewisse Erscheinungen im elektrischen Lichtbogen kommen dabei in Frage.

Das Problem ist also: Ist das Auftreten von Ladungen und von spektralem Licht in dem genannten so außerordentlich umfassenden und komplizierten Erscheinungskomplex im wesentlichen aus den Gesetzen eines statistischen Gleichgewichtszustandes zu verstehen oder nicht? Sind diese Erscheinungen im wesentlichen thermische oder nicht?

Man erinnert sich, daß dieselbe Frage auf dem speziellen

1) A. Einstein, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 18. S. 318—323. 1916.

Gebiet der Elektronenemission aus Glühelektroden die Geister vor etwa 6—8 Jahren besonders lebhaft beschäftigt hat und damals durch Versuche Richardsons an Wolfram unter Zuhilfenahme der Langmuirschen Vakuumtechnik prinzipiell zugunsten der thermischen Auffassung entschieden worden ist.[1]) Hier handelt es sich nun um dieselbe Fragestellung, jedoch auf einem weit größeren und schwerer zu übersehenden Gebiet.

Wenn zwischen thermischen und nichtthermischen Ursachen unterschieden wird, so ist allerdings zu bemerken, daß eine bewußte und prinzipielle Unterscheidung dieser Art meines Wissens nur von einem Autor versucht worden ist: von K. Fredenhagen, der in seiner Habilitationsschrift „Spektralanalytische Studien“[2]) für das Gebiet der Salzspektren in Flammen ausdrücklich die Hypothese einführt, daß die Serienstrahlung als eine Art geordneter Vorgang nur durch einen einseitig verlaufenden Prozeß (chemische Reaktion) hervorgerufen werden kann. Eine ähnliche Anschauung hat Fredenhagen bekanntlich später auch für die Entstehung von geladenen Teilchen, insbesondere Elektronen verfochten.

Diese Ansicht kann widerlegt werden, wenn man gewisse, ziemlich allgemein für richtig gehaltene und naheliegende Voraussetzungen akzeptiert, die sich auf die Art der Entstehung geladener und leuchtfähiger Teilchen beziehen. Wenn die Trennung eines Teilchens in geladene Unterbestandteile und die Lichtaussendung ein Vorgang ist, der nur von dem Zustand eines, oder einiger weniger (zusammenstoßender) Teilchen abhängt, so ist es klar, daß der Unterschied zwischen Gleichgewichts- und einseitig verlaufenden Vorgängen nur eine graduelle, nicht eine prinzipielle Änderung der Erscheinungen bewirken kann, da es als eine sehr wohl begründete Tatsache angesehen wird, daß im Gleichgewicht genau so wie vor dem Erreichen des Gleichgewichtszustandes Reaktionen im einen und im anderen Sinne sich abspielen. Das Verschwinden eines mit einer Reaktion verbundenen Effektes könnte also

---

1) Vgl. zu allen Glühelektrodenfragen Richardsons Abhandlung über Glühelektroden in Marx' Handb. d. Radiologie, Bd. 4, und meinen „Bericht über thermische Elektronenemission“, Jahrb. für Radioakt. u. Elektr. 15. S. 147—205. 1915.

2) K. Fredenhagen, Ann. d. Phys. 20. S. 133—173. 1906.

im Gleichgewichtszustand nur dann eintreten, wenn das Gleichgewicht eine so extreme Verschiebung nach einer Seite zeigt, daß praktisch keine Bestandteile in der ursprünglichen reaktionsfähigen Form mehr vorhanden sind.

Damit ist allerdings noch nicht die weitergehende Voraussetzung bewiesen, daß das Auftreten der „seltenen Erscheinungen" (Leitungs- und Kraftwirkungen von Elektrizität im Dampfraum, Auftreten spektralen Lichtes) mit der Häufigkeit gewisser „seltener *Zustände*" konform geht. Von den elektrischen Strömungs- und Kraftwirkungen weiß man allerdings, daß sie mit der Zahl der geladenen Teilchen in der Volumeinheit, die eine statistisch erfaßbare Größe ist, eng zusammenhängen müssen, doch ist es von vornherein ganz unsicher, wie weit gerade bei Strommessungen, die fast das einzige Mittel sind, um das Auftreten geladener Teilchen erkennen zu lassen, die Versuchsbedingungen von den statistischen abweichen. Und bei der Lichtemission bedarf es erst recht besonderer Annahmen (die in der Form, wie wir sie später zugrunde legen, der neueren Quantentheorie entstammen), um einen direkten Zusammenhang mit der Häufigkeit gewisser *Zustände* gelten zu lassen.

So ist es denn nicht wunderbar, wenn bei einer anderen Gruppe von Forschern die Frage nach dem statistischen Charakter der Erscheinungen zurücktritt hinter der direkten Frage nach der Entstehungsart, nach den Elementargesetzen der elektrischen und optischen Vorgänge auf unserem Gebiete. Ein derartiges Verfahren, das alle Erscheinungen aus direkten Annahmen über ihren Mechanismus so vollständig als möglich zu erklären sucht, geht natürlich im Grunde über das der thermodynamischen Betrachtungsweise hinaus und muß, wenn es vollständig durchgeführt ist, unter anderem auch zu den Bedingungen des Gleichgewichtszustandes führen. Um aus der Zahl der auf diesem Wege vorwärtsdringenden Autoren nur einige herauszugreifen, nenne ich P. Lenard mit seinen zum Teil sehr detaillierten Annahmen über die Entstehung der Ladungsträger in Flammen[1]) sowie den Mechanismus der Lichterregung. Ferner die lichtelektrische Theorie

1) Über Elektronen und Metallatome in Flammen. Sitzungsber. d. Heidelb. Akademie 1914. A. 17. Abhandl.

der Elektronenemission von W. Wilson[1]) und die lichtelektrische Theorie der Flammenleitung von E. Marx.[2])

Gerade die bei einer derartigen Betrachtungsweise etwas in den Hintergrund gerückte Frage, ob es sich im wesentlichen um thermische Gleichgewichtszustände handelt oder nicht, bedeutet aber für die Prüfbarkeit und Unterscheidbarkeit derartiger spezieller Hypothesen auf unserem Gebiete eine gewisse Gefahr. Der Gleichgewichtszustand ist durch viel weniger Variable charakterisiert als die Reaktionen, die zu diesem Gleichgewichtszustand führen, und es ist eine bekannte Regel, die mit dem zweiten Wärmesatz zusammenhängt, daß verschiedene voneinander unabhängige Ursachen, die einen Gleichgewichtszustand herbeizuführen vermögen (z. B. Zusammenstöße und Strahlungsaustausch), derartig wirksam sein müssen, daß jede einzelne von ihnen für sich dieselbe Verteilung der Energie auf die materiellen Teilchen hervorzurufen vermag, die dem thermischen Gleichgewicht entspricht. Wenn aber ein solcher Satz gilt, und der beobachtete Zustand ist dem Gleichgewichtszustand mehr oder minder verwandt, so ist es klar, daß es sehr schwer sein wird, aus dem Studium dieses Zustandes zu entnehmen, auf welche Weise er zustande gekommen ist. Im allgemeinen wird es jedenfalls viel leichter sein, spezielle Hypothesen über die Einzelvorgänge mittels solcher Versuche zu prüfen, bei denen die Versuchsbedingungen mit Absicht möglichst das Gegenteil eines thermischen Gleichgewichts darstellen.

Unter diesem Gesichtspunkt hat also die Frage, wie weit sich die Erscheinungen auf unserem Gebiet auf Gleichgewichtszustände zurückführen lassen, für die Ökonomie der Forschung selbst eine maßgebende Bedeutung. Verfolgen wir nun die Entwicklung derjenigen Richtung, die insbesondere auf dem Gebiet der Dampfionisation an einen wesentlich oder rein thermischen Effekt glaubt, so haben wir hier wieder zwei verschiedene Methoden zu unterscheiden. Die eine, deren Hauptvertreter für das Gebiet der Glühelektroden O. W. Richardson ist, nimmt zwar das Bestehen von thermischen Gleichgewichtszuständen an, verknüpft aber die thermische

1) Ann. d. Phys. **42**. S. 1154. 1913.
2) Ann. d. Phys. **50**. S. 521—554. 1916.

Betrachtungsweise von vornherein mit speziellen Annahmen über den Zustand der Elektronen (oder Ionen) in glühenden Metallen. Ebenso finden sich bei den meisten anderen Autoren, die über Glühelektroden, Flammenleitung, Lichtbogen gearbeitet haben, Gleichgewichtsbetrachtungen, die in Verbindung mit speziellen Anschauungen über die Einzelvorgänge herangezogen werden. Im gewissen Sinne gehören hierher auch gleich die weiter unten zu besprechenden thermodynamischen Betrachtungen von K. F. Herzfeld, insofern sie spezielle Annahmen über die Zustände der Ionen und Elektronen im Metallinnern (Möglichkeit eines dissoziierten und eines nicht dissoziierten Zustandes) involvieren.

Eine rein thermodynamische Betrachtungsweise tritt, soviel ich sehe, zuerst auf bei der Behandlung der Salzdissoziation in Flammen (Arrhenius[1]) 1891), wo der Vergleich mit der Dissoziation in wässerigen Lösungen nahe lag. Eine Anwendung der Thermodynamik auf die Verdampfung von Elektronen aus glühenden Metallen gibt H. A. Wilson mit seiner bekannten rein thermodynamischen Ableitung der Richardsonschen Dampfdruckformel. Eine wichtige, aber in ihren Anwendungen auf die Dampfionisierung nicht ausgewertete Formel für das Ionisierungsgleichgewicht findet sich bei K. Herzfeld (vgl. weiter unten). Neuerdings ist der aus den Wilsonschen Betrachtungen folgenden Dampfdruckformel von M. von Laue eine andere, ebenfalls thermodynamisch abgeleitete, an die Seite gestellt worden[2]), deren Allgemeingültigkeit und Übereinstimmung mit der Wilsonschen Formel vom Verfasser nachgewiesen wurde.[3])

Damit sind jedoch die rein thermodynamischen Untersuchungen über die Entstehung von Ladungen an der Oberfläche glühender Körper und im Dampfraum einigermaßen erschöpft. Angesichts der Wichtigkeit der Frage, welche Erscheinungen auf diesem Gebiete bereits durch die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichtszustandes erklärt werden können, gewiß eine ergänzungsbedürftige Literatur. Er-

1) Svenska Vet. Ak. Handl. Afh. 1. S. 1. 1890; Wied. Ann. 42. S. 18. 1891.

2) Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik 18. S. 205—256. 1918.

3) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 20. S. 49—51. 1919.

gänzungsbedürftig um so mehr, als in neuerer Zeit unsere sozusagen aprioristische Kenntnis der thermodynamischen Konstanten durch das Nernstsche Theorem und die Ausdrücke für die Entropiekonstanten idealer Gase so vermehrt worden ist, daß als unbekannte Größen in den Gleichgewichtsbeziehungen überhaupt nur noch Energiedifferenzen verschiedener Zustände aufzutreten brauchen. Und gerade was das Gleichgewicht zwischen Ionen, Elektronen und neutralen Atomen betrifft, so ist hier durch die experimentellen Messungen der Ionisierungsspannung von J. Frank, Davis und Goucher auf der eine Seite[1]), durch Berechnung der Ionisierungsspannungen der Alkalimetalle aus der ultravioletten Grenze der Hauptserien auf der anderen Seite ein so wertvolles Material für die völlige Bestimmung von Gleichgewichtszuständen gegeben, daß eine Prüfung der daraus folgenden Beziehungen im Gebiet der Dampfionisation, Flammenleitung, Lichtbogenvorgänge, sehr erwünscht erscheint.

In der Absicht, eine derartige Prüfung zu ermöglichen, ist die vorliegende Arbeit geschrieben. Das Verfahren ist dabei so, daß zunächst ganz ohne Rücksicht auf bestimmte Erscheinungen und Versuche eine „Thermodynamik der seltenen Zustände" aufgestellt wird, die aus den bisher vorhandenen Teilresultaten durch Hinzuziehung der neueren thermodynamischen Erkenntnisse und, was beinahe noch wichtiger ist, durch eine genaue und von der bisherigen etwas abweichende Definition gewisser elektrochemischer und thermodynamischer Begriffe, ein einigermaßen in sich geschlossenes Gebäude errichtet (I. und II. Teil). Eine Spezialisierung auf die wirklichen Versuchsbedingungen wird dabei nur insoweit vorgenommen als es sich durch Aufstellung von Bedingungen wiederum rein thermodynamischen Charakters ermöglichen läßt. Nachdem dann die Frage der Selbstbestimmung des elektrostatischen Potentials im Dampfraum und der Potentialsprünge an den Grenzflächen in einem weiteren Abschnitt behandelt ist, sollen erst zuletzt die Bedingungen der wirklichen Versuche (Elektronen-, Ionenstrommessungen, Flammenleitung, Lichtemission in Flammen) ins Auge gefaßt und einige

1) Literatur vgl. bei J. Frank und G. Hertz, Phys. Zeitschr. 20. S. 132—143. 1919.

Deutungen von Tatsachen auf Grund der gewonnenen thermodynamischen Resultate versucht werden.

Was zur näheren Einführung in die Gedankengänge dieser Arbeit und insbesondere des vorliegenden I. Teils notwendig ist, werde ich am besten entwickeln können, indem ich nunmehr noch derjenigen Bemerkungen meiner Vorgänger gedenke, die mit den hier zur Anwendung kommenden Voraussetzungen und Methoden in einem direkten Zusammenhang stehen.

An erster Stelle ist da wohl eine von K. Herzfeld berichtete Äußerung O. Sterns, anscheinend aus dem Jahre 1913, zu erwähnen, daß für das „Elektronengas" derselbe Wert der idealen Gaskonstanten einzuführen sei wie für gewöhnliche Gase; als „Atommasse" sei dabei die träge Masse des Elektrons einzusetzen. Damit war eine, wie man sehen wird, für die Thermionik des Dampfraumes sehr fruchtbare Anregung gegeben, die indessen von K. Herzfeld zunächst auf das Dissoziationsgleichgewicht *innerhalb* des Metalles[1]) und später auf das Gleichgewicht Metall-Salzlösung angewandt wurde[2]), Gebiete, in denen, wie sich gezeigt hat, die Voraussetzungen viel weniger eindeutig und einfach sind als auf dem reinen Dampfgebiet. Für uns bemerkenswert ist jedoch, daß Herzfeld in seiner ersten elektrochemischen Arbeit (Herzfeld I) die Dissoziation eines Wasserstoffatomes im Dampfraum in ein Ion und ein Elektron als Zwischenvorgang benutzt (in der zweiten Arbeit wird dieses Zwischenglied umgangen) und dabei für das Ionisierungsgleichgewicht eine Formel aufgestellt, die sich bis auf kleine numerische Abweichungen in den quantentheoretischen Konstanten vollständig mit der aus unseren Voraussetzungen folgenden (§ 4) deckt.

Für wichtig in diesem Zusammenhange halte ich auch eine im Jahre 1916 erschienene Arbeit Herzfelds „Zur Statistik des Bohrschen Wasserstoffatommodells"[3]), die aus

---

1) K. Herzfeld, Elektronentheorie der Metalle und Nernstsche Formel, Phys. Zeitschr. 16. S. 354—362. 1915. Im folgenden zitiert als Herzfeld I. Zur Berechnung der elektrochemischen Normalpotentiale, Ann. d. Phys. 56. S. 133—160. 1918 (zitiert als Herzfeld II).

2) K. Herzfeld, Ann. d. Phys. 51. S. 261—284. 1916 (Herzfeld III).

Zweifeln an der Anwendbarkeit der Tetrode-Sternschen Berechnungsweise auf die Entropiekonstante nicht elektrisch neutraler Gase geboren ist. An dem einfachsten Beispiel des Bohrschen Wasserstoffatommodells, wo man das Dissoziationsgleichgewicht aus den Quantenansätzen und den üblichen Verteilungsannahmen ungefähr berechnen kann, wird gezeigt, daß sich hier eine Gleichgewichtskonstante ergibt, die bis auf einen Zahlenfaktor mit dem Tetrode-Sternschen Ausdrucke identisch ist; ein Verfahren, dessen Verallgemeinerung den eigentlichen Zusammenhang dieses Ausdruckes mit den Voraussetzungen der Quantentheorie wohl weitgehend klären würde. Jedenfalls scheint mir durch diese Betrachtungen Herzfelds jeder Zweifel an der Anwendbarkeit der gewöhnlichen Ausdrücke für die Entropiekonstanten auf Elektronen- und Ionengase beseitigt. — Eine Berechnung der „Grenzladungslichte" unter dieser Voraussetzung und ein Vergleich mit den Messungen an Wolfram findet sich zum ersten Male bei M. von Laue, „Die Entropiekonstante der Glühelektronen".[1])

Eine der Herzfeldschen Arbeiten (I) ist ferner — neben Betrachtungen von F. Haber und M. Born — heranzuziehen für die historische Beurteilung einer einfachen energetischen Beziehung, die für das Verhältnis von Elektronenemission, neutraler Verdampfung und positiver Ionenabgabe von Metallen von größter Bedeutung ist, und, wie wir sehen werden (II. Teil), auch interessante strukturtheoretische Schlüsse gestattet. Ich hatte im Jahre 1915 die (genau nur für den absoluten Nullpunkt der Temperatur geltende) Gleichung zwischen den molaren Verdampfungswärmen l^x der neutralen Atome, l^- der Elektronen, l^+ der Ionen aus einem Metalle und der Ionisierungsspannung aufgestellt:

$$l^- + l^+ = l^x + J.$$

Da die Verdampfungswärmen für den Dampfdruck in erster Linie maßgebend sind, kann vermöge dieser Beziehung z. B. auf die Verdampfung von positiven Ionen aus dem Dampfdruck der Elektronen und neutralen Atome sowie der Ionisierungsspannung geschlossen werden. Daß ich damals diese

1) M. von Laue, Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik 18. S. 257 bis 270. 1918.

Zusammenhänge nicht weiter verfolgte, lag — neben anderen wichtigeren Gründen — an einer ganz ähnlichen Gleichung, die ich bei Herzfeld vorfand; in unserer Schreibweise:

$$A - \Phi E + l^{a} = l^{\infty} + J .$$

Hier bedeutet A die Arbeit für die Dissoziation eines Metallatoms in ein Ion und ein Elektron im Innern des Metalls, Φ ist der Potentialunterschied zwischen dem Dampfraum und dem Innern des Metalls, in dem die Elektronen im Richardsonschen Sinne gasförmig angenommen werden, und E ist die molare Elektrizitätsmenge. Wie man sieht, entspringen beide Gleichungen einer ähnlichen Betrachtungsweise, unterscheiden sich aber dadurch, daß die Herzfeldsche Gleichung von speziellen — wie wir jetzt wissen unzulässigen — Annahmen über den Zustand des Metallinnern ausgeht, während die erste Gleichung ganz allgemein gilt; es kommt dabei gar nicht darauf an, ob die Elektronen und Ionen im Metall voneinander getrennt oder vereinigt existieren, eine „Dissoziation" im Metallinnern spielt keine Rolle. In allgemeinerer Bedeutung wird eine Beziehung der hier betrachteten Art neuerdings bei M. Born[1]) und F. Haber[2]) benutzt; doch werden hier statt der einfachen Größen l^{-} und l^{+} Ausdrücke eingeführt, die mit selbst wieder prüfungsbedürftigen Theorien zusammenhängen; außerdem fehlt die Beziehung zu den Dampfdruckfragen geladener Teilchen.

Wenn man sich zu erklären versucht, weshalb eine derartige energetisch so naheliegende und für die Verdampfung von Ladungen so wichtige Beziehung bisher für die Thermodynamik der Ladungen im Dampfraum noch nicht nutzbar gemacht worden ist, so kann man den Grund dafür wohl nur in der Unsicherheit erblicken, die in bezug auf die thermodynamische Behandlungsweise geladener Teilchen überhaupt bestand. Es ist bekannt, daß in einem Gas, welches im thermischen Gleichgewicht ist, der Druck und die Dichte durchaus nicht an allen Stellen des Raumes dieselben zu sein brauchen; befindet sich das Gas in einem Kraftfeld, so variiert Dichte und Druck gemäß dem bekannten Boltzmannschen e-Gesetz.

1) M. Born, Verhandl. der D. Phys. Ges. 21. S. 13—24. 1919.
2) F. Haber, Berl. Ber. 1919. S. 497.

Die Wirkungen solcher Kraftfelder sind nun bei elektrisch geladenen Teilchen von ganz anderer Größenordnung als bei neutralen, wo sie im allgemeinen vernachlässigt werden können; und, was die Verhältnisse noch schwieriger macht, das Kraftfeld ist selbst von der Verteilung der Ladungen, also von Dichte und Druck der Teilchen abhängig.[1]) Wohl ist der *Unterschied* der Dichte im Dampfraum durch Potential*unterschied*, Elementarladung und Temperatur eindeutig bestimmt, aber wie hängt der *Absolut*wert der Dichte mit dem Absolutwert des Potentials zusammen? Oder — da Absolutwerte des Potentials keine Bedeutung haben — auf welchen Nullpunkt ist das für den absoluten Druck maßgebende Potential zu beziehen? Ist das ein temperaturunabhängiger Wert oder läßt sich für diesen Wert von irgendeinem Standpunkt aus wieder eine Temperaturabhängigkeit feststellen? Soll man den Potentialwert im Innern des Metalls als Bezugswert nehmen? Aber welchen Potentialwert, da sich doch die Elektronen wahrscheinlich im Laufe ihrer Bewegungen auf ganz verschiedenen Potentialwerten befinden und diese Werte zudem sicher andere sind für die positiven Ionen, andere für die Elektronen? Dieser letzte Gesichtspunkt zeigt zudem, daß selbst bei Annahme eines idealen Elektronengases im Metallinnern, das sich auf konstantem Potential befindet, die Austrittsarbeit nicht, wie noch Herzfeld anzunehmen scheint (Herzfeld I, S. 354), mit dem Potentialsprung an der Grenze identifiziert werden kann; jedenfalls ist es dann kein „objektiver Potentialsprung", der für alle Teilchen gälte, sondern das Grenz- und Kontaktpotential wäre für positive und negative Teilchen verschieden zu rechnen; eine unmögliche Definition. Oder soll man den für den Dampfdruck bestimmenden Potentialwert gegen einen Fixwert an der Grenze Metall-Vakuum rechnen? Auch das ist nicht möglich, weil die Bereiche, in denen die Energie und die Bewegung der geladenen Teilchen durch atomistische „Strukturwirkungen" bestimmt werden, in das Gebiet, das, wenigstens prinzipiell, durch die

1) Vgl. dazu die Raumladungstheorie des thermischen Gleichgewichts bei O. W. Richardson, Phil. Trans. A. 201. S. 516. 1913; W. Schottky, Jahrb. der Radioakt. u. Elektronik 15. S. 199. 1915 und M. von Laue, ebenda 18. S. 205—256. 1918.

Raumladung und die äußeren Felder beeinflußt werden kann, übergreift, so daß sich nirgends ein Fixpunkt angeben läßt.[1])

Es ist begreiflich, wenn unter der Fülle dieser ungeklärten Fragen der Gedanke auftaucht, daß der Elektronen- und Ionendampfdruck über einem Metall überhaupt nichts in dem Sinne thermodynamisch Bestimmtes ist, wie etwa der Dampfdruck neutraler Atome. Es hatte den Anschein, als ob man für einen beliebigen Punkt des Außenraumes den Elektronendampfdruck ganz beliebig geben könnte, da sich ja dabei immer das elektrische Potential so einstellen kann, daß Gleichgewicht besteht. In einem gewissen Grade ist so etwas sogar realisiert, wenn man zwei gleichtemperierte Metalle, die, sagen wir, die Neigung haben, verschiedene Dampfdrucke hervorzurufen, nahe aneinander bringt. Andererseits ist wiederholt der Gedanke ausgesprochen worden, daß es sich bei dem Elektronendampfdruck, ähnlich wie dem Ionendampfdruck in wässerigen Lösungen, um eine Größe handle, die für den ganzen Raumbereich außer in unmittelbarer Nähe des Metalls beliebig als Konstante gegeben werden könne; so bei F. Krüger[2]), und in dem etwas anderen Sinne, daß der Dampfdruck der positiven und negativen Teilchen gleich sein muß und durch diese Bedingung der Wert des Potentialsprunges an der Oberfläche festgelegt ist, bei F. Haber.[3]) Es schien also, als ob man, ehe man an die endgültige Theorie dieser Erscheinungen herantreten könne, überhaupt erst noch die Frage nach den unabhängigen Variablen des Problems zu lösen hätte.

Nicht wenig hat zu der Erschwerung des Einblicks in diese Zusammenhänge jedoch nach meiner Ansicht auch die gewissermaßen zufällige Tatsache beigetragen, daß unsere gewöhnlichen thermodynamischen Gleichgewichtsgesetze entweder in Form von Differentialgleichungen angegeben werden (Claudius-Clapeyronsche Gleichung, Temperatur und Druckabhängigkeit der Massenwirkungskonstanten) oder, wenn sie in

1) Ganz bei Seite gelassen ist hier noch die von M. von Laue aufgeworfene Frage, ob den Elektronen im Dampfraum überhaupt Gaseigenschaften zuzuschreiben sind; *diese* Schwierigkeit läßt sich, wie ich gezeigt habe, durch Beschränkung auf nicht allzugroße Ladungsdichten umgehen.

2) F. Krüger, Phys. Zeitschr. 12. S. 360. 1911.

3) F. Haber, Berl. Ber. 1919. S. 503.

integrierter Form benutzt werden, nicht mehr nur Größen enthalten, die sich bloß auf den Zustand bei der betreffenden Temperatur beziehen, sondern noch Annahmen über die Temperaturabhängigkeit verschiedener thermodynamischer Größen enthalten. Hierbei treten dann die *Zustands*beziehungen, die zwischen Verteilung und Energieunterschieden der Teilchen in verschiedenen Phasen herrschen, natürlich stark in den Hintergrund. Das hat aber gerade für unser Problem große Nachteile; soll man z. B. die Temperaturabhängigkeit einer inneren Verdampfungswärme definieren, die zum Teil durch Raumladungen bedingt ist, so steht man — Verzeihung wegen des rustikalen Vergleichs — wie der Ochs vor dem Berge.

In dieser Bedrängnis hat uns nun das Glück, mit Benutzung eines ganz merkwürdigen Seitenweges, auf eine andere Art von integrierter Thermodynamik hingewiesen durch das Auftauchen der von Laueschen Dampfdruckformel[1]), in der außer der Konzentration im Dampfraum und angebbaren Konstanten nur die *freie Energie* μ eines (geladenen oder ungeladenen) Bestandteiles in bezug auf die feste Phase auftritt. Nicht als ob es sich bei dieser „μ-Thermodynamik" um etwas prinzipiell Neues handelte. Die Gleichsetzung der spezifischen freien Energie eines Bestandteils in verschiedenen Phasen, die zu der μ-Formel führt, gehört neben der Gibbs-Planckschen Gleichsetzung der spezifischen thermodynamischen Potentiale schon seit langem zu den bekanntesten Hilfsmitteln der Phasenlehre. Der Grund, weshalb man diese einfachste und bei hinreichend geringen Dampfdichten ganz allgemeine Formel bisher nicht verwendet hat, kann wohl nur in der Scheu gefunden werden, spezifische Energien, Entropien, thermodynamische Potentiale und freie Energien eines Bestandteils in bezug auf eine feste oder flüssige Phase explicite in der endgültigen Formel stehen zu lassen. Man glaubte hier auf direkt meßbare Größen zurückgreifen zu müssen und nahm deshalb die Einführung des ganzen Temperaturintervalls von 0 bis T in die Dampfdruckformel mit in Kauf. Wenn ich trotzdem die Vermutung ausspreche, daß die zukünftige Thermodynamik eine starke Annäherung an die „μ-Thermodynamik" zeigen wird — aus der sich die Gleichgewichtsbeziehungen im homogenen Gasraum auf die einfachste Weise ableiten lassen —, so hat

1) Vgl. Anm. 2, S. 118.

das zwei Gründe. Einmal entfällt mit der Verfeinerung der Betrachtungsweise, die die Atome nicht mehr als unveränderliche und untrennbare Individuen ansieht, sondern Elektronen, einfach und mehrfach geladene Ionen usw. mitberücksichtigt, die Möglichkeit, Verdampfungswärmen und spezifische Wärmen dieser Bestandteile in der festen Phase direkt zu messen, so daß in diesem Falle die Einführung dieser Größen in die Dampfdruckformel zum mindesten keinen Vorteil bedeutet. Auf der anderen Seite steht gerade die spezifische freie Energie mit allen Verteilungsfragen in einem derart innigen Zusammenhang, daß man die Verteilungsprobleme zweckmäßig in zwei Aufgaben trennt: einmal, den Zusammenhang zwischen freier Energie und Verteilung zu suchen — eine Aufgabe, die mit der Aufstellung einiger einfachster und allgemeinster Beziehungen gelöst ist — und zweitens, die spezifische freie Energie eines Bestandteils als Funktion von Temperatur, Arbeitskoordinaten und Stoffmengen zu bestimmen. Für die letztere Aufgabe müssen dann alle thermischen Messungen verwendet werden, die einem zugänglich sind; als ebenbürtiges und ergänzendes Hilfsmittel kommen aber daneben auch statistische Berechnungen auf Grund strukturtheoretischer Modelle in Frage. Als wichtigste Beziehung spielt hierbei noch das Zusammenfallen von freier Energie und Totalenergie in den Fällen, wo irgendein Energieunterschied allen statistischen Zuständen des Systems gemeinsam ist, eine Rolle; daneben ist aber zu bemerken, daß der statistische Ausdruck für die freie Energie, oder noch unmittelbarer für das in der Dampfdruckformel auftretende Glied $e^{\frac{\mu}{RT}}$, die einfachste Funktion darstellt, die wir auf diesem Gebiete kennen; Entropie, mittlere Energie, thermodynamisches Potential, alle diese Größen sind kompliziertere statistische Bildungen.[1])

Um nun zu dem Elektronen- und Ionendampfdruckproblem zurückzukehren: Gerade der in seiner Temperaturabhängigkeit so schwer zu definierende Teil der freien Energie der geladenen Teilchen in bezug auf einen Punkt des Außenraumes, der von elektrostatischen Ladungen in der Grenzschicht und dem Dampfraum abhängt, gehört zu den Größen,

1) Vgl. dazu meine Bemerkungen Phys. Zeitschr. 20. S. 220 bis 228. 1919.

die von dem Momentanzustand des Metallinnern unabhängig sind und sich infolgedessen von dem statistisch zu berechnenden Teil der freien Energie von vornherein abtrennen lassen. Wie diese Trennung und die genauen Definitionen durchzuführen sind, wird im § 1 des I. Teils auseinandergesetzt und durch die dort eingeführte „natürliche freie Energie" scheint mir auch der Wert der Kontaktpotentiale zwischen Metallen erst einwandfrei definiert (§ 2).

In den letzten Betrachtungen ist fast ausschließlich von der thermischen *Elektrizitäts*bildung die Rede gewesen. Ich bin deshalb noch eine Erklärung darüber schuldig, wie ich dazu gekommen bin, das „thermische (spektrale) *Leuchten*" in den Untertitel meiner Arbeit mit aufzunehmen, und beide Erscheinungen: Auftreten von Ladungen, und Auftreten von Spektrallinien, unter dem Begriff der „seltenen Zustände" zu vereinigen.

Nach der Bohr-Einsteinschen Quantentheorie ist ein gasförmiges Teilchen, das aus verschiedenen Bausteinen (Ionen, Elektronen) besteht, nur einer gewissen Anzahl diskreter Zustände fähig. Unmittelbar an den Zustand größtmöglicher Energie schließt sich der Zustand an, wo irgendein Baustein (z. B. ein Elektron) von dem Gasteilchen abgetrennt wird. So erscheint die Frage nach dem Auftreten der höheren Energiestufen mit der Frage nach der Häufigkeit der völligen Trennung aufs engste verknüpft. Werden aber die diskreten Energiezustände der Gasteilchen gesondert in die Rechnung eingeführt, so ergibt sich noch eine weitere Vereinfachung: *innere* freie Energien (genauer: Unterschiede der inneren freien Energien gegenüber dem Zustand beim absoluten Nullpunkt) treten nicht auf, und in allen auf das Gasgleichgewicht bezüglichen Formeln erscheinen außer angebbaren Konstanten[1]) nur die einfachen und zum Teil theoretisch oder experimentell direkt zugänglichen Energieunterschiede der verschiedenen Zustände. Diese Betrachtungsweise, die auf A. Einstein zurückgeht, erscheint also im Interesse der Einfachheit geboten. Der Zusammenhang mit der spektralen Lichtemission ist dann

1) Eine gewisse Unsicherheit in der Konstantenbestimmung kann allerdings vorläufig noch in Fällen vorhanden sein, wo das „Gewicht" von Quantenzuständen in die Rechnung eingeht. Vgl. Anmerkungen zu § 1, 2 und 4.

aber, wiederum nach Einstein[1]), dadurch gegeben, daß die Intensität des von einer dünnen leuchtenden Gasschicht ausgesandten spektralen Lichtes nur von der Zahl der Teilchen abhängt, die sich auf irgendwelchen höheren Energiestufen befinden.

Wie man sieht, nehmen wir mit Zugrundelegung der hier skizzierten Anschauungen über thermische Ionisation und thermisches Leuchten zu der eingangs gestellten Frage nach dem Charakter der spezifischen Erscheinungen elektrischer und optischer Natur in der Weise Stellung, daß wir eine eindeutige Verknüpfung dieser Erscheinungen mit statistisch geregelten *Zuständen* voraussetzen und somit eine thermodynamisch statistische Behandlungsweise dieser Phänomene für erlaubt und fruchtbar halten; ohne dabei natürlich in der Frage nach dem Gleichgewichts- oder Reaktionscharakter der Erscheinungen in den verschiedenen in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fällen einer sorgfältigen Prüfung vorgreifen zu wollen. Mit dem Augenblick, wo wir von den spezifischen Erscheinungen, die mit den seltenen Zuständen verknüpft sind, absehen und die Frage der Häufigkeit dieser Zustände unter die gewöhnlichen Gesetze der Thermodynamik stellen, scheint dann allerdings das ursprünglich von uns eingeführte Merkmal der seltenen Zustände verwischt; denn das einzige, was diese seltenen Zustände noch von den gewöhnlichen unterscheidet, ist der Absolutwert der Energien, die zur Ionisierung sowie zur Erzeugung eines sichtbaren spektralen Leuchtens notwendig sind. Tatsächlich sind denn auch die folgenden Darlegungen, wenigstens in ihrem rein theoretischen Teil, völlig allgemein und schließen die Dissoziation in nicht geladene Dampfteilchen sowie das Auftreten jeder Art von geringerwertigen Quantenzuständen (wie bei der Rotation von Molekülen) ein.[2]) Doch wird der Umstand, daß die hier behandelten Abweichungen von der üblichen Thermodynamik besonders mit Rücksicht auf das mögliche Auftreten von gewöhnlich ver-

1) A. Einstein, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 18. S. 318—323. 1916.

2) Sogar das Auftreten elektrischer Potentiale in diesen Gleichungen kann insofern von einem allgemeineren Standpunkte aufgefaßt werden, als in derselben Weise wie hier die elektrischen Kräfte allgemein Fernkräfte beliebiger Art in dieser Form in den Gleichgewichtsbeziehungen berücksichtigt werden müßten.

nachlässigten Zuständen der Materie eingeführt sind, wenn auch nur noch von einem konventionellen Standpunkte aus, die Bezeichnung „Thermodynamik der seltenen Zustände" rechtfertigen.

I. Teil. Die freie Energie des festen und dampfförmigen Zustandes.

§ 1. Die freie Energie der festen Phase.

Wir betrachten ein echtes thermisches Gleichgewicht zwischen einem festen oder flüssigen Körper und seinen Verdampfungsprodukten. Ein solches echtes thermisches Gleichgewicht ist dadurch definiert, daß bei gegebener Gesamtenergie die Entropie des Gesamtsystems ein Maximum besitzt oder bei gegebenen Variabeln (Arbeitskoordinaten und Temperatur) die freie Energie sich auf ihren kleinsten Wert eingestellt hat. Wir bemerken gleich, daß bei festen Körpern und gewöhnlichen Temperaturen derartige echte Gleichgewichte in Wirklichkeit höchst selten sind; so wird sich z. B. bei einem zusammengesetzten festen Körper, dessen verschiedene Bestandteile verschieden flüchtig sind, sehr bald eine Oberflächenschicht von anderer Zusammensetzung bilden als sie das Innere des festen Körpers besitzt und es wird wegen der Unmöglichkeit oder äußersten Langsamkeit der Umsetzung im festen Körper eine gegen die Beobachtungsdauer überaus lange Zeit brauchen, ehe sich ein neues Gleichgewicht im Inneren des festen Körpers hergestellt hat. Günstiger scheinen die Verhältnisse bei reinen Metallen zu liegen, wo die Elektronen infolge ihrer selbst beim absoluten Nullpunkt noch vorhandenen großen Beweglichkeit anscheinend imstande sind, jede Störung des Gleichgewichtes von der Oberfläche nach dem Inneren zu auszugleichen. Bei flüssigen Körpern wird man wohl in den meisten Fällen mit einer raschen Einstellung des echten Gleichgewichtszustandes rechnen können. Desgleichen werden genügend hohe Temperaturen die raschere Einstellung des Gleichgewichtes herbeizuführen vermögen, vielleicht auch ohne daß bei festen Körpern direkt ein Übergang in den flüssigen Zustand stattgefunden hat.

Die Frage nach der Realisierung des echten Gleichgewichtszustandes in den verschiedenen Spezialfällen lassen wir aber im folgenden zunächst gänzlich außer acht; wir nehmen an, durch genügend langes Warten oder irgendwelche katalytischen Kunstmittel hätten wir es erreicht, daß der echte Gleich-

gewichtszustand in dem betrachteten System eingetreten wäre. Dann haben wir im Dampfraum über der festen Phase (unter die wir ein für allemal auch Flüssigkeiten mit einrechnen wollen) im allgemeinsten Falle Verdampfungsprodukte der verschiedensten Art zu erwarten: neutrale Atome, Moleküle oder Molekülgruppen, einfach oder mehrfach positiv oder negativ geladene Atome, Moleküle oder Molekülgruppen, endlich freie Elektronen. Für die Dampfdruck- und Gleichgewichtsbetrachtungen ist es, wie wir sehen werden, bis zu einem gewissen Punkte völlig gleichgültig, welcher der hier aufgezählten Arten die betrachteten Teilchen angehören. Leider existiert jedoch kein allgemein gebräuchlicher Name, der alle diese Arten von dampfförmigen Bestandteilen zusammenfaßt; um mit einer einheitlichen Bezeichnung arbeiten zu können, ohne zu einer direkten Neubildung gezwungen zu sein, wollen wir im folgenden alle im gaskinetischen Sinne freibeweglichen Teilchen im Dampfraum als „*Molekeln*" bezeichnen, während unter *Molekülen* speziell mehratomige ungeladene Systeme verstanden sein sollen. In diesem Sinne ist also z. B. ein Elektron, das sich frei im Dampfraum bewegt (und das bei genügend kleiner Dampfdichte im Dampfraum den Gasgesetzen gehorcht) eine Molekel; dagegen wird es zum bloßen Baustein einer Molekel, wenn es sich an ein Ion, Atom oder Molekül angelagert hat und dadurch seiner freien thermischen Beweglichkeit verlustig gegangen ist.

Unsere Aufgabe ist, die Gleichgewichtskonzentrationen aller Molekeln im Dampfraum zu ermitteln, und wir bedienen uns hierfür der Bedingung, daß die freie Energie der Molekeln irgendeiner betrachteten Art innerhalb der festen und dampfförmigen Phase die gleiche sein muß. Um diese Bedingungsgleichung aufstellen zu können, haben wir nun zunächst genau anzugeben, was unter der freien Energie einer Molekel innerhalb der festen Phase verstanden werden soll. Hierbei treten zwei Schwierigkeiten auf.

Die erste ist mehr formaler Natur und für unser Problem nicht charakteristisch. Sie besteht darin, daß bekanntlich bei einer rein thermischen Betrachtungsweise die freie Energie eines Systems nur bis auf Glieder von der Form $a\,T + b$ bestimmt werden kann, deren Unbekanntheit jedoch bei der Betrachtung von Gleichgewichten wichtige Konstanten unbe-

stimmt läßt. Eine ganz radikale Beseitigung dieser Schwierigkeit halten wir nur für möglich mit Hilfe einer statistischen Betrachtungsweise, welche alle Teile des Systems (feste bzw. flüssige Phase und Dampf) in einer einzigen Gesamtheit zusammenfaßt, die freie Energie dieses Doppelsystems aus der Energiefunktion und der Verteilung im (Gibbsschen) Phasenraum bestimmt und durch Variation innerer Variabler die wahrscheinlichste Verteilung feststellt. Ein derartig systematisches Vorgehen ist jedoch zurzeit nicht möglich, und es sollen daher aus der Statistik nur zwei wohl nicht zu bezweifelnde Resultate übernommen werden: erstens die Voraussetzung, daß die freie Energie der einzelnen Phasen bei gegebener Temperatur und gegebenen Lagenkoordinaten (am einfachsten dem Volumen) vollständig bestimmt ist durch gewisse Mittelwerte, welche nur von der *Energiefunktion* des Teilsystems abhängen (Phasenintegral); die Energie jedes Einzelzustandes muß dabei auf denselben Nullzustand, der einem bestimmten Punkt oder Gebiet im Gibbsschen Phasenraum entspricht, bezogen werden. Und zweitens wird vorausgesetzt, daß, wenn für ein System von Teilchen, das man in verschiedenen Phasen betrachtet, als Nullzustand der Energie derselbe Zustand gewählt wird, daß dann die für das Gleichgewicht maßgebenden Konstanten der freien Energie eindeutig bestimmt sind, und zwar, falls der Dampf den idealen Gasgesetzen gehorcht, in einer bestimmten bekannten Weise (Entropiekonstante idealer Gase).

Die zweite Schwierigkeit, die bei der Definition der freien Energie einer Molekel in bezug auf eine feste Phase auftritt, ist ganz anderer Art. Es ist bekannt, daß das Studium des festen Zustandes der Materie in neuerer Zeit die früher ziemlich verbreitete Vorstellung als unhaltbar erwiesen hat, als ob der innere Zustand der Bestandteile des festen Körpers (z. B. der NaCl-Moleküle im festen Kochsalz) derselbe sei wie der entsprechenden Bestandteile in gasförmiger Phase. Man weiß jetzt, daß die Kräfte zwischen den kleinsten Teilchen jedes beliebigen Aggregates im wesentlichen elektrischer Natur, also gewissermaßen Fernkräfte sind und daß infolgedessen zwischen den einzelnen Bausteinen eines Moleküls im festen Körper im allgemeinen durchaus kein anderer und engerer Zusammenhang besteht, als zwischen den verschiedenen im festen Körper benachbarten

Molekülen. Man sieht sich infolgedessen gezwungen, den Begriff eines im gewöhnlichen Sinne definierten Moleküls im festen Körper völlig aufzugeben, ebensowenig wird es im allgemeinen möglich sein, von Molekeln im oben definierten Sinne innerhalb des festen Körpers zu sprechen. Daß die Übertragung der Definition einer Molekel aus dem Dampfraum in die feste Phase nicht ohne weiteres möglich ist, geht schon daraus hervor, daß als wichtigstes Kennzeichen die freie Beweglichkeit im gaskinetischen Sinne benannt wurde. Streng genommen, ist diese Definition also überhaupt nur dann durchführbar, wenn bekannt ist, daß der betreffende Stoff sich wie ein ideales Gas verhält.

Um nun trotzdem die freie Energie irgendeiner bestimmten Art von Molekeln in der festen Phase definieren zu können, müssen wir einen Umweg machen. Wir denken uns im Innern der festen Phase, so weit von der Grenzfläche, daß keine Inhomogenitäten, insbesondere keine räumlichen Ladungen, mehr auftreten, ein zusammenhängendes Stück in der Weise abgegrenzt, daß es genau so viel positive wie negative Ladungen enthält. Anstatt die Energiefunktion des ganzen festen Körpers einschließlich der Oberflächenschichten zu studieren, beschränken wir uns auf dieses homogene Stück. Es handelt sich nun zunächst um die Festlegung des Nullzustandes der Energie dieses Stückes. Zu diesem Zwecke denken wir uns das Stück unter Festhaltung aller Koordinaten und Bewegungszustände in einen von fremden Feldern freien Raum gebracht und dort in seine kleinsten Bestandteile aufgelöst, die so weit voneinander entfernt werden, daß eine weitere Verschiebung keine Energieänderung mehr bedeutet. Zugleich wird die Bewegung aller Teilchen zur Ruhe gebracht. Den so entstandenen Zustand, über dessen thermodynamische Realisierbarkeit wir nichts vorauszusetzen brauchen, bezeichnen wir als Nullzustand[1]) der Energie oder als „Zustand völliger Dissipation".

1) Die Auflösung in Elementarbestandteile muß sich hierbei, genau genommen, nicht nur auf die Trennung in Atome oder Ionen und leicht abspaltbare Elektronen erstrecken, sondern auch auf die fester gebundenen Elektronen, in letzter Konsequenz sogar auf die Bestandteile der Atomkerne. Man kann jedoch bei solchen Bestandteilen von der Auflösung absehen, von denen man weiß, daß ihr Zustand in allen betrachteten Gleichgewichtsphasen und bei allen be-

Durch die — im allgemeinen negative — Energiedifferenz gegen diesen Nullzustand ist die Energie jedes Momentanzustandes des herausgegriffenen Stückes des festen Körpers eindeutig definiert, und damit also auch die Energiefunktion des festen Körpers.[1]) Die *freie* Energie des festen Körpers ist damit jedoch auch vom Standpunkt der Statistik noch nicht vollkommen definiert; denn der Umstand, daß z. B. in der Gibbsschen Statistik keine willkürliche Konstante in der Definition der freien Energie auftritt, ist eine rein formale Zufälligkeit; in Wirklichkeit müßte genau so eine Konstante a mitgeführt werden wie in der Thermodynamik. Nun haben wir, da es bei der Betrachtung von Gleichgewichten immer nur auf die Differenzen von freien Energien und demnach auch der Konstanten a ankommt, bei der festen Phase die Verfügung über diese Konstante frei; wir treffen sie, indem wir a mittels der Bedingungsgleichung

$$\frac{dF}{dT} = \frac{dU}{dT} \text{ für } T = 0 \tag{1}$$

festlegen (F freie Energie, U Gesamtenergie). Da definitionsgemäß $F = U - TS$ (S Entropie des Systems) und demnach $d/dT\,(F - U) = -S_0$ für $T = 0$ ist, so stimmt diese Festsetzung mit der bekannten Nullsetzung der Entropie beim absoluten Nullpunkt überein.

In dieser Weise ist also die „freie Energie des festen Körpers", bezogen auf einen sehr weitgehend dissipierten Nullzustand, eindeutig definiert. Von dieser freien Energie ist aber die „freie Energie" irgendeiner Molekel innerhalb des festen Körpers wohl zu unterscheiden. Zur Definition dieses Begriffes gelangen wir folgendermaßen: Wir sondern aus dem vollständig dissipierten System der Bestandteile des festen Körpers ohne irgendwelchen Energieaufwand (wegen der unendlich weiten

trachteten Temperaturen derselbe ist. Für die Elektronen außerhalb der Atomkerne trifft dies allerdings, soviel wir wissen, nicht zu (dielektrische Verschiebungen).

1) Bei der Abtrennung des herausgegriffenen Stückes aus dem Rest des festen Körpers ist eine gewisse potentielle Energie zu überwinden und es würde also einen Unterschied machen, ob man die freie Energie des herausgegriffenen oder des noch im Verband des festen Körpers befindlichen Stückes betrachtet. Diese Oberflächenenergie verschwindet jedoch mit wachsendem Verhältnis des Volums zur Oberfläche des betrachteten Stückes.

gegenseitigen Entfernung der Teilchen) diejenigen Bausteine ab, die zum Aufbau einer gewissen (gegen die Gesamtzahl der vorhandenen Materie kleinen) Anzahl von Molekeln desjenigen Stoffes nötig sind, dessen „freie Energie im festen Körper" wir definieren wollen. Diese herausgegriffenen Bausteine setzen wir dann zu der Molekel zusammen, deren freie Energie im festen Körper wir untersuchen wollen, und zwar soll sich dabei diese Molekel in einem gewissen eindeutigen Energiezustand y befinden, auf dessen Definition wir weiter unten zurückkommen.

Zur vollständigen Bestimmung der freien Energie unserer Molekel im festen Körper haben wir aber noch eine andere Energiefunktion zu betrachten, die des „verarmten Restbestandteiles". In der Tat ist für diesen, nachdem die betreffenden Teilchen abgesondert sind, von neuem eine Energiefunktion eindeutig definiert, folglich bei gegebenem Volumen und gegebener Temperatur auch eine frei Energie (bis auf die Konstante a). Setzen wir nun fest, daß das Volumen[1]) und die Temperatur ebensogroß seien wie vorher die des aus dem festen Körper herausgegriffenen Stückes, und daß die Konstante a wiederum durch die Gleichung (1) definiert sei[2]), so haben wir die freie Energie des „verarmten Restbestandteiles" wiederum eindeutig definiert.

Nun bleibt aber noch ein letzter Schritt übrig: Der verarmte Restbestandteil ist wieder in den Verband des festen Körpers einzuführen. Ist der Restbestandteil im ganzen neutral, so ist hierbei nur noch die Energiefunktion zu betrachten, die auf der Wechselwirkung der Oberflächenteilchen des Restbestandteiles mit den Oberflächenteilchen des Hohlraums im ursprünglichen Körper beruht. Dieser Teil der Energie-

1) Wenn, wie wir angenommen hatten, die Zahl der abgetrennten Teilchen klein ist im Verhältnis zur gesamten herausgegriffenen Materie, so läßt sich leicht zeigen, daß eine etwaige Verkleinerung des Volums, der der Restbestandteil bei dem gegebenen äußeren Druck zustrebt, keine merkliche Korrektur bedingt.

2) In dieser zweimaligen Anwendung der Gleichung (1) ist das Nernstsche Theorem noch nicht enthalten. Es würde erst dann in Erscheinung treten, wenn man die abgetrennten Molekeln in einem festen Körper von anderer Zusammensetzung wie der ursprüngliche kondensierte, und auf die freie Energie der Molekel in bezug auf diesen zweiten festen Körper von neuem die Gleichung (1) anwendete.

funktion ist aber, wie wir schon oben bemerkten, zu vernachlässigen, wenn man das Volumen groß genug gegen die Oberfläche wählt.

Ferner tritt, auch nachdem der Kontakt zwischen dem verarmten und dem vollwertigen Teil des festen Körpers hergestellt ist, keine nachträgliche Veränderung der freien Energie ein, da angenommen werden kann, daß die Abweichung vom Gleichgewichtszustande beliebig klein ist.

Wohl aber ist noch ein konstantes Zusatzglied in der Energiefunktion und damit auch in der freien Energie zu berücksichtigen, wenn der abgetrennte Bestandteil geladen (und der Restbestandteil infolgedessen dann entgegengesetzt geladen) ist.[1]) Wenn, was wir der Allgemeinheit wegen annehmen müssen, an der Grenze des festen Körpers und im Dampfraum freie Ladungen, demnach elektrische Felder und verschiedene Potentialwerte angenommen werden müssen, so ist die „freie Energie eines geladenen Bestandteiles in bezug auf den festen Körper" verschieden je nach dem Potential φ, auf dem sich nach der Trennung der herausgegriffene Bestandteil befindet. In unserer Betrachtung macht sich dies folgendermaßen geltend: Das herausgegriffene Stück des festen Körpers war nach unserer Voraussetzung nach einem weit entfernten feldfreien Raum gebracht und dort in die kleinsten Bestandteile (d. h. die größten Bestandteile, die bei allen zu betrachtenden Prozessen ganz unverändert bleiben) dissipiert worden. Da der Körper im ganzen neutral angenommen wurde, so war es hierbei gleichgültig, welches Potential gegen das Innere des festen Körpers man diesem Raum zuschreibt. Auch nach der Absonderung der geladenen Bestandteile sind alle diejenigen Potentialunterschiede belanglos, die bei der Herstellung des Endzustandes von den beiden entgegengesetzt geladenen Bestandteilen in gleicher Weise durchlaufen werden; wohl aber kommt der Potentialunterschied der Orte in Frage, an denen sich schließlich der (beispielsweise negativ geladene) Gasbestandteil und der (positiv geladene) Restbestandteil befinden. Der durch diese Trennung der Ladungen bewirkte Energie-

1) Allgemeiner: Wenn zwischen den von uns herausgegriffenen und den übrigen Bestandteilen des Gesamtsystems Wechselwirkungen bestehen, die nicht im wachsenden Verhältnis des Volums zur Oberfläche des herausgegriffenen Stückes verschwinden.

unterschied gegenüber dem Anfangszustand ist offenbar gleich der Ladung des abgesonderten Restandteiles, multipliziert mit dem Potentialunterschied $\varphi - \varphi^{01})$ der betreffenden Stelle des Gasraumes gegenüber dem Inneren des festen Körpers, und zwar sind bei der Bestimmung dieser beiden Potentialwerte nur die Coulombschen Kräfte derjenigen Ladungen zu berücksichtigen, die sich außerhalb des im Endzustande von den beiden Restandteilen eingenommenen Raumes befinden, da alle Kräfte innerhalb dieser Systeme in den Energiefunktionen bereits mit berücksichtigt sind. Von einer Wechselkraft des Gasteiles auf den entgegengesetzt geladenen festen Rest kann man dabei absehen, sofern, wie wir immer vorausgesetzt haben, die Zahl der abgesonderten Restandteile genügend klein ist. Durch dieselbe Festsetzung kann man erreichen, daß der verarmte feste Restandteil mit hinreichender Genauigkeit noch durch denselben Potentialwert φ^0 charakterisiert werden kann wie der feste Körper in seinem Anfangszustand. Es ist dann dieser Wert auch mit dem *Mittelwert* des Potentials im Innern des festen Körpers identisch, wie sich leicht zeigen läßt.

Die „freie Energie eines (geladenen) Restandteiles in bezug auf den festen Körper" ist also schließlich durch den Vergleich folgender 4 Terme zu gewinnen: 1. Totale freie Energie F' eines genügend großen neutralen homogenen Stückes des festen Körpers in bezug auf einen vorgeschriebenen Nullzustand 2. Energie $n \cdot y$ des zu dem gewünschten Elementarsystem (Molekel) vereinigten abgetrennten Restandteiles gegenüber dem Nullzustand (n = Zahl der gebildeten Molekeln, y Nullenergie einer solchen Molekel, gemessen gegen den gewählten Dissipationszustand ihrer Bausteine [s. w. u.]). 3. Freie Energie F' des verarmten Restbestandteiles gegenüber einem nach Abtrennung der betreffenden Restandteile geschaffenen Nullzustand. 4. Bei geladenen Körpern Unterschied der mittleren elektrostatischen Energie des abgetrennten Restandteiles gegenüber dem in den Körper zurückversetzten verarmten Restbestandteil $n \nu \varepsilon (\varphi - \varphi^0)$. ($\nu$ Zahl der Elementarladungen ε einer Molekel, eine Zahl, die positiv, negativ oder Null sein kann.)

1) Da eine ganze Anzahl verschiedenartiger Indexbezeichnungen verwendet werden sollen, müssen wir auch den Raum rechts oben für Indizes in Anspruch nehmen.

Der Unterschied der freien Energie vor und nach[1]) Abtrennung der betrachteten Molekeln (bzw. ihrer Bausteine) aus dem festen Körper ergibt sich durch Zusammensetzung dieser Terme mit richtigen Vorzeichen in folgender Weise:

$$\Delta F = F' - n\,y - F'' + n\,\nu\,\varepsilon\,(\varphi^0 - \varphi). \tag{2}$$

Ehe wir hier weiter gehen, wollen wir nun noch einen Punkt nachholen, der den Gedankengang, der zur Gleichung (2) führte, unterbrochen hätte, nämlich die Definition des inneren Energiezustandes der herausgenommenen Bestandteile, also die Definition der Größe y. Vom chemischen Standpunkte ist eine Molekel in unserem Sinne vollständig definiert, wenn ihre Bausteine (positive Kerne, Elektronen) gegeben sind und die Art, wie diese Bausteine zusammengesetzt sind. Es ist dann zwar noch denkbar, daß bei verschiedenen Temperaturen der innere Zustand eines solchen Systems verschieden ist; wählen wir jedoch den absoluten Nullpunkt als Bezugszustand, so ist die Gruppierung und demnach auch die innere Energie y für jeden derartigen Bestandteil eindeutig festgelegt. (Wie wir aus der Quantentheorie wissen, brauchen dabei die verschiedenen Bausteine des Bestandteiles durchaus nicht gegeneinander in Ruhe zu sein, sondern können gewisse Quantenbahnen durchlaufen: kinetische Nullpunktsenergie.)

Einfacher werden jedoch die Gleichungen und weitergehend die Resultate, wenn man an Stelle der chemischen Definition einer Molekel (gemäß welcher bei höheren Temperaturen noch verschiedene Quantenzustände möglich sind) gleich die quantenmäßige Definition setzt, d. h. als eine Molekel der herausgegriffenen Art nur eine solche betrachtet, die sich in einem ganz bestimmten quantenmäßig definierten Energiezustand befindet.[2]) Wir stellen uns dann mit Einstein[3]) vor, daß jeder Bestandteil nur eine gewisse Anzahl diskreter Zustände $Z_1, Z_2 \ldots, Z_n$ annehmen könne, die durch

---

1) D. h. die freie Energie soll im Anfangszustand um ΔF größer sein als im Endzustand.

2) Die Möglichkeit dieser Betrachtungsweise ist übrigens nicht an die Voraussetzungen der Quantentheorie gebunden; nur werden alle Rechnungen und Definitionen bei der Annahme kontinuierlicher Übergänge etwas komplizierter.

3) Verh. d. D. Phys. Ges. 18. S. 320. 1916.

die Energien $y_1\, y_2 \ldots y_n$ gekennzeichnet sind. Die Energie y_1 des Quantenzustandes Z_1 kleinster Energie muß sich hierbei mit der Energie der betreffenden chemisch definierten Molekel beim absoluten Nullpunkt decken; die chemische und die entsprechende niedrigst-quantige Molekel besitzen also auch denselben Wert von ΔF. (Unterschiede treten erst auf, wenn die freie Energie dieser Bestandteile in der Gasphase untersucht wird, vgl. § 4 und 5.) Andere Werte von y und von ΔF treten jedoch auf, wenn der Bestandteil durch den Zustand Z_2 usw. definiert wird; als Differenzen $y_m - y_n$ zwischen den verschiedenen Energiezuständen treten dann die Größen auf, die aus der Theorie der Serienspektren wohl bekannt sind. Die größtmögliche Energiedifferenz, die vorkommen kann, ist die Ionisierungsarbeit (oder eine andere Dissoziationsarbeit); in diesem Falle wird man aber im Endzustand Z_e die Molekel nicht mehr als einheitlich ansehen, sondern durch die Eigenschaften der einzelnen Bestandteile charakterisieren, die nunmehr als neue Molekeln auftreten.[1])

1) *Anm. bei der Korrektur.* In diesen Betrachtungen ist, wie man bemerken wird, vorausgesetzt, daß die innere *freie* Null- bzw. Quantenenergie der betreffenden Molekeln gleich deren innerer *Total*energie (gegenüber dem Dissipationszustande) ist. Ob diese Annahme zutrifft oder nicht, kann nicht durch thermodynamische, sondern nur durch quantentheoretisch-statistische Betrachtungen analysiert werden. Wie wir später (§ 6) sehen werden, hängt diese Frage mit der Bestimmung der „Gewichtskonstanten" von Quantenzuständen zusammen. Nun können ganzzahlige Gewichtskonstanten auch unter Beibehaltung der obigen Hypothese dadurch eingeführt werden, daß man verschiedene (etwa durch einen Umlaufssinn voneinander unterscheidbare) Zustände Z_m, Z_m', Z_m'' usw. mit derselben Energie y_m annimmt. Sollen noch andere Arten von ganzzahligen, oder gebrochene Gewichtskonstanten eingeführt werden, so wird man jedoch nicht mehr die innere freie Energie eines Quantenzustandes mit seiner inneren Totalenergie identifizieren dürfen, und es sind dann statt der Größen y, y_m die inneren freien Energien pro Molekel

$$\eta = y - kT \ln p\,, \quad \eta_m = y_m - kT \ln p_m$$

oben einzusetzen, wobei die p die Gewichtskonstanten, k die elementare Gaskonstante bedeutet.

Entsprechendes gilt für die molaren Größen [in Gl. (3) bis (5)]. Dort ist statt der inneren molaren Totalenergie des Nullzustandes oder eines Quantenzustandes Z_m die entsprechende innere freie Energie

$$H = Y - RT \ln p\,, \quad H_m = Y_m - RT \ln p_m$$

einzuführen.

Nach dieser Abschweifung kehren wir nunmehr zu unserer Gleichung (2) zurück, indem wir versuchen, diese Gleichung nicht auf eine willkürliche kleine Zahl n von Bestandteilen, sondern auf eine Grammolekel zu beziehen.

Bei den mit n multiplizierten Gliedern ist dieser Übergang sehr einfach, indem statt n die Zahl N der Molekeln im Mol gesetzt wird. Die Größen F' und F'' sind dagegen nicht der Zahl der abgetrennten Teilchen proportional; wohl aber kann dies bezüglich der Differenz $F' - F''$ angenommen werden, solange die Zahl der abgetrennten Teilchen klein ist gegenüber der in dem betreffenden Stück des festen Körpers enthaltenen Materie. Wie man leicht einsieht, spielt dann auch die Größe des betrachteten Stückes des festen Körpers keine Rolle mehr. Es kann also $F' - F'' = n \times$ einer Größe $\partial F''$ gesetzt werden, welche die Zunahme der freien Energie des Reststückes bei Hinzufügung der Bausteine einer der betrachteten Molekeln zu diesem Reststück bedeutet; $\partial F''$ wird, wie F' und F'' selbst, im allgemeinen eine negative Größe sein. Für ein Mol kann dann auf den Ausdruck $N\,\partial F''$ extrapoliert werden. Bezeichnen wir die auf ein Mol der abgetrennten Molekeln bezogene freie Energie dieser Molekeln in bezug auf den festen Körper mit μ, so erhalten wir also aus (2):

$$\mu = N\,\partial F'' - N\,y + N\,\nu\,e\,(\varphi^0 - \varphi). \tag{3}$$

Hier beziehen sich die beiden ersten Glieder der rechten Seite auf Nahewirkungen, das letzte ist durch elektrostatische Fernwirkungen (zu denen z. B. noch Gravitationswirkungen hinzukommen könnten) verursacht. Dementsprechend wollen wir die Terme $N\,\partial F''$ und $N\,y$ unter der Bezeichnung μ^0 (durch Nahewirkungen verursachte oder auch „natürliche freie Energie") zusammenfassen; für die Nullpunktsenergie $N\,y$ pro

Setzen wir definitionsweise fest, daß der Index m des Quantenzustandes nur dann fortrücken soll, wenn die Energie sich ändert (so daß also die eben betrachteten Zustände Z_m, Z_m', Z_m'' alle zu demselben Zustand Z_m gerechnet werden), so bleibt übrigens die obige Beziehung ΔF (chemisch) $= \Delta F_1$ (1. Quanten-Energiezustand) bestehen, da dann nicht nur $Y = Y_1$, sondern auch $p = p_1$ gesetzt werden muß. Bei der chemischen Definition der Molekel ist dann nämlich der Nullpunktszustand durch die Summe aller Quantenzustände 1 kleinster Energie gegeben, also gleich dem Zustand Z_1. — Ich darf bemerken, daß ich auf die hier notwendige Berücksichtigung von Gewichtskonstanten durch ein Gespräch mit Einstein aufmerksam geworden bin.

Mol, die in bezug auf den gewählten Dissipationszustand im allgemeinen eine negative Größe sein wird, führen wir noch die Bezeichnung Y ein. Es wird dann:

$$\mu^0 = N\,\partial F' - Y. \tag{4}$$

Bezeichnen wir endlich noch die Ladung N_s eines Mols einwertiger positiver Ionen mit E, so wird:

$$\mu = N\,\partial F' - Y + \nu E\,(\varphi^0 - \varphi) \tag{5}$$

oder

$$\mu = \mu^0 + \nu E\,(\varphi^0 - \varphi). \tag{6}$$

Es setzt sich also die freie Energie einer elektrisch geladenen Molekel in bezug auf den festen Körper aus zwei recht ungleichen Bestandteilen zusammen. Die natürliche freie Energie μ^0 ist eine thermodynamische Größe im gewöhnlichen Sinne; sie ist durch die inneren Eigenschaften des festen Körpers und der betrachteten Molekel vollkommen gegeben, und ist insbesondere bei solchen festen Körpern, deren innere Eigenschaften in einiger Entfernung von der Oberfläche vom Zustand in den benachbarten Phasen unabhängig sind, eine reine Funktion von Temperatur und Volumen. Anders dagegen das zweite Glied $\nu E\,(\varphi^0 - \varphi)$ der freien Energie, das, wie wir sahen, von „Fernwirkungen" berührt. Für dieses ist, etwas schroff ausgedrückt, die Verteilung der elektrischen Ladungen in der ganzen Welt maßgebend, und es sind vorwiegend die in den Grenzschichten auftretenden Ladungen, ferner aber auch äußere angelegte Felder und Raumladungen im Dampfraum zu berücksichtigen, um den Potentialunterschied $\varphi^0 - \varphi$ zwischen zwei Punkten im Inneren des festen Körpers und im Außenraume bestimmen zu können. Charakteristisch ist dabei, daß in unserer Formel (4) und demnach auch in unseren Dampfdruckformeln die Wirkung von in den Grenzschichten angesammelten Ladungen durchaus keine andere Rolle spielt als von im Dampfraum vorhandenen Raumladungen; unsere Formel hat also den Vorzug gegenüber allen früheren, von der Einführung einer scharfen Grenze zwischen festem Körper und Dampfraum überhaupt unabhängig zu sein.

Zu einer anderen Frage, die einem bei der Diskussion der Bedeutung von μ immer wieder entgegentritt, ist noch eine

Bemerkung notwendig. Der von uns in der beschriebenen Weise vorgenommene Prozeß, der zur Entfernung einer Anzahl geladener oder ungeladener Teilchen aus dem Inneren des festen Körpers und zu ihrer Fortführung nach einem Ort mit dem Potential φ geführt hat, läßt sich auch auf dem in der Natur wirklich durchlaufenen Wege verfolgen, auf welchem die Teilchen einfach durch die Grenzschicht des festen Körpers hindurch in den Außenraum dringen. Wir fragen, wie und wo sich die beiden Teile der durch Gleichung (4) ausgedrückten Änderung der freien Energie des Systems bei diesem Prozeß geltend machen.

Die wesentlichen Züge des Vorganges treten schon beim absoluten Nullpunkt hervor, wo der Energiezustand einer Molekel im Innern und außerhalb des festen Körpers als eindeutig betrachtet werden kann. Am interessantesten ist es nun, die Energieänderung zu verfolgen, wenn ein *Elektron* aus dem Innern des festen Körpers nach außen gebracht wird. Um ein solches Teilchen im Inneren des festen Körpers fortzubewegen, bedarf es keines Energieaufwandes; man könnte das Teilchen z. B. einfach mit einem in gleicher Lage in der Nähe der Oberfläche gelegenen seinen Platz tauschen lassen. Eine Änderung der Gesamtenergie findet erst statt, wenn das Teilchen beim Durchgang durch die Grenzschicht Lagen einnimmt, die vorher nicht von einem Elektron eingenommen werden konnten. Jetzt tritt gleichzeitig dreierlei ein: Erstens hat das Elektron seine potentielle Energie in bezug auf seine unmittelbare Umgebung geändert, zweitens haben sich in der unmittelbaren Umgebung der Durchtrittsstelle die verschiebbaren elektrischen Teilchen des festen Körpers (Polarisations- oder Leitungselektronen) in einen neuen Gleichgewichtszustand eingestellt, der von dem ursprünglichen abweicht und damit eine Änderung der Eigenenergie dieser Teilchen bedingt, und drittens gerät das Teilchen nunmehr in den Bereich der elektrostatischen Fernkräfte, die von äußeren Körpern und von einer etwaigen an der Grenze vorhandenen Doppelschicht, die auch beim absoluten Nullpunkt nicht zu verschwinden braucht, herrühren.[1]) (Man überzeugt sich leicht, daß auch die elektro-

1) Diese Einteilung läßt sich in Parallele setzen mit einer 1891 von M. Planck eingeführten (Wied. Ann. 44. S. 383. 1891) in elektromolekulare, molekulare und elektrostatische Energie. Es bestehen

statischen Kräfte der Doppelschicht, durch die das Elektron hindurchpassiert, als Fernkräfte gedeutet werden können, insofern als die gesamte Energiebilanz beim Austritt nicht dadurch beeinflußt wird, wenn in der unmittelbaren Umgebung der Austrittsstelle die Doppelschicht entfernt wird.)

Da in dieser Einteilung der 3. Bestandteil durch $\nu E(\varphi^0 - \varphi)$ dargestellt wird, so folgt, daß die Bestandteile 1 und 2 der Energieänderung in dem Glied μ^0 der Gleichung (6) enthalten sein müssen. In 1 und 2 ist also auch die Bildkraftwirkung enthalten, d. h. die Bildkraft liefert einen bestimmten Beitrag zur natürlichen freien Energie. (Denn es ist klar, daß eine besondere Bildkraftwirkung neben den Termen, die sich aus unserer Berechnung von μ^0 nach dem ersten Schema ergeben, nicht berücksichtigt zu werden brauchte.) Nur für die Untersuchung der Gleichgewichte und Ladungsdichten in den Grenzflächen (also auf diesem Umwege auch bei der Berechnung des Potentialunterschiedes $\varphi^0 - \varphi$) spielt die Bildkraft eine Rolle.

§ 2. Freie Energie und Ionisierungsarbeit.

Die Zerlegung der „freien Energie einer Molekel in bezug auf die feste Phase", wie sie durch die Gleichungen (2) bis (6) ausgedrückt ist, gibt bereits Anlaß zur Aufstellung verschiedener wichtiger Beziehungen.

Wir vergleichen die Änderung $-\partial F'$ der freien Energie des Restkörpers, wenn eine neutrale Molekel (z. B. ein Atom) abgetrennt wird, mit den Änderungen der freien Energie des Restkörpers, wenn zwei einzelne Unterbestandteile dieser neutralen Molekel, die selbst wieder als Molekeln auftreten, nacheinander abgetrennt werden (z. B. Elektronen und positive Ionen; wir legen dabei vorläufig die chemische Definition der Molekeln zugrunde, vgl. S. 137). Sind im Endeffekt in beiden Fällen dieselben Bausteine aus dem Restkörper entfernt, so muß die Änderung der freien Energie des Restkörpers auch in beiden Fällen die gleiche sein.

jedoch bemerkenswerte Unterschiede; insbesondere kann bei uns beim Austritt eines geladenen Teilchens auch eine Änderung der „molekularen" Energie eintreten, während diese bei Planck als konstant angesehen wird. Schon 1915 habe ich übrigens in einem andern Falle gezeigt, daß die Nichtberücksichtigung einer veränderlichen Eigenenergie des Metalles zu Fehlschlüssen in der Literatur geführt hat (Richardson; vgl. Ber. d. D. Phys. Ges. 1915, S. 109—121).

Bezeichnen wir die neutrale Molekel durch ein (×), die aus dem positiven Unterbestandteil gebildete Molekel durch ein (+)-Zeichen, die aus dem negativen gebildete durch ein (−)-Zeichen, so gilt also, wenn noch überall das Vorzeichen umgekehrt wird, die Gleichung:

$$\partial F^{\nu\times} = (\partial F^{\nu+} + \partial F^{\nu-}), \tag{7}$$

Nun ist nach (5)

$$N\,\partial F^{\nu} = \mu + Y + \nu E(\varphi^0 - \varphi).$$

Wird diese Gleichung nacheinander auf die neutrale Molekel ($\nu = 0$), auf die positive Molekel ($\nu = +1$) und die negative ($\nu = -1$) angewandt, und werden diese Beziehungen in Gleichung (7) eingesetzt, so folgt:

$$\mu^{\times} + Y^{\times} = \mu^{+} + Y^{+} + E(\varphi^0 - \varphi) + \mu^{-} - Y^{-} - E(\varphi^0 - \varphi),$$

also:

$$\mu^{+} + \mu^{-} = \mu^{\times} + Y^{\times} - (Y^{+} + Y^{-}).$$

Nun bezeichnet $Y^{\times} - (Y^{+} + Y^{-})$ gemäß unserer chemischen Definition der Molekeln den Energieunterschied pro Mol, der beim absoluten Nullpunkt zwischen den (ruhenden und unendlich weit voneinander getrennten) neutralen Molekeln und ihren geladenen Komponenten vorhanden ist. Das ist aber, wenn es sich um die Zusammensetzung eines Elektrons und eines Ions zu einem neutralen Atom handelt, die negative Ionisierungsarbeit J:

$$J = Y^{+} + Y^{-} - Y^{\times};$$

handelt es sich um die Dissoziation eines Moleküls, z. B. NaCl, so ist es die Trennungsarbeit dieses Gebildes usw. Wir erhalten also immer eine Gleichung von der Form[1]):

$$\mu^{+} + \mu^{-} = \mu^{\times} - J, \tag{8}$$

---

1) *Anm. bei der Korrektur.* Werden statt der Größen Y allgemeiner die Größen H eingeführt (Anm. S. 138, 139), in denen noch die Gewichtskonstanten der Nullpunkts-Quantenzustände berücksichtigt sind, so lautet Gleichung (8):

$$\mu^{+} + \mu^{-} = \mu^{\times} - (J - RT \ln p^{+}p^{-}/p^{\times}),$$

und die Gleichungen (8^1), (8^2), (8^3) und (9) erhalten entsprechende Zusatzglieder. Gleichung (11) bekommt die Form:

$$\mu_m - \mu_n = -(Y_m - Y_n) + RT \ln p_m/p_n.$$

desgleichen bei der Trennung in doppelt geladene Molekeln

$$(8^1) \qquad \mu^{++} + \mu^{--} = \mu^{\times} - J,$$

wobei J die Trennungsarbeit der doppelt geladenen Bestandteile voneinander bedeutet; oder bei Trennung zweier gleicher einfach geladener Bestandteile von einem doppelt geladenen (z. B. Cu^{++} mit zwei Elektronen):

$$(8^2) \qquad \mu^{++} + 2\mu^{-} = \mu^{\times} - J.$$

Hierbei wäre J die Arbeit, die bei Abtrennung zweier Elektronen vom neutralen freien Atom zu leisten ist.

Aber nicht nur bei der Zerlegung neutraler Molekeln in ihre geladenen Komponenten, sondern auch bei der weiteren Zerlegung bereits geladener Molekeln in anders geladene Bestandteile fallen die vom Potential abhängigen Glieder aus diesen Beziehungen heraus. So gilt z. B., wie man sich leicht überzeugt, für die Zerlegung eines positiv einwertigen Ions in einen doppelt positiv geladenen und einen einfach geladenen negativen Unterbestandteil:

$$(8^3) \qquad \mu^{++} + \mu^{-} = \mu^{+} - J.$$

wobei diesmal J die Arbeit bedeutet, die bei Abtrennung eines negativen Bestandteiles (z. B. eines zweiten Elektrons) aus einer bereits einfachen positiv aufgeladenen Molekel (z. B. Cu^{+}-Ion) zu leisten ist.

Wir finden also: trotzdem die freie Energie geladener Molekeln in bezug auf eine feste Phase von dem elektrischen Potential abhängt, auf das man die betreffende freie Energie bezieht, so lassen sich doch gewisse algebraische Kombinationen dieser Größen (und zwar solche, für die die algebraische Summe der in Betracht kommenden Ladungen $= 0$ ist) durch eine nur von der inneren Energie der verschiedenen Teile beim absoluten Nullpunkt abhängige Größe J ausdrücken.

Ziehen wir in den Gleichungen (8) von den freien Energien μ überall die entsprechenden Glieder $\nu E(\varphi^0 - \varphi)$ ab, so bleibt dadurch, wegen $\Sigma \nu = 0$ die Richtigkeit dieser Gleichungen ungeändert. Nach (6) stehen dann aber überall statt der gesamten freien Energie die natürlichen freien Energien in den Gleichungen, also z. B.

$$(9) \qquad \mu^{0+} + \mu^{0-} = \mu^{0\times} - J,$$

eine Gleichung, die sich wegen $\mu^{0\times} = \mu^{\times}$ auch direkt aus der Tatsache hätte ableiten lassen, daß wegen $\nu^{+} = -\nu^{-}$

$$\mu^{+} + \mu^{-} = \mu^{0+} + \mu^{0-} \tag{10}$$

ist. Alle diese Beziehungen spielen bei den späteren Dampfdruckbetrachtungen eine wichtige Rolle.

Noch einfachere Gleichungen gelten zwischen den freien Energien μ_m, μ_n der verschiedenen Quantenzustände desselben chemischen Bestandteiles. Da für alle derartigen Quantenzustände Z_1, Z_2 usw. die Größe ∂F^{ν} denselben Wert hat und ebenso die Wertigkeit ν der Molekel ungeändert bleibt, so gilt nach Gleichung (5):

$$\mu_m - \mu_n = -(Y_m - Y_n), \tag{11}$$

wobei Y_m und Y_n die Energieunterschiede pro Mol gegenüber dem in § 1 zugrunde gelegten Dissipationszustande bedeuten.[1]) Noch direkter findet man, daß Gleichung (11) auch für die natürlichen freien Energien μ^0 in den Zuständen Z_m und Z_n gilt.

§ 3. Galvanische und Voltasche Spannungsreihe.

Eine andere Überlegungsreihe, die sich hauptsächlich auf die Beziehungen (6) stützt, führt zur Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen natürlicher freier Energie und den Kontaktpotentialen an der Berührungsfläche zweier Medien.

Wir nehmen an, an Stelle der einen festen Phase, die wir bisher betrachtet haben, seien zwei solche Phasen vorhanden; beiden Phasen sei ein Bestandteil (z. B. das Elektron) gemeinsam. Ferner wird angenommen, daß im Innern der festen Phasen der Zustand von den in den übrigen vorhandenen Phasen unabhängig sei, und endlich, daß in bezug auf den betrachteten Bestandteil, der mehreren Phasen gemeinsam ist, echtes Gleichgewicht herrscht, wie es z. B. bei den Elektronen in Metallen der Fall ist. Dann muß die freie Energie μ_1 des betreffenden (im Dampfraum als Molekel auftretenden) Bestandteiles in der festen Phase 1, bezogen auf einen beliebigen

1) Daß ich hier der Bequemlichkeit halber zur Charakterisierung der Art des Bestandteiles auch einmal den unteren Index benutze, der im übrigen (vgl. den folgenden §) zur Kennzeichnung der festen Phase, auf die sich die freie Energie der Molekel bezieht, vorbehalten bleiben soll, wird hoffentlich zu keinen Verwechslungen Anlaß geben.

Punkt P des Dampfraumes dieselbe sein wie die freie Energie μ_2 desselben Bestandteiles in bezug auf die feste Phase 2.

$$\mu_1 = \mu_2 . \tag{12}$$

Ist der betrachtete Bestandteil geladen und herrscht im Inneren der festen Phase 1 das konstante mittlere Potential φ_1^0, im Inneren der anderen festen Phase das Potential φ_2^0, so folgt aus (12) und (6)

$$\begin{cases} \mu_1^0 + \nu E(\varphi_1^0 - \varphi) = \mu_2^0 + \nu E(\varphi_2^0 - \varphi), \\ \varphi_2^0 - \varphi_1^0 = \dfrac{\mu_2^0 - \mu_1^0}{-\nu E} . \end{cases} \tag{13}$$

Sind insbesondere die festen Phasen zwei verschiedene Metalle und die betrachteten Bestandteile Elektronen, so ist (wegen $\nu = -1$)

$$\varphi_2^0 - \varphi_1^0 = \frac{\mu_2^{0-} - \mu_1^{0-}}{E} . \tag{14}$$

Die Gleichung (14) (wie auch schon 13) enthält nun keine Beziehung mehr auf den Punkt P des Außenraumes, sondern verknüpft nur die mittleren Potentiale im Innern verschiedener Metalle mit der natürlichen freien Energie der Elektronen in den beiden Metallen. Die Potentialdifferenz ist mit anderen Worten, wie es sein muß, unabhängig vom Zustand im Außenraum; sie muß ja auch im thermischen Gleichgewichtszustand unabhängig davon sein, ob sich die Metalle berühren oder nicht. Die Größe $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ gibt also auch direkt den Potentialsprung an der Berührungsfläche zweier Metalle, d. h. die galvanische Spannungsdifferenz zweier Metalle an. Wir erhalten mithin folgenden Satz:

„*Die galvanische Spannungsdifferenz an der Berührungsfläche zweier Metalle ist durch die Unterschiede der natürlichen freien Energien der Elektronen in beiden Metallen bestimmt.*"

Durch diesen Satz ist, da die natürlichen freien Energien bei gewöhnlichen Temperaturen nicht allzusehr von den Energieunterschieden beim absoluten Nullpunkt abweichen werden, die Möglichkeit einer angenäherten Berechnung der galvanischen Kontaktpotentiale aus den Annahmen über die Struktur der Metalle beim absoluten Nullpunkt gegeben (z. B.

mit Hilfe der Born-Haberschen Gittertheorie[1]) oder ähnlicher Betrachtungen). Da nach allem, was wir wissen, durchaus kein Grund für die Annahme besteht, daß die Abweichungen der Größen μ^0- voneinander für die verschiedenen Metalle von kleinerer Größenordnung sein sollten als die Größen μ^0- selbst, und da die Größen μ^0-, wie wir aus Sättigungsstrommessungen folgern können (vgl. § 9), von der Größenordnung 3—5 Volt sind, so wäre nach Gleichung (14) anzunehmen, daß an der Berührungsstelle zweier Metalle Potentialsprünge von der Größenordnung von 1—2 Volt auftreten können. Diese Aussage gilt ebenso wie für alle endlichen Temperaturen auch für den absoluten Nullpunkt.

Wegen des theoretischen Interesses, das die Frage nach dem Kontaktpotential der Metalle von jeher gefunden hat, möchte ich hier auf eine frühere Beweisführung, die anscheinend zu dem entgegengesetzten Resultat führte, kurz eingehen. Man hat sich durch die Betrachtungsweise O. W. Richardsons daran gewöhnt, das Innere des Metalles sich ebenso von Elektronendampf erfüllt zu denken wie den Außenraum, und nur an der Grenzschicht zwischen Metall und Vakuum eine „Austrittsarbeit" anzunehmen. Es liegt sehr nahe, diese Austrittsarbeit durch den Unterschied einer gewissen potentiellen Energie χ im Innern des Metalles (χ^0) und an der Grenze des Außenraumes (χ^a) zu erklären, also den Potentialunterschied $\chi^a - \chi^0$ gleich der Austrittsarbeit w zu setzen. Die Differenz für zwei Metalle würde dann den Unterschied der potentiellen Energie der Elektronen in beiden Metallen angeben, der beim absoluten Nullpunkt genau und bei gewöhnlichen Temperaturen nahezu verschwinden müßte, also:

$$\chi_2^0 - \chi_1^0 \sim 0.$$

Dieser Gedankengang, der in ähnlicher Weise zuerst von P. Debye[2]), später von mir in meinem Bericht über thermische Elektronenemission[3]) vertreten worden ist, bleibt tatsächlich zurecht bestehen. Es ist nur die Bedeutung der Potentiale χ^0 eine andere als die von φ^0 in der vorliegenden Betrach-

1) M. Born, Verh. d. Deutschen Physik. Ges. **21**, S. 13. 1919; F. Haber, Berliner Ber. 1919. S. 494.

2) P. Debye, Ann. d. Phys. **33**. S. 473. 1910.

3) Jahrb. der Radioakt. u. Elektronik **12**. S. 173. 1915.

tung. Der Potentialsprung $\chi_2^0 - \chi_1^0$ in den früheren Betrachtungen ist eben keine reine Doppelschichtwirkung, sondern enthält noch Bestandteile, die auf „Strukturwirkungen" zurückzuführen sind. Die Gleichheit von χ_2^0 und χ_1^0 sagt in diesem Sinne nichts anderes aus, als daß die Verschiedenheiten der „Strukturpotentiale" in beiden Metallen durch die objektive elektrostatische Doppelschicht an der Berührungsfläche kompensiert werden. In der vorliegenden Arbeit wurde an Stelle des immerhin etwas speziellen Begriffes des Strukturpotentiales von vornherein der allgemeinere Begriff der „natürlichen freien Energie" eingeführt; dadurch ist die Gefahr der Verwechselung mit den mittleren elektrostatischen Potentialen vermindert. Als Doppelschicht wird demgemäß bei uns auch nur das aufgefaßt, was auch auf entfernte Punkte als solche wirkt. Würde man z. B. in einer galvanischen Kette, die durch einen Leiter von großem Widerstande geschlossen ist, den Potentialunterschied an den Enden dieses Leiters aus den an den Grenzen der verschiedenen Körper auftretenden elektrischen Doppelschichten berechnen, so würde man zu einem richtigen Resultat kommen, wenn man unsere Definition der elektrostatischen Potentiale φ^0 und unsere Potentialsprünge $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ einführt, dagegen zu einem falschen Resultat, wenn man statt dessen die Größen χ benutzt.[1]) Ein anderes Kriterium zur Unterscheidung der Potentiale φ und χ ist das, daß im Innern des festen Körpers φ für ganz beliebige geladene Bestandteile (positive, negative Ionen, Elektronen) dasselbe ist, während χ für jeden Bestandteil anders bestimmt wäre.

Vielleicht ist es auch für einige Leser nicht überflüssig, auf den Zusammenhang unseres Resultates [Gleichung (14)] mit den experimentellen Beobachtungen einzugehen. Die Peltierwärme Q_{12} gibt nach thermodynamischer Definition den

1) Die „χ-Definition" der Potentialunterschiede liegt offenbar auch einer Bemerkung von P. Debye (Ann. d. Phys. **33**, S. 473. 1910) über die Potentialdifferenz an der Berührungsstelle zweier Metalle zugrunde. Danach soll, wenn zwei Metalle miteinander verlötet sind, eine Austrittsarbeit nicht zu leisten sein und infolgedessen die Potentialdifferenz bis auf ein Korrekturglied verschwinden. Diese Bemerkung ist offenbar nur zutreffend, wenn man unter „Potentialen" die Summe von „Strukturpotentialen" und mittleren elektrostatischen Potentialen versteht.

Unterschied zwischen der Differenz der freien Energien $\mu_2^- - \mu_1^-$ — diese Differenz verschwindet im thermischen Gleichgewicht — und den wahren Energien $U_2 - U_1$ der Elektronen in beiden Metallen an. Beim absoluten Nullpunkt verschwindet der Unterschied zwischen freier und wahrer Energie. Die Differenz $U_2 - U_1$ wird ebenfalls $= 0$ und ebenso die Peltierwärme Q_{12}. Man erkennt aus der Betrachtung dieses Grenzfalles besonders deutlich, daß ein größenordnungsmäßiger Zusammenhang zwischen Peltierwärme und dem Potentialsprung an der Berührungsfläche nicht bestehen kann; denn die Gleichung $\mu_1^- = \mu_2^-$ (und für den absoluten Nullpunkt auch $U_1 = U_2$) ist ja zufolge den Gleichungen (12) bis (14) für ganz beliebige Werte der Differenzen $\mu_2^{0-} - \mu_1^{0-}$, also auch der Potentialsprünge $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ erfüllt.

Eine Abweichung von den Auffassungen von H. von Helmholtz und M. Planck (a. a. O., S. 141, 142, Anmerk.) besteht bei uns nur infolge des eingeführten Begriffes der natürlichen freien Energie, der etwas allgemeiner ist als die „spezifische Anziehung" bei Helmholtz und die „elektromolekulare Energie" (und Entropie) bei Planck.

Über die Kontaktsprünge, die an der Berührungsstelle eines Metalles mit einer wäßrigen Lösung seines Salzes auftreten, und die etwas außerhalb des Rahmens der hier verfolgten Betrachtungen fallen, sei nur so viel bemerkt, daß diese Potentialsprünge, wie schon K. Herzfeld[1]) hervorgehoben hat, nicht aus dem Gleichgewicht der Elektronen in beiden Phasen zu berechnen sind, da für Elektronen in Wirklichkeit kein Gleichgewicht herrscht (unechte Gleichgewichte). Es ist hier der Potentialunterschied zwischen beiden Phasen vielmehr durch die Unterschiede der natürlichen freien Energie der Metallionen $\mu^{0+}_{\text{Metall}} - \mu^{0+}_{\text{Lösung}}$ bestimmt. Nur dadurch, daß eine solche Gleichung an den verschiedenen Grenzflächen einer geschlossenen galvanischen Kette nicht durchweg für *denselben* Bestandteil gilt, wird überhaupt das Auftreten einer resultierenden elektromotorischen Kraft möglich.

Von der *galvanischen* Spannungsdifferenz $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ zweier Metalle wird gewöhnlich unterschieden die *Volta*differenz $\varphi_2^g - \varphi_1^g$, die zwischen 2 Grenzflächen G_1 und G_2 im Außen-

1) K. Herzfeld, Ann. d. Phys. **56**. S. 151. 1918.

raume herrscht, die den beiden Metalloberflächen 1 und 2 nahe benachbart sind. In der Definition einer Voltadifferenz liegt offenbar eine gewisse Unbestimmtheit, insofern, als die genaue Lage der Grenzflächen G_1 und G_2 nicht angegeben werden kann, was in den Fällen, wo das Potential in unmittelbarer Nähe der Grenzfläche stark variiert, zu ganz verschiedenen Bestimmungen von $\varphi_2^g - \varphi_1^g$ je nach den gewählten Grenzflächen führen kann. Wie in solchen Fällen und infolge welcher Voraussetzungen dennoch ein einigermaßen definierter Wert von $\varphi_2^g - \varphi_1^g$ festzustellen ist, soll später (III. Teil) erörtert werden. In diesem Paragraphen umgehen wir diese Frage dadurch, daß wir für die Flächen G_2 und G_1 jede beliebige Potentialfläche außerhalb der Strukturspähre der Metalle zulassen. Es drückt sich dann $\varphi_2^g - \varphi_1^g$ durch die natürliche freie Energie der Elektronen und durch die „Potentialsprünge" $\varphi^g - \varphi^0$ zwischen der betrachteten Fläche G und dem Metallinnern folgendermaßen aus:

$$\varphi^g = (\varphi^g - \varphi^0) + \varphi^0$$

$$\varphi_2^g - \varphi_1^g = (\varphi_2^g - \varphi_2^0) + \varphi_2^0 - [(\varphi_1^g - \varphi_1^0) + \varphi_1^0],$$

oder wegen

$$\varphi_2^0 - \varphi_1^0 = \frac{\mu_2^{0-} - \mu_1^{0-}}{E} \quad \text{[Gleichung (13)!]},$$

$$(14^1) \quad \varphi_2^g - \varphi_1^g = \left[(\varphi_2^g - \varphi_2^0) + \frac{\mu_2^{0-}}{E}\right] - \left[(\varphi_1^g - \varphi_1^0) + \frac{\mu_1^{0-}}{E}\right].$$

Man sieht an dieser Gleichung, daß in allen Fällen echten Gleichgewichtes auch eine „Voltasche Spannungsreihe" existieren muß, die durch die Größen

$$\frac{\mu^{0-}}{E} + \varphi^g - \varphi^0$$

bestimmt ist. Diese Größen sind aber nichts anderes als die durch E dividierten und auf einen Punkt der Grenzfläche G bezogenen *totalen* freien Energien μ^{0-} der Elektronen. Wir erhalten also den Satz:

„Die Voltasche Spannungsdifferenz zwischen zwei äußeren Grenzflächen zweier leitender Körper ist durch die totale freie Energie der Elektronen in beiden Körpern in bezug auf die gewählten Grenzflächen bestimmt."

Fallen die Flächen G_2 und G_1 zusammen, so wird die Voltadifferenz $= 0$, wie es sein muß.

In den bereits erwähnten Fällen, wo sich die Größen $\varphi_2' - \varphi_1'$ bzw. die Größen $\varphi' - \varphi^0$ einigermaßen eindeutig definieren lassen, werden wir für diese „Potentialsprünge" $\varphi' - \varphi^0$ die Bezeichnung ψ einführen und auf die Bestimmung der Größen ψ etwas eingehen (III. Teil).

§ 4. Die freie Energie der Dampfphase.

Wir kehren nunmehr zu den Betrachtungen des § 1 zurück. Dort hatten wir „die freie Energie einer geladenen oder ungeladenen Molekel in bezug auf eine feste Phase und ein äußeres Potential φ" genau zu definieren versucht. Wir hatten dabei die Differenz zweier Zustände betrachten müssen, in deren erstem sich die Bausteine der betreffenden Molekel noch im Inneren des festen Körpers befanden, während sie sich im zweiten Zustand, zu der Molekel zusammengefügt, im Außenraume auf dem Potential φ befinden sollten. Die einzelnen Molekeln sollten hierbei noch in unendlich weiter Entfernung voneinander und in Ruhe sein; nur innerhalb der Molekeln konnten kinetische Nullpunkts- (oder sonstige eindeutige Quanten-)Energien auftreten.

Wenn wir nunmehr dazu übergehen wollen, die freie Energie zu bestimmen, die irgendeine Molekel im Dampfraum bei der Temperatur T und dem Potential φ im thermischen Gleichgewicht mit dem festen Körper besitzt, so müssen wir diese freie Energie offenbar auch auf den eben nochmals skizzierten Nullzustand beziehen. Die freie Energie einer Molekel in der Nähe eines Punktes P des Außenraumes, der sich auf dem Potential φ befindet, hängt dann im allgemeinsten Falle ab von den gegenseitigen Kräften, die die betrachteten Bestandteile aufeinander ausüben sowie von den Wechselkräften mit den andersartigen Bestandteilen, die sich noch an derselben Stelle des Raumes befinden. Um hier zu einer allgemeinen Definition der freien Energie zu gelangen, müßte man offenbar ganz ähnlich verfahren wie wir für den festen Körper verfahren sind. Im folgenden soll jedoch stets die vereinfachende Annahme gemacht werden, daß die Wechselenergie der Molekeln aufeinander und auf andersartige Molekeln nicht berücksichtigt zu werden braucht, daß wir also für jede betrachtete Molekel im Dampf-

raume den idealen Gaszustand[1]) voraussetzen können. Die freie Energie f pro Mol eines Bestandteiles hat dann folgende Form:[2])

$$(15) \qquad f = RT \ln c - RT\left(\tfrac{3}{2} \ln T + C\right) + f_i .$$

Hierbei bedeutet c die Konzentration[3]) in Mol pro ccm, R die bekannte Gaskonstante, C ist eine Konstante, die von der Wahl der Konstante a (§ 1) für den festen Zustand abhängt; wird diese so festgelegt, wie wir es durch Gleichung (1) getan haben, so läßt sich, wie in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten gezeigt worden ist[4]), die Konstante C mittels statistischer und quantentheoretischer Betrachtungen bestimmen und erhält den Wert:[5])

---

1) Für geladene Teilchen, insbesondere Elektronen, sind die Bedingungen hierfür von mir schon 1914 festgelegt (Physik. Zeitschr. 15. S. 872—878. 1914) und in letzter Zeit anläßlich der Kontroverse mit Hrn. v. Laue über das Elektronengas (Physik. Zeitschr. 20. S. 45, 46 u. S. 220—228. 1919) ausführlicher erörtert worden. Es ergibt sich hierbei eine gewisse Beziehung zwischen Konzentration und Temperatur, in die, wie ich zeigen konnte, auch eine neuerdings von Hrn. v. Laue auf Grund anderer Gedankengänge aufgestellte Formel (Ann. d. Phys. 58. S. 695—711. 1919) übergeht, sofern man dort statt eines beliebigen Volums das mittlere „Atomvolum" eines Elektrons einsetzt. Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch einmal ausdrücklich hervorheben, daß ein tatsächlicher Unterschied zwischen der so angewandten v. Laueschen Bedingung und der meinigen nicht besteht. Auch gebe ich gern zu, daß es nicht eigentlich eine Frage des physikalischen Taktes ist, ob man eine Ungleichheitsbedingung $a \ll b$ bereits durch $a < b$ oder erst durch $a < {}^1/_{100}\, b$ als erfüllt ansehen will, sondern daß die Entscheidung hierüber in jedem Fall sich nach der geforderten Genauigkeit bzw. den Versuchsbedingungen zu richten hat.

2) Vgl. z. B. M. Planck, Thermodynamik. 5. Aufl. S. 117.

3) In Plancks „Thermodynamik" bedeutet c das Verhältnis der molaren Menge eines Stoffes zur molaren Menge des gesamten Stoffes in der gleichen Phase. Ich hoffe, daß die Gleichartigkeit der Bezeichnung nicht zu Verwechslungen Anlaß geben wird.

4) Literatur vgl. bei M. v. Laue, Die Entropiekonstante der Glühelektronen. Jahrb. für Radiokt. u. Elektronik. 15. S. 259. 1918.

5) An dieser Stelle tritt das Nernstsche Theorem in unsere Voraussetzungen ein. Indem nämlich angenommen wird, daß die Konstante C einer bestimmten Art von Molekeln für ganz beliebige feste Phasen, in denen die Konstante der freien Energie durch

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=0} = 0$$

$$C = \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi m k}{h^2} + 1 - \ln N. \quad [1])$$ (16)

Hierbei bedeutet m die Masse einer einzigen Molekel der betrachteten Art, k ist die elementare Gaskonstante $= 1{,}34 \cdot 10^{-16}$ (cgs), h ist das elementare Wirkungsquantum $= 6{,}51 \cdot 10^{-27}$ (cgs) und N die Zahl der Moleküle im Mol $= 6{,}15 \cdot 10^{23}$. Durch Einsetzen dieser Werte erhält man

$$C = -7{,}1 + \frac{3}{2} \ln \frac{M}{M_H}.$$ (16')

Hierbei ist M die (träge) Masse pro Mol der betrachteten Molekeln, M_H ist das Atomgewicht des Wasserstoffes, das $= 1$ gesetzt wird.

Zur genaueren Festsetzung der Bedeutung von f in Gleichung (15) ist jedoch noch eine Bemerkung nötig. f ist so bestimmt, als wenn die betreffende Gasart allein im Raume vorhanden wäre, und es ist bekannt, daß beim Zusammenbringen verschiedener Arten von Gasmolekeln die freie Energie sich nicht additiv aus den Einzelenergien der Bestandteile

---

bestimmt ist, denselben durch Gleichung (16) gegebenen Wert besitzt, wird zugleich die Voraussetzung eingeführt, daß der Unterschied $\mu_2 - \mu_1$ der freien Energie pro Mol einer Molekel in den festen Phasen 1 und 2 beim absoluten Nullpunkt temperaturunabhängig ist. Das ist aber ein Spezialfall der Nernstschen Annahme

$$\left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_{T=0} = 0,$$

oder, wie Nernst schreibt,

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{T=0} = 0.$$

1) Von den entsprechenden Konstantenbestimmungen von O. Stern, R. J. Herzfeld und M. v. Laue unterscheidet sich diese Gleichung durch den Summanden 1 auf der rechten Seite. [Bei Herzfeld I (Anm. S. 120 dieser Arbeit) ist die entsprechende Formel außerdem durch einen Druckfehler entstellt]. Der Unterschied beruht darauf, daß bei uns unter $f dx$ die Änderung der freien Energie des Gases bei Hinzufügung von dx Mol *unter Konstanthaltung des Volums* verstanden wird (Temperatur, Teilchenzahlen, Volumen sind die unabhängigen Variabeln!). Dementsprechend hat unsere Größe μ eine von dem Sternschen λ_0 (Z. f. Elektroch. 1919, S. 66—80) und dem v. Laueschen μ eine um das Glied RT verschiedene Bedeutung, die Größen μ/RT usw. unterscheiden sich also um den Betrag 1. Man überzeugt sich, daß die betreffenden Dampfdruckformeln unter Berücksichtigung dieses Umstandes identisch werden.

zusammensetzt. Wohl aber läßt sich, unter Benutzung der Formel für die freie Energie von Gasgemischen [die betr. Entropieformel siehe z. B. bei M. Planck, Thermodynamik, 5. Aufl., S. 222], der Satz ableiten, daß bei Hinzufügung von dx Molen der Gattung x (unter Konstanthaltung des Volums) die freie Energie des Gasgemisches sich um $f_x\,dx$ ändert, wobei f_x nach (15) zu berechnen ist. Und gerade auf diesen Faktor f_x von dx kommt es in unsern Gleichgewichtsbetrachtungen an.

Das Glied f_i auf der rechten Seite bedeutet die innere freie Energie pro Mol der betreffenden Molekel bei der Temperatur T, bezogen auf den in § 1 beschriebenen Nullzustand ($T = 0$ bei chemischer Definition, beliebiger Quantenzustand Z_n bei Quantendefinition der Molekel). Die Absonderung des Gliedes f_i von den beiden ersten Termen der rechten Seite von Gleichung (15) beruht darauf, daß sich für jeden Zustand der Molekel die Energie additiv aus der Translationsenergie der fortschreitenden Wärmebewegung und der inneren Energie (Rotation, periodische Bewegung usw.) zusammensetzen läßt. Diese Additivität gilt wegen der relativistischen Einflüsse der inneren Zustände auf die Translationsenergie nicht ganz genau, aber für alle hier betrachteten Fälle mit hinreichender Annäherung.

Der Wert von f_i ist selbstverständlich $= 0$, wenn es sich um Elektronen handelt, da hier keine inneren Energien auftreten können; ebenso bei positiven Ionen, die nur aus den Kernen bestehen, wie Wasserstoffionen oder zweiwertig positiven Heliumionen.[1]) Ebenso ist die innere freie Energie gleich Null bei allen komplizierteren Gebilden, die nicht „chemisch", sondern durch einen Quantenzustand definiert sind; denn dann ist definitionsgemäß die innere Energie bei allen Temperaturen dieselbe und Übergänge in andere Quantenzustände sind gewissermaßen als chemische Reaktionen aufzufassen. Wohl aber ist eine Änderung der inneren freien Energie im allgemeinen zu berücksichtigen bei den chemisch definierten Ionen und Atomen, die verschiedener Zustände Z_n fähig sind. Wenn man

1) Energievariationen innerhalb des Kerns brauchen, wie schon früher bemerkt, wenn sie überhaupt vorkommen, nicht berücksichtigt werden, da alle zugänglichen Temperaturen auf sie nur einen verschwindenden Einfluß haben können.

bisher bei „einatomigen Gasen" die innere freie Energie $= 0$ gesetzt hat, so ist das zwar annähernd, aber nicht genau richtig; da wir im folgenden Gleichgewichte zu betrachten haben, bei denen die thermischen Ionisation, also die völlige Abtrennung eines Elektrons von seinem Kern, eine Rolle spielt, so wäre es unlogisch, wenn wir die Quantenzustände, die zwischen dem Nullzustand und völliger Ionisierung liegen, ignorieren wollten; denn diese Zwischenzustände treten als Zustände geringerer Energie ja noch unverhältnismäßig viel häufiger auf als die Zustände völliger Trennung der Bestandteile. Endlich ist noch bei chemisch definierten mehrkernigen Bestandteilen die innere Energie einer Bewegung der Kerne gegeneinander sowie eine Rotation des ganzen Gebildes zu berücksichtigen, für die sich die entsprechende freie Energie berechnen läßt, wenn die Quantenbedingungen gegeben sind.

(Eingegangen 3. Dezember 1919.)

4. *Die Schwingungen biegungssteifer Saiten; von Otto Schaefer.*

Man kann eine schwingende Saite als recht empfindlichen Dehnungsmesser für technische Zwecke verwenden.[1]) Hierbei wird an dem zu untersuchenden Bauteil, der ein Träger, ein Fachwerkstab, ein Schwungradarm oder sonstiger Teil sein kann, eine Saite mit ihren Enden so befestigt, daß sie an einer elastischen Verlängerung oder Verkürzung dieses Bauteiles teilnehmen muß. Dabei wird ihr Ton erhöht oder vertieft und diese Tonhöhenänderung wird an einer Vergleichssaite bestimmt, deren Spannung unveränderlich, deren Länge aber mittels eines verschieblichen Steges einstellbar ist. Bei der Untersuchung der Fehlerquellen eines solchen Dehnungsmessers stellte es sich als notwendig heraus, den Einfluß der Biegungssteifigkeit auf die Schwingungen von Saiten näher zu untersuchen.

Bei der üblichen Betrachtung völlig biegsamer Saiten gilt die Differentialgleichung

$$S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

in der S die als unveränderlich angesehene Längskraft, μ die Masse der Längeneinheit bedeutet, während x und y die Koordinaten eines Punktes der — unendlich dünnen — Saite und t die Zeit ist. In der folgenden Rechnung soll J das Trägheitsmoment eines Querschnitts der Saite und E der Elastizitätsmodul ihres Materials sein.

Auf ein Saitenstück von der Länge ∂x wirken die in der Fig. 1 gezeichneten Kräfte ein: a) die Komponenten von S in der y-Richtung, nämlich $S \sin \alpha$ und $S \sin (\alpha + \partial \alpha)$, b) die Komponenten von S in der x-Richtung $S \cos \alpha$ und $S \cos (\alpha + \partial \alpha)$, c) die Scherkräfte V und $V + \partial V$, d) die Massenkraft

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x$$

1) Die schwingende Saite als Dehnungsmesser, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, 1919, S. 1008.

und e) die Momente M und $M + \partial M$. Die Gleichung der in der y-Richtung wirkenden Kräfte lautet:

$$V + \partial V - V + S \sin(\alpha + \partial \alpha) - S \sin \alpha - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x = 0$$

oder

$$\partial V + S \cos \alpha \cdot \partial \alpha - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x = 0.$$

Solange es sich um kleine Schwingungen handelt, kann $\cos \alpha = 1$ gesetzt werden und

$$\partial \alpha = \partial \frac{\partial y}{\partial x},$$

so daß entsteht

$$\partial V + S \partial \frac{\partial y}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x = 0$$

und nach Division durch ∂x

$$\frac{\partial V}{\partial x} + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

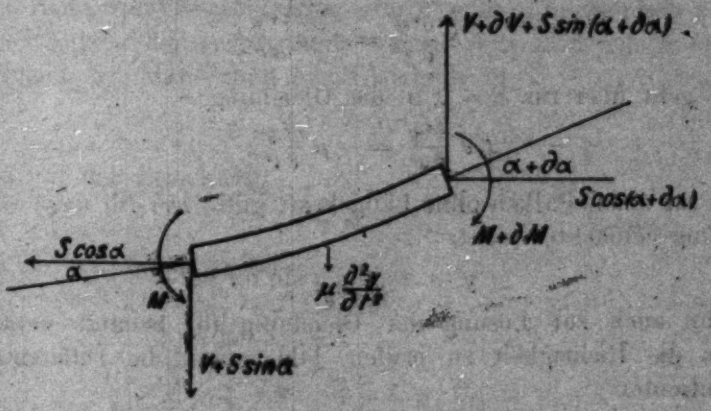


Fig. 1.

Weiter werde die aus der Biegungslehre bekannte Gleichung benutzt

$$E J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - M, \tag{2}$$

aus der durch Differenzieren folgt

$$E J \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Die aus der Biegungslehre bekannte Beziehung

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V$$

gilt auch für einen Stab mit Längskraft, da diese nur eine Verschiebung der Nullinie nach der Druckseite hin bewirkt, aber an den sonstigen Verhältnissen nichts ändert. Man darf demnach setzen

$$EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -V$$

und erhält durch nochmaliges Differenzieren

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (1) findet man die Differentialgleichung des Problems

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Sobald man in dieser Gleichung $J = 0$ setzt, also die Steifigkeit vernachlässigt, geht sie über in die bekannte Form

$$S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Sie geht über für $S = 0$ in die Gleichung

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

die für einen Balken ohne Längskraft gilt. Der für diese Gleichung gemachte Ansatz

$$y = A\sin a x \sin b t$$

kann auch zur Lösung der Gleichung (3) benutzt werden. Um die Richtigkeit zu prüfen, bildet man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A a^2 \sin a x \sin b t,$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = A a^4 \sin a x \sin b t,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A b^2 \sin a x \sin b t$$

und setzt sie in Gleichung (3) ein.

$$EJ A a^4 \sin a x \sin b t = -S A a^2 \sin a x \sin b t + \mu A b^2 \sin a x \sin b t.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von x und t gelten soll, muß die folgende Beziehung bestehen

$$EJa^4 = -Sa^2 + \mu b^2. \tag{4}$$

Für a gilt noch eine weitere Bedingung: an den Enden der Saite, bei $x = 0$ und $x = l$ muß nämlich $y = 0$ werden für alle Werte von t. Dies ist nur möglich, wenn $\sin al = 0$ ist, wenn also

$$a = \frac{\pi}{l}, \quad 2\frac{\pi}{l}, \quad 3\frac{\pi}{l} \quad \text{usw.}$$

ist. Zu jedem dieser Werte von a findet man aus Gleichung (4) den zugehörigen Wert von b. Diese Werte b_1, b_2 b_3 stehen aber nicht in einfacher Beziehung zueinander. Bei einer völlig biegsamen Saite ($J = 0$) ist bekanntlich

$$b_1' : b_2' : b_3' \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$$

und bei einem steifen ungespannten Balken ist

$$b_1'' : b_2'' : b_3'' \ldots = 1 : 4 : 9 \ldots$$

In beiden Fällen gibt der Körper außer dem Grundton eine Reihe von Obertönen, die zum Grundton harmonisch sind. Die Obertöne der vorliegenden steifen Saite sind jedoch nicht harmonisch. Man erhält aus Gleichung (4)

$$b = \sqrt{\frac{EJa^4 + Sa^2}{\mu}}$$

und mit der Beziehung

$$n = \frac{b}{2\pi}$$

für die Schwingungszahlen

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJa^4 + Sa^2}{\mu}},$$

$$n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + S\left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\mu}},$$

$$n_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 + S\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2}{\mu}},$$

$$n_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ\left(\frac{3\pi}{l}\right)^4 + S\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2}{\mu}}$$

. . . . . .

Für eine stählerne Klaviersaite von 40 cm Länge und 1 mm Dicke gestalten sich die Verhältnisse für einen Grundton von $n = 435$ Schwingungen so: mit der Beziehung

$$n = \frac{b}{2\pi}$$

ergibt sich für S aus Gleichung (4):

$$S = 4\pi^2 l^2 \mu - EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^2,$$

$$S = 75{,}9 - 0{,}07 = 75{,}83\,\text{kg}.$$

Die Saite braucht um den kleinen Betrag von 0,07 kg weniger gespannt zu werden als die völlig biegsame, die eine Zugkraft von 75,9 kg erfordert. Die Schwingungszahlen n ergeben sich zu $n_1 = 435$, $n_2 = 870{,}9$, $n_3 = 1309{,}5$, $n_4 = 1750{,}8$, während bei einer völlig biegsamen Saite sein würde $n_1' = 435$, $n_2' = 870$, $n_3' = 1305$, $n_4' = 1740$, wenn sie auf den Grundton 435 gestimmt ist. Für den Gebrauch des erwähnten Dehnungsmessers kommt es nicht darauf an, daß die steife Saite eine etwas geringere Kraft erfordert, sondern daß sie ein wenig länger sein muß. Die Klaviersaite müßte 39,82 cm lang sein, statt 40 cm.

Vielleicht kann die Erhöhung der Obertöne einer steifen Saite zur Erklärung der eigentümlichen Erscheinung herangezogen werden, daß einwandfrei gute Musiker die Oktav ein wenig zu groß nehmen, größer als dem Schwingungszahlenverhältnis 1 : 2 entspricht. Wird das Ohr von einem einfachen Ton von n-Schwingungen in der Sekunde getroffen, so wird eine bestimmte Faser der Basilarmembran bewegt, die ihrerseits den zugehörigen Nerv beeinflußt. Es kann aber auch, wie hier angenommen werden soll, eine Faser unter Bildung eines Knotens in der Mitte erregt werden und zwar müßte es, da die Fasern bei ihrer geringen Länge sicher eine merkliche Steifigkeit besitzen, eine Faser von etwas weniger als $n/2$-Schwingungen sein. Beruht nun der Konsonanzeindruck darauf, daß von zwei Tönen zum Teil die gleichen Fasern erregt werden, so ist es ersichtlich, daß ein Ton n und ein Ton etwas unter $n/2$ konsonant sein müssen.

Um die Amplitude der Obertöne zu ermitteln, muß ein gewisser Anfangszustand der Saite gegeben sein und zwar möge angenommen werden, daß die Saite durch eine Kraft in der Mitte belastet und dann losgelassen wird. Infolge der Steifig-

keit ist die Form der Saite nicht geradlinig, sondern sie verläuft nach einer über eine Gerade übergelagerten Hyperbelfunktion. Ehe die Form der Saite berechnet wird, sei eine allgemeinere Bemerkung über die Form elastischer Stäbe gestattet. Ein am einen Ende eingespannter Stab (Fig. 2) wird am anderen Ende in beliebiger Richtung von einer Kraft ergriffen, deren Komponenten S und Q sind. Die Biegung erfolge in der Ebene eines der Haupträgheitsmomente des Querschnitts. Dann lautet die Differentialgleichung der Biegungslinie

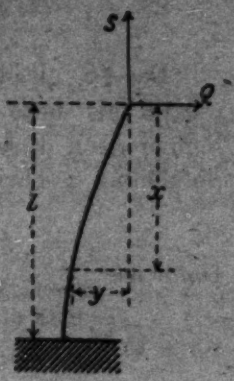


Fig. 2.

$$(5) \qquad Qx - Sy = -EJ\frac{d^2y}{dx^2},$$

deren Lösung man schreiben kann

$$(6) \qquad y = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\sqrt{\frac{EJ}{S}}\,\frac{2}{e^{\sqrt{\frac{S}{EJ}}l} + e^{-\sqrt{\frac{S}{EJ}}l}} \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{S}{EJ}}x} - e^{-\sqrt{\frac{S}{EJ}}x}}{2}.$$

Durch zweimaliges Differenzieren und Einsetzen in Gleichung (5) kann man die Richtigkeit nachweisen; ferner sind die Bedingungen erfüllt, daß $y = 0$ wird für $x = 0$, und

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

für $x = l$, wie man sich leicht überzeugen kann.

Setzt man in Gleichung (6) die Komponente $Q = 0$, so bleibt der Stab gerade, y wird Null für jeden Wert von x. Haben Q und S positive Werte, so kann man kürzer schreiben

$$(7) \qquad y = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\sqrt{\frac{EJ}{S}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{S}{EJ}}x}{\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{S}{EJ}}l}.$$

Der Stab verhält sich wie ein Viertel der zu berechnenden Saite, deren Gleichung entsprechenden Bau haben wird. Läßt man S zu Null werden, so bekommt Gleichung (7) die Form $\infty - \infty$, die sich leicht auf die Form $0/0$ bringen läßt

$$y = Q\frac{x\sqrt{S}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,l - \sqrt{EJ}\cdot\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,x}{S\sqrt{S}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,l}.$$

Da $\sqrt{S}$ gleichzeitig mit S verschwindet, so darf man $z = \sqrt{S}$ als neue Veränderliche einführen und Zähler und Nenner nach dieser differenzieren; gleichzeitig werde zur Vereinfachung geschrieben

$$\frac{1}{\sqrt{EJ}} = a.$$

Dann ist

$$y = Q\frac{xz\,\mathfrak{Cof}\,azl - \frac{1}{a}\,\mathfrak{Sin}\,azx}{z^3\,\mathfrak{Cof}\,azl} = Q\frac{axz\,\mathfrak{Cof}\,azl - \mathfrak{Sin}\,azx}{az^3\,\mathfrak{Cof}\,azl},$$

$$\lim_{z=0} y = Q\frac{ax\,\mathfrak{Cof}\,azl + axzal\,\mathfrak{Sin}\,azl - ax\,\mathfrak{Cof}\,azx}{a3z^2\,\mathfrak{Cof}\,azl + az^3al\,\mathfrak{Sin}\,azl} = \frac{0}{0}.$$

Man muß Zähler und Nenner noch einmal nach z differenzieren und erhält

$$\lim_{z=0} y = Q\frac{\begin{array}{l}ax\cdot al\,\mathfrak{Sin}\,azl + ax\cdot al\,\mathfrak{Sin}\,azl\\ + axzalal\,\mathfrak{Cof}\,azl - axax\,\mathfrak{Sin}\,azx\end{array}}{\begin{array}{l}a3\cdot 2z\,\mathfrak{Cof}\,azl + 2\cdot a3z^2al\,\mathfrak{Sin}\,azl\\ + az^3alal\,\mathfrak{Cof}\,azl\end{array}} = \frac{0}{0}.$$

Wenn man zum dritten Male differenziert, findet man

$$\lim_{z=0} y = Q\frac{\begin{array}{l}3ax\cdot al\cdot al\,\mathfrak{Cof}\,azl + axzal\cdot alal\,\mathfrak{Sin}\,azl\\ - ax\cdot ax\cdot ax\,\mathfrak{Cof}\,azx\end{array}}{\begin{array}{l}a\cdot 3\cdot 2\,\mathfrak{Cof}\,azl + 3a3\cdot 2zal\,\mathfrak{Sin}\,azl\\ + 3a3z^2alal\,\mathfrak{Cof}\,azl + az^3\cdot alalal\,\mathfrak{Sin}\,azl\end{array}},$$

$$\lim_{z=0} y = Q\frac{3ax\cdot a^2l^2 - a^3x^3}{6} = \frac{Qa^2}{2}\left(l^2x - \frac{1}{3}x^3\right),$$

$$\lim_{z=0} y = \frac{Q}{2EJ}\left(l^2x - \frac{1}{3}x^3\right). \tag{8}$$

Dies ist aber die bekannte Biegungsgleichung eines Trägers.

Wird bei positivem Q der Wert von S negativ, so setze man

$$-S = S'$$

und erhält aus Gleichung (6)

$$y = -\frac{Q}{S'}x + \frac{Q}{S'}\sqrt{\frac{EJ}{S'}}\,\frac{2}{e^{i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,l} + e^{-i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,l}}\,\frac{e^{i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,x} - e^{-i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,x}}{2i},$$

was man einfacher schreiben kann

$$y = -\frac{Q}{S}x + \frac{Q}{S}\sqrt{\frac{EJ}{S}} \cdot \frac{\sin\sqrt{\frac{S}{EJ}}x}{\cos\sqrt{\frac{S}{EJ}}l} \tag{9}$$

Setzt man in dieser Gleichung $Q = 0$, so wird y zu Null, wenn nicht etwa der Nenner des zweiten Gliedes auch Null ist. Der Wert von S', für den dies eintritt, ergibt sich aus

$$\sqrt{\frac{S}{EJ}}l = k\pi \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

und man kommt auf die Eulersche Knickformel.

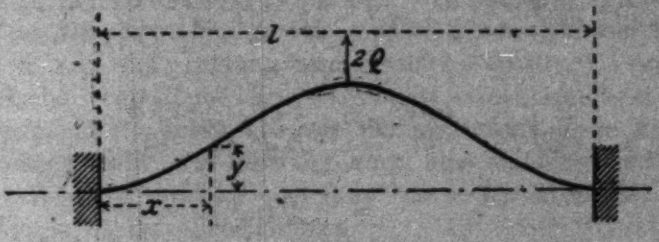


Fig. 3.

Für die in Fig. 3 gezeichnete Saite gilt folgendes: von 0 bis $l/2$ ist

$$\left\{\begin{aligned} y = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\frac{1}{\eta\left(1 + \operatorname{Cof}\eta\frac{l}{2}\right)}\Big[&\operatorname{Sin}\eta x \\ &- \operatorname{Sin}\eta\left(\frac{l}{2} - x\right) + \operatorname{Sin}\eta\frac{l}{2}\Big], \end{aligned}\right. \tag{10}$$

von $l/2$ bis l

$$\left\{\begin{aligned} y' = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\frac{1}{\eta\left(1 + \operatorname{Cof}\eta\frac{l}{2}\right)}\Big[&\operatorname{Sin}\eta\left(x - \frac{l}{2}\right) \\ &- \operatorname{Sin}\eta(l - x) - \operatorname{Sin}\eta\frac{l}{2}\Big], \end{aligned}\right. \tag{11}$$

wobei zur Abkürzung

$$\eta = \sqrt{\frac{S}{EJ}}$$

gesetzt ist. Die Beachtung des negativen Vorzeichens dieser Wurzel ergibt weder hier noch bei der vorigen Betrachtung eine Änderung. Das veränderte Aussehen der Gleichungen (10)

und (11) gegenüber der Gleichung (7) erklärt sich aus der Verschiebung des Koordinatensystems, die vorgenommen wurde, um die folgenden Integrationen zu erleichtern. Die Fouriersche Reihe, die den Verlauf der Saite wiedergibt, lautet

$$(12) \qquad r = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_3 \cos\frac{3\pi x}{l} + b_5 \cos\frac{5\pi x}{l} + \ldots,$$

wobei die Koeffizienten der Sinusglieder und der geraden Kosinusglieder nicht erst hingeschrieben sind, weil sie Null werden.

Es ist

$$(13) \qquad b_0 = \frac{1}{l/2}\int_0^{l/2} y\,dx + \frac{1}{l/2}\int_{l/2}^{0} y'\,dx = \frac{Q}{S}\,\frac{l}{2} - \frac{2\frac{Q}{S}\operatorname{Sin}\eta\frac{l}{2}}{\eta\left(1+\operatorname{Cos}\eta\frac{l}{2}\right)}.$$

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_k &= \frac{1}{l/2}\int_0^{l/2} y\cos\frac{k\pi x}{l/2}\,dx + \frac{1}{l/2}\int_{l/2}^{l} y'\cos\frac{k\pi x}{l/2}\,dx \\ &= -\frac{Q}{S}\,l\left(\frac{1}{(k\pi)^2} - \frac{1}{(k\pi)^2 + \left(\eta\frac{l}{2}\right)^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Für die völlig biegsame Saite ist $\eta = \infty$ wegen $J = 0$ und der zweite Bruch in der Klammer fällt weg, die Koeffizienten verhalten sich dann bekanntlich

$$b_1' : b_3' : b_5' : b_7 - \ldots = 1 : \frac{1}{9} : \frac{1}{25} : \frac{1}{49} \ldots$$

Bei der steifen Saite werden sie kleiner; für die als Beispiel herangezogene Klaviersaite wird

$$b_1 : b_3 : b_5 : b_7 \ldots = 1 : \frac{1}{11{,}4} : \frac{1}{45{,}8} : \frac{1}{128{,}6} \ldots$$

(Eingegangen 6. November 1919.)

5. *Über Balloelektrizität, Molekularkräfte und elektrische Kräfte;* von J. Traube.

In diesen Annalen sind mehrere Abhandlungen von Christiansen[1]) erschienen über die Elektrizitätserregung beim Zerspritzen von Flüssigkeiten, welche eine Anzahl bemerkenswerter Einzelheiten über die bekannte Wasserfallelektrizität Lenards[2]) enthalten. Es handelt sich um die Elektrizitätsentwicklung, welche beim Zerstäuben von Flüssigkeiten und der Bildung von Tropfen eintritt.[3]) Auch die Versuche, betreffend den Durchtritt von Gasblasen durch Flüssigkeiten[4]) sind hier zu nennen, wenngleich hier anscheinend nicht, wie man annimmt, eine einfache Umkehrung der Versuche vorliegt, sondern noch irgendwelche andere Faktoren in Betracht kommen.

Christiansen wählt für die Wasserfallelektrizität die kürzere Bezeichnung *Balloelektrizität* und er untersucht insbesondere für eine große Anzahl von in Wasser löslichen Stoffen den Einfluß, welchen dieselben in Abhängigkeit von der Konzentration auf die Elektrizitätsladung ausüben, wenn die betreffende Lösung gegen eine Platinplatte zerstäubt wird, welche mit dem Elektrometer in Verbindung steht.

Christiansen stellt nun fest, in Fortsetzung der Versuche Lenards und J. J. Thomsens, daß verschiedene Gruppen gelöster Stoffe einen sehr verschiedenen Einfluß auf die Balloelektrizität ausüben.

1. Salze, viele Säuren und Basen üben einen sehr schwachen Einfluß auf die Balloelektrizität aus; solche Lösungen nennt Christiansen: *aballisch*.

1) W. Christiansen, diese Ann. **40**. S. 107 u. 233. 1913 und ebenda **51**. S. 530. 1916.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **46**. S. 584. 1912.

3) J. J. Thomsen, Phil. Mag. (5) **37**. S. 341. 1894.

4) Lord Kelvin, Proc. Roy. Soc. **57**. S. 335. 1895; de Broglie, Journ. de Phys. **9**. S. 205. 1910; Coehn u. Mozer, Ann. d. Phys. **43**. S. 1048. 1914.

2. Wasser, wäßrige Lösungen von Ölen, Filterpapier, Ammoniak usw. geben verhältnismäßig viel Balloelektrizität, indem sie die Platinplatte positiv elektrisch laden; solche Lösungen werden als autokataballisch oder einfach *kataballisch* bezeichnet. Lösungen von Chinin, Anilin und viele andere organische Stoffe, wie Trichloressigsäure, welche der Platinplatte große negative Ladungen erteilen, werden autoanaballisch oder einfach *anaballisch* genannt.

3. Mischungen von Stoffen der ersten Gruppe und der zweiten Gruppe, beispielsweise Mischungen von Chlorkaliumlösungen und Alkoholen, geben vielfach eine weit größere Balloelektrizität als die Summe der Komponenten. Solche Mischungen bezeichnet Christiansen als *hyperballisch*.

Man kann nun die Versuchsergebnisse Christiansens unter einem *einheitlichen* Gesichtspunkte zusammenfassen, wenn man den Einfluß, welchen die gelösten Stoffe und deren Mischungen auf die Balloelektrizität des Wassers ausüben, in Beziehung setzt zu der Größe der *Oberflächenaktivität*, d. i. der Einfluß, welchen die Stoffe auf die Oberflächenspannung des Wassers ausüben.

Es ist sofort ersichtlich — und übrigens hat Lenard[1]) dies auch an einem etwas ungenügenden Material im wesentlichen erkannt —, daß die *aballischen* Stoffe mit den als *oberflächeninaktiv* bezeichneten Stoffen, die *kata- und anaballischen* Stoffe aber mit denjenigen Stoffen zusammenfallen, welche man als *oberflächenaktiv* bezeichnet. Da dieser Beziehung eine erhebliche theoretische Bedeutung zukommt, so mögen die folgenden Ausführungen zeigen, *in wie hohem Maße* die *balloelektrische Ladung der Oberflächenaktivität der Lösung parallel geht*.

Christiansen geht aus von Versuchen, in denen er zeigt, daß die Ladung des zerstäubten Wassers durch kleinste Unreinheiten, insbesondere minimalste Mengen gelöster Öle und Harze, ganz erheblich vergrößert wird. Es unterliegt keinem Zweifel, daß es sich hier um stark oberflächenaktive Stoffe handelt.

Die Untersuchung der verschiedensten Elektrolyte: Säuren, wie Salzsäure, Salpetersäure, Schwefelsäure, Phosphro-

1) P. Lenard, Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 1914. 27., 28. u. 29. Abhandl., vgl. Ref.: Naturwissenschaften, Verlag Springer, 6. S. 82. 1918.

säure und Zitronensäure, Basen, wie Kali, Natron, Baryt, Alkalisalze und Schwermetallsalze führte zu dem Ergebnis, daß alle diese — oberflächeninaktiven — Stoffe sehr wenig Balloelektrizität ergeben. Das Vorzeichen der elektrischen Ladung ändert sich, wenn die Konzentration eine gewisse geringe Größe erreicht; die Ladung der Platte wird negativ, aber die Größe der Ladung ist fast immer geringer als diejenige des Wassers.

Ganz anders verhalten sich nun die Lösungen stark oberflächenaktiver Stoffe, wie Fettsäuren, primäre und sekundäre Alkohole, Äther, Ester, Aldehyde, Ketone, Amine usw. Diese Lösungen sind meist in hohem Grade *kataballisch*, in besonderen Fällen, beispielsweise die halogenierten Fettsäuren sowie sonstige Halogen- und Nitroverbindungen in hohem Maße *anaballisch*.

Die folgenden Tabellen mögen zeigen, in welchem Maße Balloelektrizität und Oberflächenspannung der Lösungen parallel gehen. Die balloelektrischen Ladungen sind den Arbeiten Christiansens, die Oberflächenspannungen γ in Milligrammillimeter bei 15° früheren Arbeiten von mir und meinen Schülern[1]) entnommen. Zunächst sei die folgende Säuretabelle wiedergegeben. Sämtliche Werte beziehen sich auf 0,25-n. wäßrige Lösungen.

	Balloelektr. Ladung in Volt	Oberflächenspann. γ in mg/mm bei 15° C
Wasser	—	7,295
Salzsäure	aballisch	7,28
Salpetersäure		7,27
Schwefelsäure		7,30
Zitronensäure		7,26
Weinsäure	0,0	7,28
Glykolsäure	−0,05	7,24
Oxalsäure	−0,1	7,24
Äpfelsäure	−0,1	7,17
Ameisensäure	+0,1	7,14
Malonsäure	−0,2	7,07
Bernsteinsäure	0,25	6,89
Essigsäure	0,5	6,81
Propionsäure	1,65	6,13
Buttersäure	2,85	4,89

1) Vgl. J. Traube, Pflügers Arch. ges. Physiol. **123.** S. 419. 1908; Verh. d. D. Phys. Ges. **10.** S. 880. 1908; Liebigs Ann. d. Chem. **265.** S. 27; Somogyi, Intern. Zeitschr. phys.-chem. Biol. **3.** S. 60. 1916 und J. Traube, Biochem. Zeitschr. **16.** S. 182. 1909.

Die folgenden Werte beziehen sich auf 1-n. Lösungen.

	Balloelektr. Ladung in Volt	Oberflächenspann. γ in mg/mm bei 15° C
Essigsäure	+0,8	6,04
Monochloressigsäure	−1,3	6,00
Dichloressigsäure	−2,7	5,20
Trichloressigsäure	−3,85	4,82

Wenn man von dem Vorzeichen der Ladung absieht und nur deren Größe in Betracht zieht, so ergibt sich eine völlige Parallelität der beiderseitigen Werte. Der Wechsel des Vorzeichens der elektrischen Ladungen beim Eintritt von Chlor an Stelle des Wasserstoffs in das Essigsäuremolekül ist beachtenswert.

Die folgende Tabelle bezieht sich auf eine Anzahl indifferenter bzw. basischer Stoffe. Die Werte beziehen sich sämtlich auf 0,25-n. wäßrige Lösungen.

	Balloelektr. Ladung in Volt	Oberflächenspann. γ in mg/mm bei 15° C
Acetamid	0	7,20
Acetonitril	0,4	7,00
Methylalkohol	1,1	7,05
Äthylalkohol	1,0?	6,72
Allylalkohol	0,85	6,44
Äthyläther	1,1	6,20
Propylalkohol	2,4	5,89
i-Butylalkohol	3,4	4,49
Diäthylamin	5,4	5,70

In homologen Reihen zeigt sich allgemein mit wachsendem Molekulargewicht eine Zunahme der balloelektrischen Ladung sowie eine Zunahme der Oberflächenaktivität.

In früheren Arbeiten[1]) wurde von mir gezeigt, daß in verdünnten wäßrigen Lösungen oberflächenaktiver Stoffe für gleiche Äquivalente die Oberflächenspannungserniedrigung der Lösung mit wachsendem Molekulargewicht annähernd zunimmt im Verhältnis $1 : 3 : 3^2 : 3^3 \ldots$ Nach den von Christiansen[2]) veröffentlichten Tabellen steht die balloelektrische

1) Vgl. J. Traube, Liebigs Ann. d. Chem. **265**. S. 27. 1891. und Verh. d. D. Phys. Ges. **10**. S. 880. 1908.

2) Vgl. a. a. O. **40**. S. 130 u. 132.

Ladung von Propylalkohol : Äthylalkohol auch im Verhältnis 3 : 1, von Isobutylalkohol : Propylalkohol ist das Verhältnis 2,75 : 1, von Amylalkohol : Isobutylalkohol allerdings kaum 2 : 1. Für Propionsäure : Essigsäure ist das Verhältnis 4 : 1, für Buttersäure : Propionsäure 3 : 1 und für Valeriansäure zu Buttersäure 2 : 1. Da die von Christiansen angewandte Methode zur Bestimmung der balloelektrischen Ladungen doch mit gewissen Fehlerquellen behaftet sein dürfte, so darf immerhin auf diese wenn auch grobe Annäherung des Zahlenverhältnisses hingewiesen werden.

Es liegen noch für eine sehr große Anzahl der verschiedenartigsten anorganischen und organisch-chemischen Verbindungen Bestimmungen der Oberflächenaktivität und balloelektrischen Ladungen vor, wenngleich nicht immer dieselben Konzentrationen gewählt wurden. Es ist auch nicht eine einzige Ausnahme zu nennen, welche der Regel widerspricht, daß balloelektrische Ladung und Oberflächenaktivität parallel gehen. *Oberflächenaktive* Stoffe sind *balloaktiv* und *oberflächeninaktive* Stoffe sind *balloinaktiv*.

Balloelektrische Stoffe, wie Pyridin, Piperidin, Phenol, die Kresole, Anilin, Benzoesäure, Chinin, Cinchonin, Chinolin, Nikotin, Chlorphenol, Nitrophenol, die Ester usw. sind oberflächenaktiv, während sehr schwache Ballolyte, wie die Trioxybenzole, Gallussäure usw. zu den oberflächeninaktiven Stoffen gehören.

Wenn durch Substitution von Halogenatomen an Stelle von Wasserstoff in Fettsäuren, ebenso in Phenol und Anilin, sowie der Nitrogruppe in Phenol die Balloelektrizität ihr Zeichen wechselt, so ist daran zu erinnern, daß es sich um den Eintritt stark negativer Gruppen in das Molekül handelt.

Besonders sei noch darauf hingewiesen, daß die Steigerung der balloelektrischen Wirkung, welche statthat, wenn Salzlösungen mit Lösungen kata- oder anaballischer Stoffe gemischt werden, ihr Analogon findet in einer Oberflächenaktivitätssteigerung, welche bei den gleichen Vorgängen der Mischung statthat.

Christiansen findet beispielsweise für 1-n. wäßrigen Äthylalkohol die balloelektrische Ladung 0,9, für 1-n. Chlorkaliumlösung die entsprechende Ladung 0,1. Die Mischung

gleicher Volumina der Lösungen führt zu der stark potenzierten Ladung 7,0 Volt.

In einer älteren Mitteilung[1]) wurde von mir festgestellt, daß 10-volumprozentiger Äthylalkohol bei 15° die Oberflächenspannung $\gamma = 5{,}14$ mg/mm hat, bei Zusatz von 5 bzw. 10 g Chlorkalium zu 100 g dieser Lösung erniedrigt sich die Oberflächenspannung γ auf 4,97 bzw. 4,89.

100 ccm Wasser + 6 Volumproz. Äthylalkohol führten in einem Stalagmometer, dessen Tropfenzahl für Wasser = 58,9 war, zu der Tropfenzahl 67,8, bei Zusatz von 2,8 Proz. Chlornatrium erhöhte sich die Tropfenzahl auf 69,85.[2])

Diese Feststellungen wurden von mir auf eine Haftdruckverminderung der oberflächenaktiven Stoffe durch die Salze zurückgeführt.[3])

Die hier festgestellten Beziehungen zwischen Oberflächenaktivität und balloelektrischer Wirkung stehen nun in bestem Einklang mit den von Lenard[4]) in seinen neueren Abhandlungen entwickelten Ansichten über die *elektrische* Natur der *Molekularkräfte*. Lenard nimmt nicht mehr wie früher an, daß es sich bei der Wasserfallelektrizität um eine Kontaktwirkung zwischen Gas und Flüssigkeit handelt, sondern daß die durch die Wasserfallwirkung angezeigte elektrische Doppelschicht *ganz* in der Flüssigkeit zu suchen ist. Es handelt sich bei deren Zerreißung um die Abtrennung kleinster Flüssigkeitspartikel aus der äußersten Oberflächenschicht.

In dieser äußersten Oberflächenschicht konzentrieren sich nun nach dem Prinzip von Gibbs-Thomsen[5]) die oberflächenaktiven Stoffe, und zwar um so mehr, je mehr dieselben die Oberflächenspannung des Wassers vermindern, während die oberflächeninaktiven Stoffe, welche die Oberflächenspannung des Wassers meist erhöhen, dementsprechend die äußerste Oberfläche fliehen, und zwar, wie Lenard in überzeugender Weise in Übereinstimmung mit früheren Arbeiten ausführt, deshalb, weil Salze und Salzionen usw. sich

1) J. Traube, Journ. f. prakt. Chem. N. F. 31. S. 214. 1885.

2) J. Traube, Pflügers Arch. f. d. ges. Phys. 176. S. 79. 1919; vgl. auch W. Baeyer, Biochem. Zeitschr. 18. S. 238. 1908.

3) Vgl. Verh. d. D. Phys. Ges., a. a. O.

4) Vgl. Heidelb. Akad. Ber., a. a. O.

5) Vgl. auch W. Quincke, Ann. d. Phys. 19. S. 139. 1870.

mit einer mehr oder weniger großen Wasserhülle zu kompakteren „Lösungsmolekülen" aggregieren, die infolge ihrer Verdichtung durch die Molekularkräfte nach dem Innern der Flüssigkeit hingezogen werden. Lenard weist auch darauf hin, daß die Moleküle eine gewisse Richtung zu der Oberfläche annehmen müssen.

Das große, von Christiansen beschaffte Material ist für Lenards Theorie insofern von erheblichem Werte, als die innige Beziehung von Oberflächenaktivität und balloelektrischer Wirkung bei Berücksichtigung von Gibbs-Thomsens Prinzip nur durch die Annahme verständlich wird, daß beim Losreißen der äußersten Oberflächenschicht flüchtiger oberflächenaktiver Stoffe (Alkohole, Fettsäuren, Äther, Ester usw.) von der äußersten *Wasser*schicht die elektrische Doppelschicht zerstört wird, derart, daß nun getrennte elektrische Ladungen feststellbar werden. *Die Molekularkräfte, und zwar nicht nur diejenigen, welche die Elektrolyte mit dem Wasser verbinden, sondern auch diejenigen, welche zwischen Nichtleitern und Wasser bestehen, sind somit elektrischer Natur.* Das ist ein Ergebnis, welches mit den sonstigen neueren Ansichten in bestem Einklang steht.

Es mag in Zusammenhang mit Lenards Arbeiten auch auf die sehr beachtenswerten Arbeiten von Longmuir[1]) hingewiesen werden, durch welche in überzeugender Weise gezeigt wird, daß u. a. physikalische Kräfte, wie Oberflächenspannung, Adsorptionskraft usw., auf Sekundärvalenzen zurückzuführen seien, die in letzter Linie elektrischen Ursprungs sein dürften. Longmuir wies auch darauf hin, daß bei Nichtleitern, wie Ölen, welche sich etwa in Form einer dünnen Haut auf einer Wasseroberfläche ausbreiten, die Moleküle als *teilweise* gelöst anzusehen sind, indem dieselben eine derartige Richtung einnehmen, daß die polaren Radikale sich der Wasseroberfläche zuwenden.

Auch frühere eigene Arbeiten von mir, die Herrn Lenard, wie er mir gelegentlich freundlichst mitteilte, nicht bekannt waren, decken sich durchaus mit Lenards theoretischen Ansichten.

---

1) W. Longmuir, Journ. Amer. Chem. Soc. **38**. S. 2221. 1916 und **39**. S. 1848. 1917.

So wurde auch von mir[1]) bereits die Bildung von Ionenhydraten herangezogen, um die bekannte Dampfdruckformel Raoult-van't Hoffs abzuleiten und in einer Mitteilung über Kohäsionskräfte und elektrische Kräfte[2]) wurde die *Kohäsionskraft* auf *elektrische Kräfte* zurückgeführt. Es wurde in jener Abhandlung gezeigt, daß bei der versuchsweisen Übertragung von van der Waals' Zustandsgleichung auf den festen Zustand[3]) sich gewisse Eigenschaften der Metalle, wie Elastizität, Härte, Kompressibilität und Verdampfungswärme zum Teil sogar mit quantitativer Annäherung darstellen ließen. Vor allem ergab sich eine völlige Parallelität der elektrischen Kontaktkräfte der Metalle mit den so berechneten Größen $a/v^{\frac{1}{3}} = \gamma v$, in welchem Ausdruck a und v die van der Waalssche Bedeutung haben und γ die Konstante der Oberflächenspannung bezeichnet. Aber auch sonst wurde in jener Mitteilung auf mannigfaltigste Beziehungen elektrischer Potentialdifferenzen sowie Kohäsionsgrößen hingewiesen, welche sämtlich dafür sprachen, daß die *Molekularkräfte* ebenso wie die eigentlichen *Affinitätskräfte elektrischen Ursprungs* sind.

Charlottenburg, Technische Hochschule.

---

1) Vgl. u. a. meinen Grundriß der physik. Chemie, Enke, Stuttgart 1904.

2) J. Traube, Ber. d. D. Chem. Ges. 42. S. 594. 1909; vgl. auch die daselbst erwähnten Abhandlungen von Hosehus.

3) J. Traube, Verh. d. D. Phys. Ges. 11. S. 231. 1909.

(Eingegangen 27. Oktober 1919.)

6. *Über die Polarisation in der Geißlerentladung*[1]; *von Erich Rumpf.*

1. Vor einiger Zeit ist mir der Nachweis gelungen, daß an Quersonden eines Geißlerrohres Erscheinungen auftreten, die eine große Ähnlichkeit mit elektrolytischer Polarisation aufweisen; bei ihrer Besprechung verwendete ich die Ausdrücke „Anfangsströme, Dauerströme, Rückgänge und Eigenströme". Ich habe meine damalige Veröffentlichung als einen vorläufigen Bericht bezeichnet und habe betont, daß noch verschiedene Fragen ungeklärt erschienen.

Nun habe ich die Versuche an der durch Fig. 1 (a. a. O.) wiedergegebenen Anordnung fortgesetzt und fand alle seinerzeit gemachten Erfahrungen bestätigt. Damit decken sich auch Versuche, die Ernst Reiche[2]) gelegentlich einer Arbeit „Über den Beginn der Glimmentladung in Luft" veröffentlicht hat, die mir bei Besprechung der Literatur entgangen war.

Ich habe damals vorgeschlagen, diese Polarisationserscheinungen durch kondensatorartige Oberflächenschichten zu erklären, vermied es aber, auf den Vorgang näher einzugehen. Nun will ich versuchen, nachzuweisen, daß die beschriebenen Polarisationserscheinungen tatsächlich durch Oberflächenschichten bedingt sind. Solche Oberflächenschichten werden ja in der physikalischen Praxis mehrfach beobachtet. Z. B. führt auch Reiche die von ihm beobachteten „störenden Nebenerscheinungen" auf „elektrische Doppelschichten durch Gasionen, die in der Gashaut der Elektroden stecken bleiben" zurück und Robert Pohl[3]) spricht von „elektrisch geladenen, polarisations-

1) Als Abschluß meiner gleichnamigen Arbeit: Ann. d. Phys. 59. S. 1. 1919.

2) E. Reiche, Ann. d. Phys. 52. S. 109. 1917.

3) R. Pohl, Die Physik der Röntgenstrahlen. Die Wissenschaft. Heft 45. Vieweg, Braunschweig 1912.

ähnlichen Oberflächenschichten" gelegentlich einer Besprechung von Versuchen von O. v. Bayer und A. Tool.[1])

2. Wenn die von mir beschriebenen Polarisationserscheinungen durch kondensatorartige Schichten, die die Elektroden umgeben, verursacht wurden, so mußte sich ein ballistisches Galvanometer ausgezeichnet zu ihrer Beobachtung eignen. Ich habe daher ein empfindliches Galvanometer G' von hoher Schwingungsdauer in meine Versuchsanordnung so eingefügt, daß es durch die Eigenströme der Sonden in Schwingungen versetzt werden konnte. Hierfür boten sich vornehmlich zwei Stellen, die beide gleich gute Wirkung hatten: entweder statt des Elster- und Geitelschen Elektrometers am Schalter H (Fig. 1, a. a. O.) oder hinter dem Taster T in der Weise, wie durch die beigegebene Fig. 1 ersichtlich ist, die die genannte Schaltungsskizze ergänzt; beim Niederdrücken des Tasters T waren in diesem Falle die Galvanometer G und G' hintereinandergeschaltet, während der Dauerstrom nur durch das Galvanometer G fließen konnte. Meist kam diese Schaltung in Verwendung.

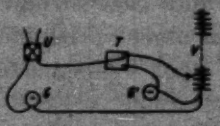


Fig. 1.

Als ballistisches Galvanometer stand mir ein Drehspuleninstrument von Hartmann und Braun zur Verfügung mit etwa 17 Sekunden (ganzer) Schwingungsdauer; der Widerstand ist mit 10000 Ohm angegeben, die zweite Systemspule von 5 Ohm war durch einen gleich großen Widerstand geschlossen, wodurch eine bequeme Dämpfung erreicht wurde.

3. Im folgenden will ich kurz über die Ergebnisse berichten, die mit dieser erweiterten Versuchsanordnung gefunden wurden; und zwar haben sich die Untersuchungen hauptsächlich auf die Abhängigkeit der ballistischen Ausschläge von der erregenden Spannung V (Fig. 1) und von dem Oberflächenzustande der Sonden erstreckt.

Wenn an die Sonden eine Spannung V angelegt wurde, so konnte im Galvanometer G Anfangsstromstoß und Dauerstrom abgelesen werden, wie dies a. a. O. durch die Figg. 2, 3,

1) O. v. Bayer und A. Tool, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. 13. S. 569. 1911.

5 und 6 beschrieben ist. Wurde darauf durch Niederdrücken des Tasters T' (Fig. 1) die Batterie abgeschaltet und gleichzeitig das Sondenpaar mit den beiden nunmehr hintereinandergeschalteten Galvanometern G und G' unmittelbar verbunden, so zeigten im allgemeinen beide Galvanometer Ausschläge, nach denen sie sofort in die Ruhelage zurückkehrten: G aperiodisch, G' nach wenigen Schwingungen. Die Ausschläge von G folgten den a. a. O. durch Fig. 4 und 7 dargestellten Regeln und waren dort als Eigenströme bezeichnet worden; die Ausschläge von G' zeigten einen Verlauf, der an der Hand der folgenden Fig. 2 beschrieben werden wird.

Vollkommen stellten sich allerdings die Ruhelagen nach diesen Ausschlägen meist nicht ein, da die Sonden meist ein verschiedenes Kontaktpotential haben und sich dann wohl auch lichtelektrisch so verschieden verhalten, daß sie infolge der heftigen lichtelektrischen Erregung durch die Geißlerentladung Ströme aussenden, die besonders die Stellung des empfindlicheren Galvanometers G' wesentlich beeinflussen.

Insbesondere sind diese Ruhelagestörungen sehr groß, wenn die Sonden in absichtlich verschiedenem Zustande untersucht wurden: z. B. die eine frisch geschmirgelt, die andere alt, d. h. im Entladungsrohr wiederholt mit Strom belastet. Dann sind die Ruhelagestörungen oft so groß, daß sie die Größenordnung der ballistischen Ausschläge erreichen, weshalb von einer Untersuchung solcher Sondenzusammenstellungen Abstand genommen werden mußte. Daher konnte ich mit dieser Anordnung auch nicht in Erfahrung bringen, welche von den Elektroden, die kathodische oder die anodische, den Hauptanteil an der kondensatorartigen Wirkung trägt, wie es a. a. O. geschehen war, denn die Ruhelagestörungen sind im unempfindlich geschalteten Galvanometer G viel weniger zu merken. Es müssen aber natürlich die a. a. O. geschlossenen Folgerungen aufrecht bleiben, wie ich besonders in Punkt 6 zeigen werde.

Die Erscheinungen waren auch diesmal an allen untersuchten Metallen (Kupfer, Zink und Platin-Iridium) ganz ähnlich.

4. Eingehend habe ich namentlich ein paar Zinksonden untersucht, die 1 mm dick waren und 6 cm aus der Glimmer-

scheibe (a. a. O., S. 6) herausragten. Der Entladungsstrom J im Rohr betrug bei diesen Versuchen im Mittel 1,3 Milliamperes, das Rohr war mit verdünnter Luft vom Drucke 0,3 mm Hg gefüllt; die Sonden waren 7 cm von der Kathode entfernt, befanden sich also im auslaufenden Teil des negativen Glimmlichtes. Diese Verhältnisse sind für die Beobachtung insofern sehr günstig, als hier eine starke Drehung der Sonden aus ihrer horizontalen Lage nötig ist, um infolge des Feldes im Geißlerrohr einen merklichen Ausschlag in den Galvanometern bzw. im Elektrometer zu erhalten.

In der beigegebenen Fig. 2 sind aus einer großen Anzahl von gesammelten Kurven drei herausgegriffene dargestellt, wobei die Mittel aus den Werten eingezeichnet sind, die man

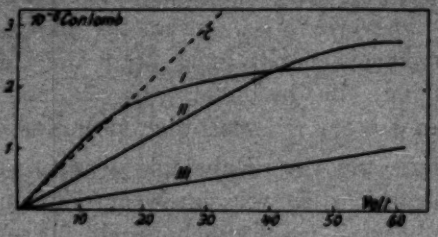


Fig. 2.

erhält, wenn man die Sonden einmal in der einen und dann in der anderen Richtung mit Strom von der Batterie V belastet. Dadurch sind störende Nebenerscheinungen, wie solche durch das immer etwas verschiedene Kontaktpotential der Sonden entstehen, unterdrückt worden. Die dazugehörigen Anfangs- bzw. Dauerströme zeigen im Vergleich mit den a. a. O., Figg. 2, 3, 5 und 6 abgebildeten nichts Neues und sollen daher hier nicht neu besprochen werden. Als Abszissen sind in der obenstehenden Fig. 2 die an die Sonden angelegten Spannungen V in Volt aufgetragen, als Ordinaten die in Mikrocoulomb umgerechneten ballistischen Ausschläge des Galvanometers G'. Zur Eichung wurden statt der Sonden an die Zuleitungsdrähte ein Glimmerkondensator von 0,1 Mikrofarad (Elliot, London) angelegt, wodurch die Gerade C erhalten wurde.

Die Kurve I wurde von Sonden gewonnen, die vor der Beobachtung geschmirgelt worden waren; die Kurve steigt an-

fänglich angenähert linear an, biegt dann um und nähert sich einem konstanten Wert, der trotz weiterer Erhöhung der Spannung nicht überschritten werden kann. Die Sondenkapazität kann in diesem Zustande der Sonden keine wesentlich höhere Elektrizitätsmasse fassen, als etwa $2^1/_2$ Mikrocoulomb; da diese Kurve in ihrem ansteigenden Teil der Geraden C nahe liegt, erkennt man, daß dieser Teil ungefähr einem Kondensator von $^1/_{10}$ Mikrofarad entspricht.

Die Kurve II ist das Ergebnis von Beobachtungen, die mit denselben Sonden angestellt wurden, nachdem sie durch etwa 4 Stunden, von den Leitungen abgeschaltet und untereinander kurz geschlossen, dem Entladungsstrom J ausgesetzt waren. Durch diese Behandlung ist der linear ansteigende Teil länger und deutlicher ausgeprägt geworden und entspricht, wie ein Vergleich mit der Geraden C ergibt, einer Sondenkapazität von etwa $^1/_{30}$ Mikrofarad; gleichzeitig ist jener Teil der Kurve, der sich der Horizontalen nähert, höher gerückt: die Sondenkapazität ist in diesem Zustande fähig, eine etwas höhere Elektrizitätsmenge zu fassen, als vor der vierstündigen Behandlung im Rohr.

Nachdem nunmehr die Sonden in gleicher Weise wie vorher durch etwa 20 Stunden der Geißlerentladung ausgesetzt worden waren, wurde die Kurve III gewonnen, bei der nur mehr der ansteigende Teil ausgebildet ist, der einer Sondenkapazität von $^1/_{60}$ Mikrofarad entspricht.

Eine weitere Erhöhung der Spannung ist nicht tunlich, weil dann leicht lichtbogenartige „Funkenstöße“ zwischen den Sonden überspringen, die nicht nur das Galvanometer G gefährden, sondern auch die Oberflächenbeschaffenheit der Sonden sofort derart verändern, daß der Kurventypus ganz anders wird, z. B. von III nach I überspringt. Solche Funkenstöße treten bei neuen Sonden (I) schon bei viel geringeren Spannungen auf, als bei alten (III), wo oft die zur Verfügung stehende Spannung von 120 Volt nicht ausreichte, um Funkenstöße zu erzeugen, während sie bei ganz frischen Sonden auch schon unter 60 Volt auftraten.

5. Werden die Sonden, nachdem sie ihre Ladungen durch die Galvanometer ausgeglichen haben, durch Umlegen des

Schalters S (s. a. O., Fig. 1) an das Elektrometer angeschlossen, das nun so eingestellt war, daß 40 Skalenteile 2 Volt entsprachen, so zeigt dieses anfänglich keinen Ausschlag. Nach einigen Sekunden beginnt es aber eine Potentialdifferenz anzuzeigen, die der vorhergegangenen erregenden Spannung V entgegengerichtet ist; der Ausschlag wächst in weniger als einer Minute bis zu einem gewissen Wert an, um dann wieder langsam zu fallen. Der so erreichte größte Ausschlag ist abhängig von der vorhergegangenen Erregung der Sonden; er ist bei kleineren Erregungsspannungen geringer, bei stärkeren größer, nähert sich aber mit steigender Erregungsspannung einem Endwert, der meist kleiner ist als 2 Volt, oder diesen Wert nicht weit überschreitet.

Es ist, als ob sich an den Sondenkapazitäten schwache Restladungen ausbilden würden. Vielleicht hat man es hier auch mit einer nachhaltigen Variation des Kontaktpotentiales zu tun, mit einer Polarisation im engeren Sinne; in diesem Falle könnte diese Erscheinung mit der Erholung eines erschöpften Akkumulators verglichen werden.

Sie steht aber im Vergleich mit den übrigen hier auftretenden „Polarisationserscheinungen“ an Stärke weit zurück und wurde nicht näher untersucht.

6. Es ist nun die Frage zu beantworten, wieso die beiden Galvanometer G und G' scheinbar ganz verschiedene Resultate geben: G zeigt die „Eigenströme“ an, wie s. a. O. durch die Figg. 4 und 7 dargestellt wurde, während G' ballistische Ausschläge und damit Elektrizitätsmengen anzeigt, die der Fig. 2 entsprechen.

Da muß zunächst festgestellt werden, daß der Ausdruck „Eigenströme“, der s. a. O. zur leichteren Beschreibung eingeführt worden war, nicht sehr glücklich gewählt scheint, denn es handelt sich hier um kurzdauernde Entladungen, die wesentlich unter der Schwingungsdauer der Galvanometer liegen, wie aus verschiedenen Versuchen gefolgert werden konnte. Es sind mithin die Bedingungen für Anwendung eines ballistischen Galvanometers gegeben.

Diese Entladungen erfolgen im Augenblick des Niederdrückens des Tasters T gleichzeitig mit dem Aussetzen des

Dauerströmen. Sie treiben also das Galvanometer G aus der Ruhelage, während sie im aperiodisch geschalteten Galvanometer G eine Geschwindigkeit v_0 bewirken, die die Rückkehrgeschwindigkeit der Galvanometerspule nach dem Ausstoßen des dem Dauerstrom entsprechenden Dauerausschlages in die Ruhelage vergrößert. Die Durchrechnung der Bewegung des aperiodischen Galvanometers ergibt nun, daß nur dann Ausschläge über die Ruhelage hinaus — die den Eigenströmen entsprechen würden — entstehen können, wenn v_0 größer ist als diejenige Geschwindigkeit U, mit der die Galvanometerspule ungedämpft aus dem Dauerausschlag durch die Ruhelage schwingen würde. U ist nun proportional dem Dauerausschlag (ähnlich Figg. 2, 3, 5 und 6, a. a. O.), v_0 proportional dem ballistischen Ausschlag (Fig. 2); aus dem Vergleich zweier solcher zusammengehöriger Kurvenbilder ergibt sich, daß die mit „Eigenstrom" bezeichneten Galvanometerausschläge mit steigender Spannung V einen Verlauf zeigen müssen, der ein Maximum hat, wie dies tatsächlich gefunden und a. a. O. an der Hand der Figg. 4 und 7 beschrieben wurde. Umgekehrt kann man aus den Eigenströmen mit ihren a. a. O. beschriebenen Gesetzmäßigkeiten ebenso wie aus den Rückgängen, für die natürlich die obige Überlegung auch gilt, ohne Schwierigkeit auf Entladungen schließen, die den durch die Fig. 2 wiedergegebenen Gesetzmäßigkeiten entsprechen.

Leider konnte ich keine erfolgversprechende Methode ausfindig machen, um die den Anfangsströmen, bzw. den Rückgängen entsprechenden Elektrizitätsmengen unmittelbar ballistisch aufzunehmen. Es dürften aber die hier gemachten Angaben genügen, um die kondensatorartige Wirkung der Sondenoberflächen zu erweisen und die Erscheinungen in befriedigender Weise zu deuten.

7. Sehr leicht gelingt der Nachweis, daß es sich tatsächlich um Vorgänge handeln muß, die an den Oberflächen der Sonden haften, also um oberflächliche Schichten und nicht etwa um räumliche Gebilde im Innern des Gases zwischen den Sonden, wenn man etwa folgenden Versuch anstellt: Durch das Entladungsrohr fließe der Strom J, der Schalter H sei in der Galvanometerstellung, der Tastar T in seiner oberen Lage, von

der Batterie V sei eine beliebige Spannung angeschaltet; dann zeigt G den Dauerstrom und G' steht auf Null. Wenn nun J unterbrochen wird, verschwindet natürlich die Geißlerentladung und es kehrt G ohne Schwingung in die Nullage zurück. Drückt man hierauf T in seine untere Lage, so bleiben beide Galvanometer vollkommen ruhig (wenn sich keine Isolationsfehler eingeschlichen haben!). Wird nun J wieder geschlossen, so zeigen beide Galvanometer Ausschläge[1]), die in beiden Instrumenten sofort wieder verschwinden, in G aperiodisch, in G' nach wenigen Schwingungen. Es ist wohl nicht nötig, zu sagen, daß ich keine Ausschläge bekommen konnte, wenn die Spannung V gleich Null war.

Auffällig war bei solchen Versuchen, daß zwischen dem Unterbrechen und dem abermaligen Schließen des Entladungsstromes lange Zeiten verstreichen konnten — nach einer halben Stunde wurde noch keine sonderliche Verminderung der ballistischen Ausschläge beobachtet.[2]) Die kondensatorartigen Schichten halten also im stromlosen Rohr sehr gut ihre Ladungen, während bei geschlossenem J schon wenige Sekunden nach dem Abschalten von V ein merklicher Abfall in den Galvanometerausschlägen zu bemerken ist, weil sich dann die Ladungen durch das ionisierte Gas ausgleichen.

Aus solchen Versuchen scheint mir einwandfrei hervorzugehen, daß es sich hier nicht um räumliche Schichten im Entladungsrohr handelt, sondern tatsächlich um Vorgänge, die sich an den Oberflächen der Sonden abspielen. Übrigens führen sowohl die a. a. O. auf S. 11 beschriebenen Leuchterscheinungen, als auch der mehrfach erörterte Einfluß des Oberflächenzustandes zu diesem Schluß.

8. Unter Annahme von kondensatorartigen Gashäuten oder elektrischen Doppelschichten an den Sondenoberflächen gestatten die beschriebenen Beobachtungen folgende Deutung: Solche Schichten bilden sich — wieso, möge später besprochen werden — sehr rasch nach dem Schmirgeln oder Schaben der Sonden, haben aber dann nur eine geringe Widerstandsfestig-

1) Hierbei gehen beide Galvanometer parallel, d. h. G zeigt nun mit steigendem V keine Maxima, sondern einen Verlauf wie Fig. 2 mit entsprechend geringerer Empfindlichkeit.

2) O. v. Bayer und A. Tool (a. a. O.) fanden nach 8 Tagen deutliche Oberflächenladungen bei ihren Versuchen.

keit; sie sind nur imstande, eine geringe Elektrizitätsmenge zu tragen. Wird diese durch Erhöhung der Spannung über ein bestimmtes Maß erhöht, so dringen die Ionen oder Eelektronen durch die trennende Haut hindurch, wodurch ein stärkerer Ausgleich der Ladungen stattfindet, während bei geringerer Spannung die Leitfähigkeit der Schichten geringer ist.

Die Sondenkapazitäten sind zu vergleichen mit Kondensatoren mit parallel geschalteten Widerständen, deren Größe abhängig ist von der angelegten Spannung. Ist diese gering, so ist die Leitfähigkeit des Aggregates verhältnismäßig gering, wird die Spannung größer, so fällt der Widerstand. Im nichtionisierten Gas, bei Unterbrechung des Geißlerstromes ist auch die Leitfähigkeit auf Null gesunken, weshalb die Sondenkapazitäten ihre Ladungen in so ausgezeichneter Weise halten. Die Leitfähigkeit der Schichten ist also gebunden an die Ionisation im Rohr.

Daraus möchte ich schließen, daß die Leitfähigkeit der Schichten hervorgerufen wird durch Elektronen, die durch die Schichten hindurchdringen können, während die größeren Ionen in den Schichten bleiben. Diese Elektronen werden einesteils durch die Stoßionisation in der Gasentladung selbst geliefert und wandern zur anodischen Sonde, anderenteils durch lichtelektrische Erregung des Metalls der kathodischen Sonde innerhalb der Gashaut. Nach dieser Hypothese wäre noch das Durchdringungsvermögen abhängig von der Schichtdicke und von der treibenden Potentialdifferenz. Mit den Erscheinungen nicht unvereinbar wäre noch die weitere Annahme, daß bei höheren Potentialdifferenzen, im horizontalen Teil der Kurven, auch die Ionen ein gewisses Durchdringungsvermögen erlangen.

Die Geißlerentladung, der die Sonden vor der Aufnahme der Kurve II ausgesetzt waren, bewirkt ein Anwachsen der Hautdicke. Dadurch wird die Sondenkapazität geringer, weil der Abstand der Kondensatorbelege größer geworden ist; aber trotzdem vermag sie eine höhere Elektrizitätsmenge zu fassen, weil die Festigkeit der Gashaut gewachsen ist, d. h. die dickeren Schichten dem Hindurchdringen der Elektronen ein stärkeres Hindernis entgegensetzen. Hierdurch ist der (im Modell parallel geschaltete) Sondenwiderstand gestiegen, was auch den flacheren

Verlauf der Kennlinien von Anfangs- und Dauerströmen bewirkt, wie a. a. O. mehrfach beschrieben wurde.

In gleicher Weise ist die Kurve III zu deuten: Durch die 20stündige Geißlerentladung wurde die Haut an den Sondenoberflächen abermals verstärkt. Sie bietet also den hindurchdringenden Elektronen oder Ionen einen abermals größeren Widerstand, wodurch sich einesteils der abermals flachere Verlauf der Kennlinien erklärt (die hier nicht wiedergegeben sind) und anderenteils die Fähigkeit der Sonden, Elektrizität aufzustapeln, so vermehrt worden ist, daß der angenähert wagrechte Teil der Kurve aus dem Beobachtungsbereich herausgerückt ist, so daß die Kurve III nur den linearen Anstieg zeigt, der, wie erwähnt, einer Kapazität von $^1/_{60}$ Mikrofarad entspricht, was auch mit der größeren Hautdicke im Einklang steht.

Ebenso stimmen mit diesen Annahmen die Beobachtungen der Funkenstöße überein, die bei einer unvorsichtigen Erhöhung der Spannung eintreten. Ich möchte sie mit einem Durchschlagen der Oberflächenhäute vergleichen oder etwa dadurch erklären, daß durch Joulesche Wärme die schlechtleitenden Schichten an gewissen Stellen zerstört werden. An so behandelten Sonden sind immer Stellen mit beschädigtem Metall zu bemerken, oft schmelzen die Sonden auch bei einer solchen Gelegenheit plötzlich ab. Dies tritt natürlich bei kräftigeren Schichten erst bei höheren Potentialdifferenzen auf als bei schwächeren. Ist aber z. B. eine ältere Schicht (III) an einer Stelle zerstört worden, so liegt hier das blanke Metall frei oder ist nur mit einer dünnen neuen Haut bedeckt, so daß sich nun die ganze Sonde so verhält, wie eine frisch geschmirgelte (I).

9. Es ist verlockend, aus den ballistischen Ausschlägen auf die Dicke der Schichten, die die kondensatorartigen Wirkungen hervorrufen, zu schließen. Das würde ohne Schwierigkeit möglich sein, wenn die Dielektrizitätskonstante der Schichten bekannt wäre. Ich habe nun beobachtet, daß 14 Tage langes Liegen frisch geschmirgelter Sonden in der Zimmerluft den Typus der ballistischen Ausschläge nicht merklich beeinflußte und vermute daher, daß die wirksame Schicht nicht durch

eine Haut adsorbierter Luft gebildet wird; auch Oxydschichten können nicht die Ursache der Erscheinungen sein, weil die Versuche auch mit Platin-Iridiumsonden gelingen. Es scheint mir hingegen wahrscheinlich, daß Kohlenwasserstoffe, herrührend von den Schmiermitteln, die zum Dichten der Hähne verwendet wurden, die „Gashäute" verursachen. Diese Vermutung wird gestützt durch die Beobachtungen von A. Schuster, der besonders hohe „Polarisationsspannungen" in verschiedenen reinen Kohlenwasserstoffen fand, wie ich a. a. O. erwähnte. Danach müßten die Kondensatorwirkungen vermieden oder mindestens geschwächt werden können, wenn das Gas durch flüssige Luft und andere Vorsichtsmaßregeln sauber gehalten würde, Mittel, die mir hier nicht zur Verfügung stehen. Ich möchte also für die Schichten eine mittlere Dielektrizitätskonstante, wie sie für höhere Kohlenwasserstoffe gilt, annehmen: etwa 2,1.

Aus den Beobachtungen, die a. a. O. besprochen und dort durch die Figg. 2—7 wiedergegeben sind, ist zu folgern, daß insbesondere die kathodische Sonde für die verschiedenen Polarisationserscheinungen verantwortlich zu machen ist. (Es ist dort auch [S. 21] kurz eine Hypothese umrissen, die das Zustandekommen der Schichten erklären soll; sie wäre vielleicht noch dahin zu erweitern, daß von den verschiedenen Ionen des Entladungsrohres die schwereren Kohlenwasserstoffe am besten an den Sonden haften bleiben.) Demnach dürfte für die Berechnung der Sondenkapazität aus der geometrischen Form nur eine einzelne Sonde in Betracht zu ziehen sein.

Nun gilt für einen zylindrischen Kondensator, wie er einer einzelnen Sondenkapazität entspricht, die Formel:

$$c = \frac{D}{2} \cdot \frac{lr}{a},$$

worin l die Länge, r den Radius der Sonde, D die Dielektrizitätskonstante und a die Dicke der wirksamen Schicht bedeutet; setzt man hier die Werte $l = 6$ cm, $r = 0{,}5$ mm, $D = 2{,}1$ und für c, den Kurven I—III der Fig. 2 entsprechend, der Reihe nach $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{60}$ Mikrofarad ein, so ergeben sich die Dicken der Schichten der Reihe nach zu

$$a = 35,\ 70,\ 210\ \mu\mu.$$

Diese Zahlen sind insofern recht befriedigend zu nennen, als man so in den Bereich der Größen von Schichten kommt, die Farben dünner Blättchen liefern; denn für die erste Ordnung der Newtonschen Farben wird eine Luftschichtdicke von 100 bis 245 $\mu\mu$ angegeben; dem entspricht (unter Annahme eines Brechungsverhältnisses 1,5) für höhere Kohlenwasserstoffe eine Schichtdicke von

67 bis 170 $\mu\mu$.

Damit stimmt die Beobachtung vortrefflich überein, denn an älteren Sonden, die einige Stunden der Geißlerentladung ausgesetzt waren, sind stets deutlich solche „Anlauffarben" zu bemerken.

10. Als Ergebnis dieser Arbeit ist zusammenzufassen: Die an Querelektroden in der Geißlerentladung auftretenden Polarisationserscheinungen werden im wesentlichen von Schichten verursacht, die sich an den Oberflächen dieser Elektroden ausbilden und eine kapazitative Wirkung haben.

Graz, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 10. Dezember 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

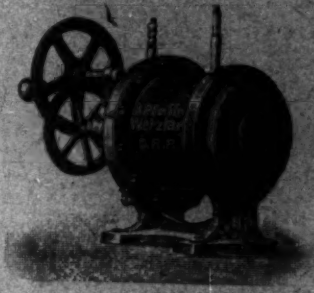
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P.



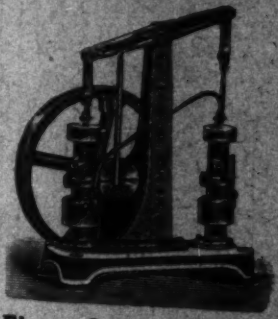
System Gaede, D.R.P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieberluftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene

Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

		Seite
1.	Carl Benedicks. Galvanometrischer Nachweis der Thermospannung 1. Art beim flüssigen Quecksilber	185
2.	Max Born und Elisabeth Bormann. Zur Gittertheorie der Zinkblende	218
3.	Hans Vogel. Die Zungenpfeife als gekoppeltes System	247
4.	A. Gockel. Beiträge zur Kenntnis von Farbe und Polarisation des Himmelslichtes	283

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1920. № 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Galvanometrischer Nachweis der Thermospannung 1. Art beim flüssigen Quecksilber;*

von Carl Benedicks.

Inhalt. Einleitung. — I. Versuche mit flüssigem Amalgam. — 1. Einleitendes. — 2. Versuchsanordnung (Apparat 1). a) Drosselgefäß. b) Hitzanordnung. c) Temperaturbestimmung. d) Stromkreis. e) Galvanometer. f) Material. — 3. Beobachtungen und Schlußfolgerung. — II. Versuche mit Quecksilber in Griffelgefäß. — 1. Einleitendes. — 2. Versuchsanordnung. — 3. Beobachtungen und Schlußfolgerungen. a) Deutlicher Effekt (Apparat 2). b) Zeitliche Abhängigkeit. c) Konstante Ausschläge (Apparat 2'). d) Zeichenkontrolle. e) Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art des Hg von der Temperaturdifferenz. — III. Versuche mit Quecksilber in Glasgefäß. — 1. Einleitendes. — 2. Herstellung des Apparates 3. — 3. Beobachtungen. a) Effekt deutlich merkbar. b) Ausschalten der Thermospannungen 2. Art. c) Zeichenkontrolle. d) Schlußfolgerung. — IV. Versuche mit Quecksilber in Asbestgefäß. — 1. Einleitendes. — 2. Herstellung von Drosselgefäßen aus Asbest. — 3. Übrige Versuchsanordnung (Apparat 4). — 4. Beobachtungen. a) Vorhandensein des Effekts. b) Temperaturabhängigkeit. c) Mögliche Fehlerquelle. — 5. Beobachtungen mit dem glimmerisolierten Apparat 5. — 6. Weitere Kontrolle. a) Eventueller Unterschied des Hg. b) Eventuelle Mitwirkung des Druckeffektes. c) Vorfindlichkeit der Spannungsursache in der Drosselstelle. d) Wasserkühlung. — V. Überblick der gewonnenen Resultate. — Zusammenfassung.

Einleitung.

In einer Arbeit[1]), welche beansprucht, die Existenz der durch Magnus' Satz in Abrede gestellten, nur von der Asymmetrie des Temperaturgefälles abhängigen Thermospannungen eines einmetallischen Kreises („1. Art") experimentell nachgewiesen zu haben, wurde auch das flüssige Quecksilber mit positivem Resultat untersucht, es gelang aber damals

1) C. Benedicks, Ann. d. Phys. (4) **55.** S. 1, 103. 1918; C. r. **163.** S. 751. 1916; **165.** S. 391, 426. 1917; Rev. de Métall. **15.** S. 329. 1918.

nicht, die betreffende Thermospannung mit dem Galvanometer sicher nachzuweisen.

Durch diese Arbeit wurde nun neuerdings H. Haga[1]) — welchem Forscher ja der Verdienst zukommt, als erster die Existenz des Thomsoneffektes in Quecksilber bewiesen zu haben — veranlaßt, nachzuprüfen, ob sich nicht durch die Anwendung zweier gekreuzter Quecksilberstrahlen eine Thermospannung 1. Art dieses Metalles nachweisen ließe; durch diesen Kunstgriff wurde der von mir betonte schädliche Einfluß der Glaswand vermieden. Das Resultat dieses, sowie eines anderen Versuches, wo ebenso strömendes Quecksilber zur Anwendung kam — der gleichfalls von H. Haga in Gemeinschaft mit F. Zernike ausgeführt wurde —, wurde indessen als rein negativ aufgefaßt.

Weiter ist neuerdings G. Borelius[2]) für die Gültigkeit des Magnusschen Satzes wieder eingetreten, indem er von gewissen Beobachtungen an kaltbearbeiteten Metallen zum Schluß geführt wurde, daß die von mir beschriebenen Thermoströme 1. Art von gewissen hypothetischen Oberflächenerscheinungen vorgetäuscht seien.

Unter diesen Umständen tritt das alte, von Emmet (1834), Matteucci (1837), Henrici (1850), Magnus (1851), Gaugain (1853), Braun (1885)[3]), und schließlich Haga und Zernike (1919) durchgehends mit negativem Resultat behandelte experimentelle Problem, ob sich im flüssigen Quecksilber am Galvanometer meßbare Thermoströme 1. Art nachweisen lassen, wieder im Vordergrund des Interesses auf dem Gebiet der Thermoelektrizität hervor.[4])

Sind Thermoströme 1. Art in Quecksilber wirklich nicht nachweisbar, dann müssen meine Ausführungen betreffend Thermoströme 1. Art überhaupt wohl als zweifelhaft er-

---

1) H. Haga u. F. Zernike, Sitzungsber. der Wiss. Akademie zu Amsterdam 29. März 1919; Proceedings **21.** Nr. 10. S. 1262.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. **60.** S. 381. 1919.

3) Vgl. C. Benedicks, Kritische Studien der Literatur, betreffend Thermospannungen im einmetallischen Kreise. Arkiv f. matem., astronomi och fysik. **14.** Nr. 20. S. 1—61. Stockholm 1919.

4) Negatives Resultat wurde ebenfalls neuerdings von P. W. Bridgman für flüssiges Hg erhalten: Proc. Amer. Acad. **53.** S. 267. 1918. Vgl. Physic. Rev. (2) **14.** S. 313. 1919.

scheinen; sind sie aber tatsächlich nachweisbar, dann dürften die fraglichen Einwände in Wegfall kommen.

Aus diesem Grunde habe ich das Problem wieder aufgenommen, und werde im folgenden für die gewonnenen Ergebnisse Bericht erstatten.

I. Versuche mit flüssigem Amalgam.

1. Einleitendes.

Nach den früheren Arbeiten des Verf. mußten die Hauptschwierigkeiten in folgenden Umständen liegen:

1. Dem ausnutzbaren Temperaturintervall sind beim Hg (von Gefrier- und Kochpunkten) verhältnismäßig enge Grenzen gesetzt.

2. Es ist sehr schwierig, ein Glasgefäß herzustellen, wo nicht die Wärmeleitung des Glases bzw. Abweichung von theoretisch günstigster Form, nur ein ungenügend schroffes Temperaturgefälle herbeiführt.

Um die erste Schwierigkeit zu umgehen, wurden die Versuche zunächst mit *flüssigem Wismut-Amalgam* (1 Bi + 1 Pb + 3 Hg; Gewichtsteile) ausgeführt, wo eine erheblich größere Thermokraft zu erwarten ist als beim reinen Hg.

Um der zweiten Schwierigkeit gerecht zu werden, wurde als Material des Gefäßes eine Substanz von geringerer Wärmeleitfähigkeit und leichterer Formgebung als Glas, nämlich *Griffelmasse*, gewählt.

Es war mir von vornherein einleuchtend, daß die geeignetste Methode diejenige einer stark verjüngten, zylindrischen, ruhenden Quecksilbermasse sein muß; die Verwendung schnell bewegter Massen, wie sie H. Haga benutzte, gibt möglicherweise zu mehreren perturbierenden Faktoren Veranlassung.

2. Versuchsanordnung.

a) Drosselgefäß.

Das mit Einschnürung versehene Gefäß („Drosselgefäß"; „Apparat 1") wurde folgendermaßen hergestellt. Ein 85 mm langes Stück eines 5,0 mm dicken gewöhnlichen Griffels von A. W. Faber wird von beiden Seiten gut zentral und gleich tief ausgebohrt (gewöhnlicher Spiralbohrer, 3,0 mm), bis $a\,a'$ (Fig. 1). Das übrigbleibende Stück $a\,a'$ wird mit einem feinen Loch durchbohrt (feinster Spiralbohrer 0,3 mm, in einem 3 mm Stiel zentral angebracht). Es werden dann die inneren Enden der Bohrungen genau symmetrisch sphärisch ausgewölbt,

bis eine Mittelwand von nur etwa 0,3 mm dünnster Dicke $b\,b'$ entsteht (spezieller, leicht herzustellender Aufräumer mit An-

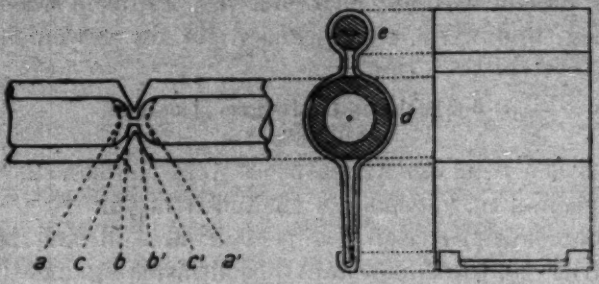


Fig. 1.

schlag). Schließlich wird genau in der Mitte eine scharfe Rinne $c\,c'$ am Drehstuhl angebracht. (Abstand $c\,c' = 2$ mm; Winkel etwa 54°.)

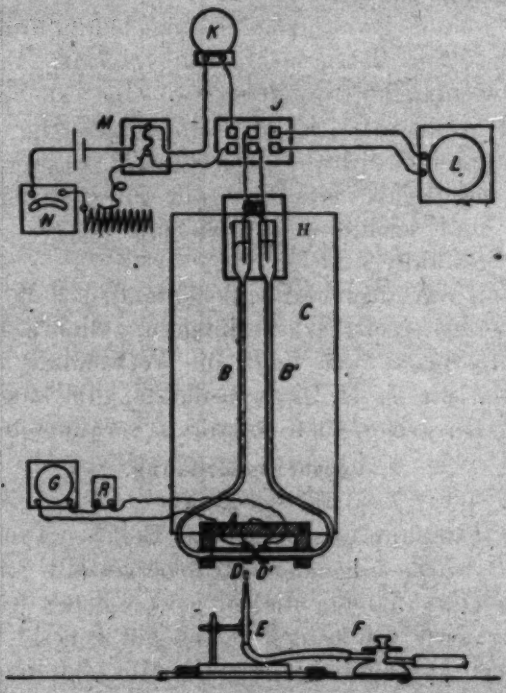


Fig. 2.

Das somit erhaltene, ziemlich zerbrechliche Drosselgefäß wird in einem ausgebohrten bügelgeformten Halter *A* (Fig. 2)

aus Topfstein oder dergleichen festgekittet. In die konisch erweiterten Enden des Drosselgefäßes passen zwei nach der Figur geformte Glasröhren $B\,B'$ (Länge 40 cm, äußere Dicke 4 mm); dieselben sind mit A an einem horizontalen Grundbrett C befestigt.

b) Hitzanordnung.

Das Drosselgefäß ist mit zwei gut anschmiegenden Hitzblechen $D\,D'$ (Fig. 2), d (Fig. 1) aus Kupfer versehen (Dicke 0,4 mm, Breite 10 mm; beiderseitig etwa 7 mm hinausragend).

Die Hitzung geschieht durch eine minimale Flamme (Mikroquarzbrenner) E mit Präzisionsregulierbahn F. E ist durch Anschläge leicht unter D bzw. D' zu bringen. Die Bleche sind gut schwarz oxydiert, damit das nicht gehitzte Blech durch Ausstrahlung gut gekühlt werde.

c) Temperaturbestimmung.

Zur Orientierung über die vorhandenen Temperaturdifferenzen dient ein Kupfer-Konstantanthermoelement. Die Lötstellen sind von Asbest umgeben, in den Aushöhlungen der Hitzbleche bei e Fig. 1 untergebracht. Als Ableseinstrument dient ein Zeigergalvanometer G (Fig. 2) von Hartmann und Braun (Nullpunkt in der Mitte) mit vorgeschaltetem Widerstand R.

Eine Eichung des Thermoelementes (Hg-Thermometer Zincke) ergab ausreichende Proportionalität der Ausschläge und der Temperaturdifferenzen. Es entspricht ein Skalenteil bei verschiedenen R folgenden Temperaturdifferenzen Δt:

R Ohm	Δt °C
700	3,22
1000	4,55
2000	8,87

Die (nach rechts verlaufenden) Ausschläge von G, welche einem Hitzen des rechten Bleches D' entsprechen, werden in den Tabellen mit + bezeichnet.

d) Stromkreis.

Im flüssigen Metall tauchen zwei kurze Eisendrähte H (die weiteren Enden von $B\,B'$ sind etwas nach oben gebogen);

die äußeren kupfernen Verbindungsdrähte werden durch eine glimmerisolierte Doppelklammer angeschlossen.

Ein thermokraftfreier Umschalter J verbindet das Drosselgefäß entweder mit dem Panzergalvanometer K oder mit der Wheatstoneschen Brücke L.

Der Galvanometerkreis enthält noch bei M einen Normalwiderstand von 0,001 Ohm, dem eine geringe bekannte, am Dezimilliamperemeter N abzulesende Potentialdifferenz e zugeführt werden kann. Die Einführung einer konstanten Potentialdifferenz dient (außer Empfindlichkeitsbestimmung) dem praktischen Zweck, bei einer Versuchsreihe, durch den Wiederkehr des Galvanometers zu seiner Nullage, sofort zu bemerken, ob der Stromkreis nicht mehr geschlossen ist. Bei der Erhitzung entstehende Kontaktfehler des flüssigen Metalles ist nämlich als die größte praktische Schwierigkeit des Experimentes zu bezeichnen. Denselben Kontrollzweck dient die eben angegebene Wheatstonesche Brücke; an und für sich kommt dem Widerstand des Kreises kaum Interesse zu.

H, J, K, M waren, wie in Fig. 2 angedeutet, durch dicke Metallgefäße gegen Temperaturstörungen geschützt.

e) Galvanometer.

Das Galvanometer war ein im Institut nach der Konstruktion des Verfassers gebautes hochempfindliches Panzergalvanometer vom inneren Widerstand 12,7 Ohm. Bei einem Skalenabstand von 1,5 m entsprach 1 mm $= 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ Volt, wenn im äußeren Kreis der Widerstand 1,4 Ohm war.

Bei dieser Empfindlichkeit erfordert die Einstellung auf eine neue Gleichgewichtslage etwa 30 Sek.

Am Tage ergaben die magnetischen Störungen, bei dieser Empfindlichkeit, nicht selten Schwankungen von 1 mm.

Die Ablesung geschah objektiv (mm-Skale).

f) Material.

Das Amalgam wurde aus 20 g Bi + 20 g Pb + 60 g Hg guter Reinheit hergestellt und zuerst filtriert.

3. Beobachtungen.

Schon einige vorläufige Beobachtungen ließen kräftige Ausschläge hervortreten. Eine längere Beobachtungsreihe ergab folgende Zahlen (Tab. 1). Mit ϱ wird der Widerstand des Drosselgefäßes nebst Zuleitungen bezeichnet.

Tabelle 1. Flüssiges Bi-Amalgam.

$\varrho = 0{,}38$ Ohm.

$2\,\Delta t$ °C	u mm	$2\,\Delta t$ °C	u mm
87	36	171	82
91	33	185	84
135	64	215	140
154	70	216	127
165	80	219	139

Als $2\,\Delta t$ wird die doppelte Temperaturdifferenz der Hitzbleche in °C bezeichnet (algebraische Differenz der − und + Ausschläge, die einer Stellung links bzw. rechts des Mikrobrenners entsprechen), als u die Differenz der betreffenden Galvanometerausschläge nach 2,5 Minuten.

Es handelt sich also um recht erhebliche Ausschläge, welche, wie eine graphische Darstellung lehrt, beträchtlich schneller als mit der Temperaturdifferenz proportional steigen. Wegen Reißens des Amalgamfadens bei höherer Erhitzung wurde nur mit einer tatsächlichen Temperaturdifferenz von $^1/_2 \cdot 219^0 = 110^0$ beobachtet.

Indessen zeigte sich, daß die Größe der Ausschläge sehr beträchtlichen Schwankungen unterworfen war. Nach Verschieben des Flüssigkeitsfadens (Aufgießen von etwas Amalgam im einen Schenkel) wurden stark herabgesetzte Ausschläge erhalten. Nach Entlehren und Wiederfüllen des Apparates erhielt man zwar wieder Ausschläge der früheren Größenordnung; ich bekam aber den Eindruck, daß das Amalgam keineswegs ganz homogen war.

Tatsächlich zeigte sich im Binokularmikroskop, daß das Amalgam sich in der Luft sofort mit einer dünnen Haut überzieht. Dies ist der Grund der im allgemeinen unrunden, oft zugespitzten Form der Tropfen des Amalgames.

Unter diesen Umständen will ich die erhaltenen Ausschläge nicht mit Bestimmtheit als von Thermospannungen 1. Art herrührend behaupten. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, daß die fragliche Legierung unter Innehalten besonderer Vorsichtsmaßregeln sicher homogen zu erhalten ist; es ist aber sicher, daß an einem solchen zusammengesetzten Körper beobachtete Thermospannungen nie als einwandfrei erscheinen werden.

Es wurde deshalb auf weitere Versuche mit dem Amalgam verzichtet.

Hinzugefügt sei nur, daß die hier am flüssigen Amalgam bei einer tatsächlichen Temperaturdifferenz von nur 110° beobachteten Thermospannungen etwa $140 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ Volt = 0,7 Mikrovolt betragen.

Von F. Braun[1]) wurde angegeben, daß mit dem fraglichen Amalgam überhaupt eine Potentialdifferenz über 0,5 Mikrovolt (was seine Beobachtungsgrenze war!) nicht zu erhalten ist.

Die von mir beobachteten Werte liegen also immer noch sehr nahe der Beobachtungsgrenze von Braun.

II. Versuche mit Quecksilber im Griffelgefäß.

1. Einleitendes.

Die beim vorigen Versuch erhaltenen Ausschläge, welche trotz der entdeckten ernsten Fehlerquelle (Inhomogenität), Thermospannungen 1. Art entsprechen konnten, waren so beträchtlich, daß dies für die Verwendbarkeit der Apparatur auch bei reinem Quecksilber zu sprechen schien, wo erheblich geringere Thermospannung zu erwarten ist. Es wurde deshalb im folgenden zu Quecksilber übergangen, wo jene Fehlerquelle nicht mehr zu befürchten ist.

Das benutzte Quecksilber war im Institut sorgfältig durch Destillation gereinigt.

2. Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung war unverändert; selbstverständlich wurde ein neues Drosselgefäß hergestellt („Apparat 2"), damit keine Verunreinigung sollte stattfinden können. Vor dem Füllen wurde unter Erhitzen trockene Luft durch den Apparat gesaugt.

3. Beobachtungen und Schlußfolgerungen.

a) Deutlicher Effekt (Apparat 2).

Die ersten mit Hg erhaltenen Beobachtungen sind in folgender Tabelle angegeben (die allerersten, bei ganz schwacher Erhitzung, sind fortgelassen).

---

1) F. Braun, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. I. S. 289. Berlin 1885; Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. 4. I. S. 743. Leipzig 1905.

Tabelle 2. Hg im Griffelgefäß.
$R = 1000$ Ohm; $\varrho = 0{,}24$ Ohm.

(Ablesung s von G) Temperaturausschlag bei Erhitzung			$2\,\Delta t$ °C	(Ablesung u von K) Galvanometerausschlag bei Erhitzung		
links	rechts	Differenz $r - l$		links	rechts	Differenz $r - l$
− 19	+ 22	+ 41		249	252	+ 3
− 19	+ 20	+ 39		248	252	+ 4
− 19	+ 20	+ 39		251	256	+ 5
− 17	+ 19	+ 36		252	256,5	+ 4,5
		+ 39,0	180			+ 4,1
− 22	+ 22	+ 44		252	259,5	+ 7,5
− 18	+ 23	+ 41		252	260,5	+ 7,5
− 21	+ 21,5	+ 42,5		253	259	+ 6
− 22	+ 20	+ 42		251	259,5	+ 8,5
		+ 42,4	195			+ 7,4

Die Ausschläge wurden jedesmal 1 Minute nach erfolgter Verschiebung des Mikrobrenners abgelesen.

Obgleich die tatsächliche Temperaturdifferenz Δt der Hitzbleche 100° nicht übersteigt, ergeben sich *recht regelmäßige, gut meßbare Ausschläge des Galvanometers von 4 bis 8 Skalenteile.* Dieselben (vom 9. Juli 1919, wie Tab. 3) dürften den ersten sicheren galvanometrischen Nachweis der Thermospannung 1. Art des Hg darstellen.

b) Zeitliche Abhängigkeit.

Indessen wurde bemerkt, daß die Ausschläge nicht konstant waren, sondern mit der Zeit abnahmen. Es wurden deshalb folgende Beobachtungen angestellt. Zusammengehörige Ablesungen der Instrumente G und K (Fig. 2) werden mit s_1 u_1 usw. bezeichnet. Die Zahlen der 1. Kolonne geben die Einstellung des Mikrobrenners an. (Vgl. Tab. 3.)

Die Beobachtungen sind in Fig. 3 graphisch dargestellt.

Da, wie aus der Tabelle ersichtlich, der Quecksilberfaden schon bei einer Brennereinstellung 3,8 riß, konnten nun nur geringe Temperaturdifferenzen benutzt werden (bei s_1 bis s_4 etwa $2\,\Delta t = 185°$).

Der Gang der Galvanometerausschläge u ist aber recht regelmäßig: zuerst ein mit der Temperaturkurve s symbater Ausschlag, der in weniger als 1 Min. nach der Verschiebung

Tabelle 3. Hg im Griffelgefäß.
$R = 1000$ Ohm; $\varrho = 0{,}248$ Ohm.

Brenner-einstellung		Minuten: 0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
3,6	s_1	—	+ 10,0	+ 12,7	+ 13,8	+ 14,0	+ 14,5
	u_1	275	272,5	273,2	271,6	271,0	270,5
	s_2	− 1,0	− 9,0	− 12,0	− 13,5	− 14,0	− 14,5
	u_2	268,5	269,0	270,5	275,0	275,8	276,1
	s_3	+ 1,5	+ 9,5	+ 12,5	+ 13,6	+ 14,5	+ 14,7
	u_3	278,5	279,0	276,5	275,4	273,8	271,4
	s_4	− 1,0	− 8,8	− 12,0	− 13,3	− 14,0	− 14,5
	u_4	268,0	268,8	271,0	272,9	275,6	277,4
3,8	s_5	− 3,0	− 11,0	− 14,0	− 15	—	—
	u_5	274,5	272,0	276,0	277,0[1]	—	—

Fig. 3.

des Brenners ein Maximum ergibt; dann eine starke Abnahme dieser Ausschläge.

Die erste Periode entspricht den Ausschlägen der Tab. 2. Weiter liegt es nahe, zu vermuten, daß die nachfolgende Abnahme in erster Linie von Seebeckeffekt an den Zuleitungen herrührt.

c) Konstante Ausschläge (Apparat 2').

Da ein Auskochen des mit 40 cm langen Zuleitungen versehenen Apparates 2 außerordentlich schwierig war, wurde folgende Modifikation vorgenommen.

1) Strombruch erfolgte hier.

Die in den konischen Erweiterungen des Drosselgefäßes passenden Glasröhren wurden sehr kurz genommen (vgl. Fig. 4), wodurch ein effektiveres Auskochen erleichtert wurde. In

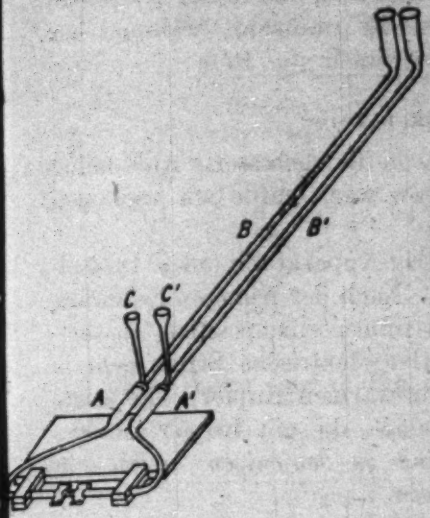


Fig. 4.

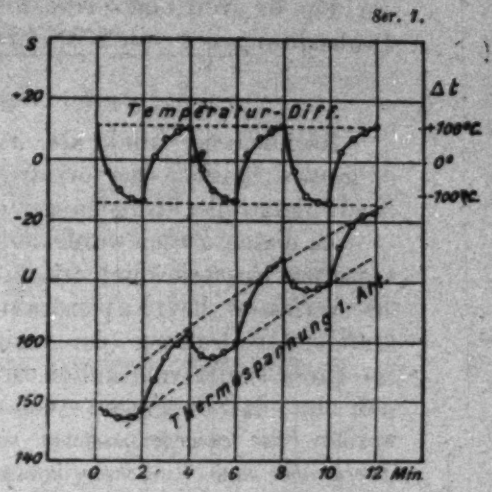


Fig. 5.

den Erweiterungen $A\,A'$ kamen nun etwa 60 cm lange, nur 3 mm dicke Zuleitungsrohre $B\,B'$; durch kleine Steigrohre $C\,C'$ waren dieselben leicht zu füllen.

Nach dieser Modifikation („Apparat 2'") wurde folgende, in Fig. 5 graphisch dargestellte Beobachtungsreihe gewonnen.

Tabelle 4. Hg im Griffelgefäß mit längeren Zuleitungen.
$R = 2000$ Ohm; $\varrho = 0{,}592$ Ohm.

	Minuten:			
	0,5	1,0	1,5	2,0
s_1	− 4	− 10,0	− 13,0	− 13,9
u_1	148,0	147,1	147,1	148,6
s_2	+ 1	+ 7,0	+ 9,5	+ 10,6
u_2	153,8	157,2	159,4	161,0
s_3	− 3	− 10,0	− 12,5	− 13,5
u_3	157,5	157,2	158,0	159,9
s_4	+ 2	+ 7,0	+ 9,5	+ 10,8
u_4	166,0	170,0	172,3	173,5
s_5	− 4	− 12,0	− 13,4	− 41,0
u_5	169,2	168,8	169,0	169,8
s_6	+ 3	+ 7,5	+ 9,8	+ 11,0
u_6	175,6	179,5	181,0	181,2

Wie an Fig. 5 ersichtlich, verlaufen die Ausschläge sehr regelmäßig, sind ein wenig größer als vorher (8 mm) — die Temperaturdifferenz Δt war auf etwa 111° gesteigert — und zwar verlaufen sie in derselben Richtung wie in der 1. Periode der Fig. 8. Von einer Abnahme ist nunmehr, während der Beobachtungszeit von 2 Minuten, nicht die Rede.

d) Zeichenkontrolle.

Nachdem der Effekt also durch die verbesserte Anordnung in großer Reinheit hervorgetreten war, wurde zur wichtigen Zeichenkontrolle übergegangen.

Zu diesem Zweck wurde der Hg-Apparat mit einem Drosselkreuz aus Kupferdrähten ersetzt. Nach der früheren Erfahrung des Verfassers hat Kupferdraht immer eine positive Thermokraft erster Ordnung (der positive elektrische Strom geht in der Drosselstelle vom kalten zum warmen Kupfer). Es zeigte sich nun, daß diejenigen Ausschläge, die mit Kupfer erhalten werden, *die entgegengesetzten sind zu denjenigen, welche mit Quecksilber zum Vorschein kommen.*

Flüssiges Quecksilber ergibt demgemäß eine negative Thermokraft 1. Art, wie es nach den früheren, eingehenden Untersuchungen des Verfassers[1]) *sein soll.*

Es wurde weiter direkt festgestellt, daß eine Erhitzung des Quecksilbers in der Nähe der Elektroden Ausschläge ergibt, die in umgekehrter Richtung verlaufen zu denjenigen der Thermospannung 1. Art.

e) Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art des Hg von der Temperaturdifferenz.

Um zu erfahren, wie die Thermospannung des Hg mit der Temperaturdifferenz zunimmt, wurde mit Apparat 2' noch eine Beobachtungsreihe ausgeführt, bei 7 verschiedenen Einstellungen des Mikrobrenners. An den erhaltenen, der Fig. 5 analogen Beobachtungskurven wurden Temperaturdifferenz und Galvanometerausschlag abgelesen. Die so erhaltenen Zahlen sind in Tab. 5 vereinigt. Es sei hinzugefügt, daß bei den größeren Temperaturdifferenzen immer noch eine gewisse Abnahme der Ausschläge merkbar war. Der letzte

1) a. a. O., S. 103.

u-Wert (13) ist ein Einzelwert; die meisten sind aus etwa vier Erhitzungsperioden erhalten.

Tabelle 5. Hg im Griffelgefäß.

Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art von der Temperaturdifferenz.

Brenner-einstellung	$2\,\Delta t$ °C	u mm
6,0	179	2,8
6,1	195	2,7
6,2	213	3,8
6,3	230	3,8
6,5	275	5,5
6,6	285	9,0
6,7	310	13

Diese Daten sind in Fig. 6a graphisch dargestellt.

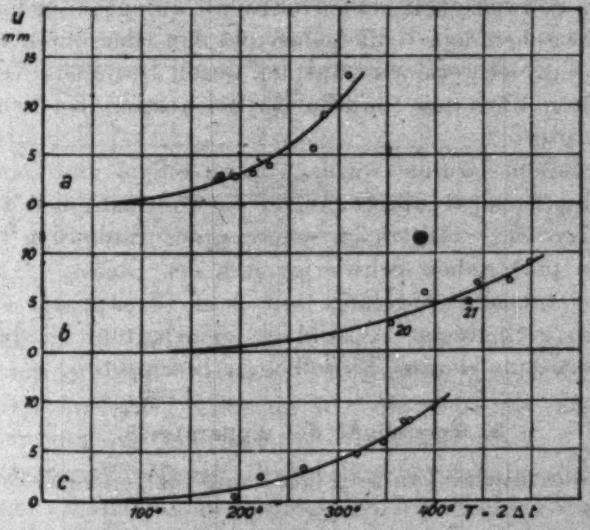


Fig. 6.

Es ergibt sich, daß *die gefundenen Thermospannungen 1. Art des Hg viel schneller zunehmen als die beobachteten Temperaturdifferenzen.*

In der Figur ist eingezeichnet die Kurve

$$u = 0{,}89 \cdot 10^{-9} \cdot T^3,$$

wo T für $2\,\Delta t$ geschrieben wird.

Wie ersichtlich, gibt dieselbe die Beobachtungen innerhalb der Versuchsfehler recht gut wieder.

Wenigstens in erster Annäherung erscheinen also die Thermospannungen 1. Art des Hg als zu der 3. Dignität des Temperaturgefälles proportional.

Ist eine Temperaturdifferenz von 100° in 0,1 mm vorhanden, ist die resultierende Thermospannung 1000mal größer, als wenn sie in 1,0 mm vorhanden ist.

III. Versuche mit Quecksilber im Glasgefäß.

1. Einleitendes.

Bei den vorigen Versuchen mit Griffelgefäßen hatte es sich als unmöglich gezeigt, durch Auskochen fremde Gase zu entfernen; es konnten deshalb keine größeren Temperaturdifferenzen als etwa 155° zur Anwendung kommen.

Diese Schwierigkeit schien teilweise auf gasundichte Verbindung zwischen dem Griffelgefäß und den Glasröhren zurückzuführen sein, teilweise aber auf den durch besondere Versuche festgestellten Umstande, daß die Griffelsubstanz bei Erhitzung Wasser abgibt.

Aus diesem Grunde wurde nun zu einem ganz aus Glas bestehenden Apparat übergegangen — wo Gasfreiheit leichter zu bewirken ist — trotz den schon in der Einleitung hervorgehobenen praktischen Schwierigkeiten des Glases.

Da es tatsächlich gelang, mit dem Glasapparat sichere, wenn auch geringfügige Ausschläge zu erhalten, sei die Herstellungsweise in einigen Einzelheiten beschrieben.

2. Herstellung des Apparates 3.

Das eigentliche Drosselgefäß wurde folgendermaßen hergestellt.

Ein Stück Glasröhre von 10 mm äußerem Durchmesser wird in der Mitte etwas aufgeblasen und ausgezogen, so daß es daselbst dünnwandig wird (Fig. 7a). Indem das Rohr in der Gebläseflamme gedreht wird, erhält man leicht eine gleichnamige Verjüngung wie Fig. 7b. Es wird dann das Rohr, *ohne es zu drehen*, in eine kleine, scharfe Flamme vorübergehend hineingeführt: es verjüngt sich dabei an der von der scharfen Flamme getroffenen Seite etwa wie bei *C*, unten (dabei ist

nicht die Temperatur, sondern die Gebläsewirkung der Flamme ausschlaggebend; eine stille, spizte Flamme ist ungeeignet). Nachdem so ringsum stellenweise verjüngt worden ist, entsteht eine Form etwa wie bei *d*. Die Handhabung des Rohres bereitet bis jetzt keine Schwierigkeit. Um die Drosselstelle beim darauffolgenden Verschmelzen mit den Zuleitungsröhren mechanisch zu schützen, wird sie zunächst mit Siegellack umgeben, dann mit einem gegen Erwärmung des Siegellackes schützenden Gipspropfen (Fig. 7e).

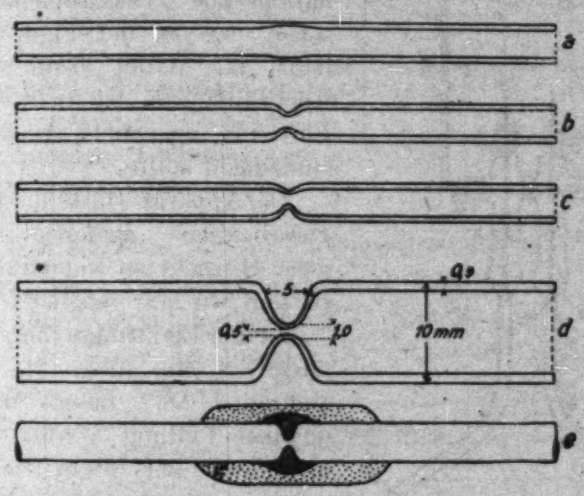


Fig. 7.

Nachdem die Zuleitungen zugeschmolzen und gebührend befestigt worden sind, wird der Gipspfropfen mit der Laubsäge zerlegt und entfernt (Anfeuchten!), wonach das Siegellack weggeschmolzen und mit Spiritus abgewischt wird.

Mit diesem Kunstgriffe bietet die Herstellung des Apparates jedem im Glasblasen Geübten keine besondere Schwierigkeit.

Die ungefähre Form der Drosselstelle ist an Fig. 7d zu sehen; die lichte Weite war 0,50—0,52 mm; es wäre leicht, dieselbe noch erheblich zu vermindern.

Der beträchtliche Durchmesser von 10 mm wurde gewählt, um eine verhältnismäßig kräftige Verjüngung leichter zu erhalten; außerdem damit eventuelle Luftausscheidung weniger Einfluß haben sollte.

Beiderseits der Drosselstelle wurden zwei spiralgewundene dünne Glasbänder eingeschoben, um diese empfindliche Stelle beim Auskochen gegen heftige herangeschleuderte Quecksilbermassen zu schützen.

Die 18 cm langen, 5,5 mm dicken Zuleitungsröhren waren nach Fig. 8 gebogen; die sie oben abschließenden Behälter $A\,A'$ waren unten etwas verjüngt und mit eingeschliffenen, durch den Korkstopfen $B\,B'$ hindurch zu hantierende Glasstöpfchen versehen, wie in der Figur ersichtlich; dies damit beim späteren Nachfüllen von Hg in $A\,A'$ keine Luft ins eigentliche Drosselgefäß eindringen sollte.

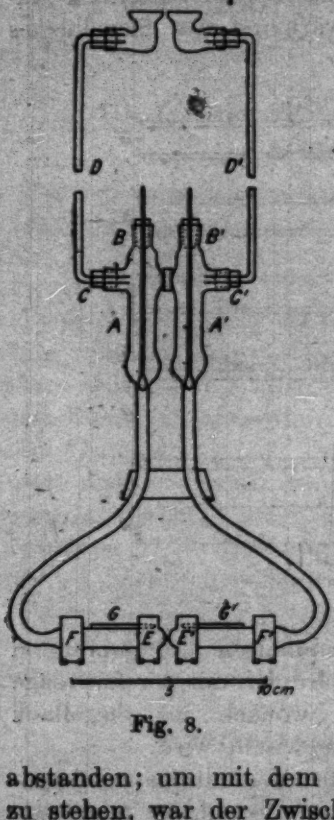


Fig. 8.

Der Apparat wurde aus Jenenser Durobaxglas angefertigt, um in jeder Hinsicht so widerstandsfähig zu sein wir nur möglich.

Zu den Elektroden führen 40 cm lange, 3 mm dicke Hg-gefüllte Röhren $D\,D'$. Behufs ihrer bequemen Füllung waren in $B\,B'$ kleine in der Figur nicht angegebene Steigröhren vorgesehen.

Die die Drosselstelle umgebenden Hitzbleche $E\,E'$ (Dicke 0,4 mm; ausragende Breite 11 mm) waren kuppelartig geformt, so daß sie bei der Drosselstelle nur 2 mm abstanden; um mit dem Rohr in thermisch guter Berührung zu stehen, war der Zwischenraum mit Graphitkitt ausgefüllt. Die beiden äußeren Hitzbleche $F\,F'$ wurden für eine spätere Kontrolle angebracht (S. 201).

Für die Temperaturbestimmung waren Kapillare $G\,G'$ mit Graphitkitt am Glasrohr befestigt.

3. Beobachtungen.

a) Effekt deutlich merkbar.

Das Aussehen der mit dem Glasapparat (ohne äußere Hitzbleche $F\,F'$!) gewonnenen Bestimmungen geht aus Fig. 9

hervor ($R = 2000$ Ohm, wie bei allen nachfolgenden Versuchen; $\varrho = 0{,}49$ Ohm). Der allgemeine Charakter entspricht recht genau den mit dem Griffelapparat zuerst erhaltenen (Fig. 8), nur sind die Ausschläge jetzt geringer.

Es liegt demgemäß nahe zu vermuten, daß die nach Hitzumkehr zunächst erfolgenden Ausschläge der Thermospannung 1. Art, die nachfolgenden, langsamer erscheinenden Ausschläge in entgegengesetzter Richtung aber fremden Thermospannungen 2. Art entstammen.

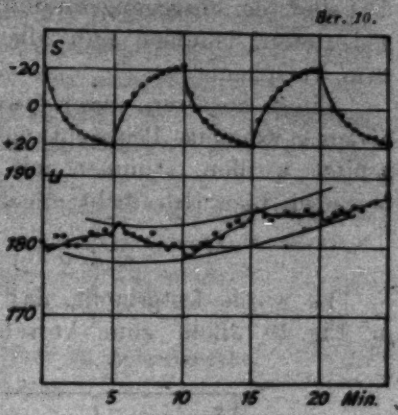


Fig. 9.

b) Ausschalten der Thermospannungen 2. Art.

Um dies sicher entscheiden zu können, wurden die äußeren Hitz- bzw. Abkühlungsbleche FF' (Fig. 8) angebracht.

Beim Hitzen der inneren Bleche wurden jetzt die Beobachtungen der Fig. 10 gewonnen; beim mit genau derselben Mikroflamme erfolgenden Erhitzen der äußeren Bleche gingen diejenigen von Fig. 11 hervor.

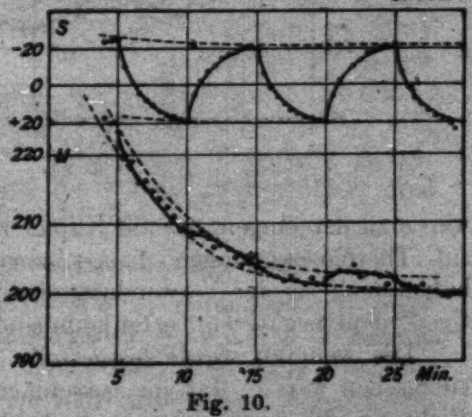


Fig. 10.

Es ist aus Fig. 10 ersichtlich, daß schon durch die Anbringung der äußeren Bleche die langsamer erfolgenden Ausschläge — in geradezu überraschender Weise — eliminiert worden sind, indem die äußeren Bleche durch Ausstrahlung gegen die Verbreitung der Wärme zu den Zuleitungen eine recht effektive Schutzwirkung ausüben.

Fig. 11 zeigt, daß beim Erhitzen der äußeren Bleche, wenn an der Drosselstelle nur ein geringfügiges Temperatur-

gefälle entstehen kann, umgekehrt die auf den Thermospannungen 1. Art zurückgeführten Ausschläge eliminiert worden sind; die entgegengesetzten, als Thermospannungen 2. Art gedeuteten, kommen nun allein, und in verstärkter Weise, zum Vorschein.

Einige späteren, unter etwas abgeänderten Druckverhältnissen gewonnene Beobachtungsreihen, wo die inneren Bleche gehitzt wurden, stimmen mit Fig. 10 recht genau überein, brauchen hier aber nicht angeführt zu werden.

c) Zeichenkontrolle.

Es wurde festgestellt, daß diejenigen Ausschläge, welche in Fig. 10 allein zum Vorschein kommen, entgegengesetzt

Sur. 13.

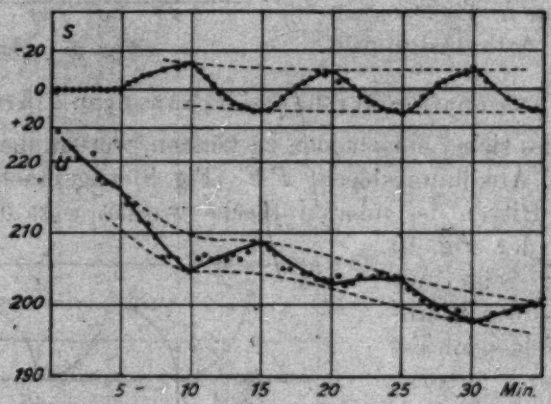


Fig. 11.

waren zu denjenigen, die mit Kupfer zu erhalten sind, d. h. die auf Thermospannungen 1. Art zurückgeführten Ausschläge haben auch bei der Verwendung eines Glasapparates den richtigen, dem negativen Hg zukommenden Sinn.

Des weiteren wurde festgestellt — wie ja ohne weiteres einzusehen war —, daß die Ausschläge der Fig. 11 in derselben Richtung gehen wie eine noch direktere Erhitzung der Zuleitungen.

d) Schlußfolgerung.

Es geht aus dem Angeführten hervor, daß auch mit dem Glasapparat ganz unzweideutige, wenn auch nur geringfügige (2 mm) Ausschläge beobachtet wurden, die von dem Tempe-

raturgefälle an der Drosselstelle, also von Thermospannungen 1. Art, herrühren.

Mit dem Glasapparat waren wegen dem dabei ermöglichten besseren Auskochen größere Temperaturdifferenzen erhalten (um 2×175^0) als früher möglich war anzuwenden; es wurde aber wegen der größeren Schwierigkeit, eine gut geformte Drosselstelle herzustellen, zu einer modifizierten Apparatenart übergegangen.

Wichtig bleibt jedenfalls die Feststellung, daß auch in einem Glasapparat, mit nicht besonders günstig geformter Drosselstelle, eindeutige Ausschläge der Thermokräfte 1. Art zu erhalten sind.

IV. Versuche mit Quecksilber im Asbestgefäß.

1. Einleitendes.

Da kein Material von leichterer Formgebung als Glas zu Gebote stand, wo Gase gut zu entfernen sind, wurde zur Vermeidung des sonst bei höherer Erhitzung immer eintretenden Reißens des Quecksilberfadens folgende Veränderung vorgenommen: zu wählen ist ein Material, das bei leichter Formgebung und geringer Wärmeleitfähigkeit für Quecksilber dicht, *für Gase aber durchlässig* ist; dadurch wird den bei der Erhitzung abgeschiedenen Gasen die Gelegenheit geboten, durch die Gefäßwand abzugehen. Ein solches Material ist *Asbest*. Es wurde deshalb — und zwar mit entschiedenem Vorteil — die im folgenden benutzten Drosselgefäße aus Asbest hergestellt. Durchzuführen bleibt weiter eine vergrößerte Sicherheit der Zuleitungen, darauf hinzielend, Seebeckeffekt und eventuellen Druckeffekt auszuschließen.

2. Herstellung von Drosselgefäßen aus Asbest.

Aus (0,5 mm) dünnem Asbestpapier werden 50 mm lange Röhrchen vom Lumen 3 mm hergestellt (etwa 17×50 mm zu schneiden; jede Längskante 5 mm breit mit einer Feile zu verschwindender Dicke zu spitzen; mit Wasser anfeuchten; unter Zuhilfenahme einer geeigneten Rinne um einen Stahldorn von 3 mm festwickeln; über eine Flamme trocknen lassen).

Ein Asbeströhrchen wird, auf dem Dorn sitzend, am einen Ende mit der Feile ringsum zugespitzt, wird dann über den Stahldorn, der am Drehstuhl bis auf eine kurze, sehr feine

Spitze abgerundet worden ist, so gehalten, wie es Fig. 12a an gibt. Das freie Ende wird dann angefeuchtet (am besten mi Saliv) und unter Umdrehen zwischen den Fingern oder mi einer halbkugeligen Vertiefung eines Holzstückes gegen de Dorn allmählich angedrückt (wie die gestrichelte Linie es an gibt). Es entsteht dadurch ein einseitig, bis auf einem seh feinen zentralen Loch geschlossenes Asbeströhrchen; es sin deren zwei herzustellen.

Das eine wird in einem gut anpassenden, runden Loc eines bügelgeformten Halters festgekittet (Fig. 12b, links); al Material für den Halter ist massiver Talk recht geeignet (wi dies zum Aufzeichnen auf Eisenblech käuflich ist!), ebens Topfstein oder dergl.; Kitt aus Talkpulver und mit Wasse

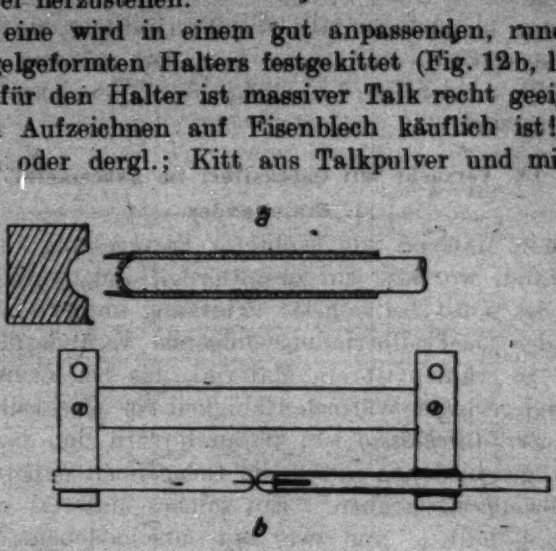


Fig. 12.

verdünntem Wasserglas. Das zweite Asbestrohr, dem eine sehr feine, an einem 3 mm dicken Stiel befestigte Nadel eingeschoben ist, wird dann rechts festgekittet, nachdem die Nadel auch im linken Rohr eingeführt worden ist (das rechte Loch des Halters ist gröber als der Rohrdurchmesser, und also Bewegungsfreiheit vorhanden). In der Mitte bleibt noch 0,1 bis 0,2 mm der Nadel frei sichtbar. Um diese künftige Drosselstelle wird nun mit einem sehr feinen Pinsel ganz wenig angefeuchtetes Asbestpulver aufgetragen; es wird mit einer Schlinge feinsten Seidendrahtes ringsum zusammengepreßt. Es kann die Nadel nach kurzwierigem Trocknen entfernt werden, und man ist im Besitz eines ganz brauchbaren Drosselgefäßes.

Vorläufig wurden nicht feinere Nadeln als 0,25 mm benutzt; die Methode gestattet aber eine weitgehende Verfeinerung.

3. Übrige Versuchsanordnung.

In die schwach konisch erweiterten Enden *A A'* passen 55 cm lange, 3,5 mm dicke Glasröhren, die schnell nach Fig. 18 zusammenlaufen; die aneinander liegenden Strecken *B C* tauchen behufs Temperaturausgleiches in eine mit Quecksilber gefüllte Holzrinne. Um jeden Druckeffekt wenn möglich auszuschließen, liegt dieser Teil des Kreises, wo die Temperaturänderungen stattfinden, bis auf einige Millimeter horizontal; das hölzerne Grundbrett, an dem Drosselgefäß und Glasröhre befestigt sind, ruht auf einem Nivellierstativ (vgl. Fig. 18). Erst bei *C C'* sind die Glasröhren vertikal umgebogen; sie enden in weiteren Behältern *D*. Die Niveaudifferenz zwischen

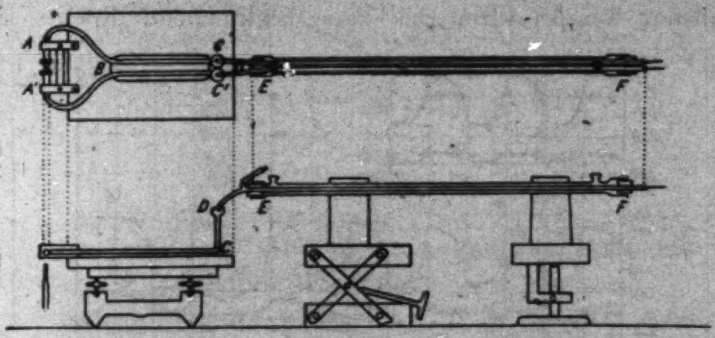


Fig. 18.

dem Quecksilber in *D* und der Grundebene durch *A A'* betrug 65 mm; diese Niveaudifferenz genügt, um das Quecksilber durch die Drosselstelle leicht hindurchzupressen.

Wie aus dieser Anordnung zu ersehen ist, muß eine Temperaturdifferenz, um eine von Druckunterschied herrührende Thermospannung 2. Art verursachen zu können, sich von den Hitzblechen bis *C C'* fortpflanzen (vgl. weiter unten, S. 210).

Um jedes Erhitzen der Elektroden soweit möglich zu vermeiden, geschah die Stromabnahme durch zwei 1 m lange, 3 mm dicke mit Quecksilber gefüllte Glasröhren; dieselben sind bei *E* etwas nach unten gebogen; bei *F* sind die Elektroden (in Berührung mit Hg 1 cm Fe-Draht, in Cu-Draht fortsetzend) mit Picein dicht eingeführt. Bei *E* enden die Röhren für das bequeme Füllen der freien Rohrenden T-förmig, mit abschließenden Gummischläuchen.

Beinahe die ganzen Strecken EF laufen in einem äußeren, quecksilbergefüllten Glasrohre.

Um gutes Wärmeübertragen zu ergeben, waren die beiden Hitzbleche mit Graphit (+Wasserglas) angekittet („Apparat 4").

Vor dem Füllen war das Drosselgefäß gut gehitzt und dabei trockene Luft durchgesaugt. Das Füllen des Apparates geschah in einfachster Weise; irgendwelches nachheriges Auskochen kam wegen der Luftdurchlässigkeit des Asbestrohres gänzlich in Wegfall

4. Beobachtungen.

a) Vorhandensein des Effektes.

Es ergab sich, daß mit diesem Apparat 4 tatsächlich die höchsten Temperaturen bis zum beginnenden Kochen des

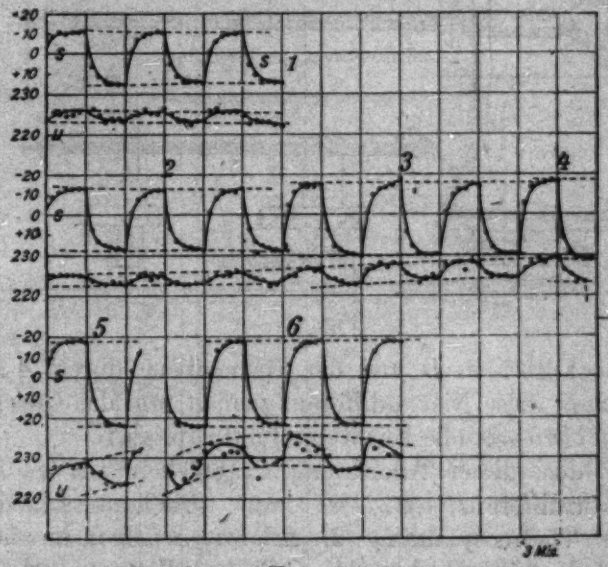


Fig. 14.

Quecksilbers erreicht werden konnten, ohne daß ein Reißen des Quecksilberfadens stattfand.

Die erhaltenen Beobachtungen sind in Fig. 14 graphisch wiedergegeben. Es sind ganz unzweideutige Ausschläge vorhanden; sie bestätigen durchaus das frühere Resultat.[1])

1) Daß das Galvanometer in dieser und in der folgenden Beobachtungsreihe (Figg. 14 u. 15) fast gar keinen allmählichen Gang aufweist, beruht darauf, daß die Anordnung in Fig. 13 vollständig sym-

Die sorgfältigst ausgeführte Zeichenkontrolle stimmte ebenfalls: auch in Apparat 4 verhält sich das Quecksilber thermoelektrisch negativ.

b) Temperaturabhängigkeit.

Die an Fig. 14 abgelesenen Temperaturdifferenzen $2\,\Delta t$ und Galvanometerausschläge u sind in Tab. 6 zusammengestellt.

Tabelle 6. Hg im Asbestgefäß.

Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art von der Temperaturdifferenz. $\varrho = 1{,}36$ Ohm.

Brennereinstellung	$2\,\Delta t$ °C	u mm
(6,4	195	0,5)
6,9	222	2,5
7,1	266	3,1
7,4	320	4,6
8,0	346	5,8
8,5	368	8,0
8,5	370	8,0

(Die erste Zeile gehört einer vorläufigen Reihe mit einer Hitzperiode von nur 2 Minuten).

Bei graphischer Darstellung (Fig. 6c, S. 197) zeigt sich, daß u viel rascher zunimmt als $2\,\Delta t$. In der Figur ist eingezeichnet die Kurve

$$u = 0{,}15 \cdot 10^{-6} \cdot T^3,$$

wo T für $2\,\Delta t$ geschrieben wird.

Wie im früheren Falle (S. 197) *schließen sich die Beobachtungen dieser Kurve gut an.*

c) Mögliche Fehlerquelle.

Bei dieser Beobachtungsreihe liegt es nahe, eine besondere Fehlerquelle zu befürchten: der Asbest ist ja kein besonders guter Isolator, und es erscheint nicht als ausgeschlossen, daß in diesem Falle die Beobachtungen von einer Überleitung zwischen dem Quecksilber und den kupfernen Hitzblechen bzw. dem vorhandenen Graphit abhängig sein könnten.

---

metrisch ist. In der früheren Anordnung Fig. 8 war eine gewisse Einseitigkeit des (nicht gezeichneten) Stativs noch vorhanden, und für den Gang des Galvanometers in Figg. 9—11 verantwortlich.

Bei vorgenommener Isolationsprüfung zeigte sich tatsächlich, daß eine Überleitung vorhanden war, die keineswegs ohne weiteres vernachlässigt werden konnte; es ergab sich, daß die Kombination Quecksilber-Asbest-Graphit eine effektive galvanische Spannung von einigen Centivolt ergibt, deren Temperaturveränderung für die beobachteten Ausschläge möglicherweise verantwortlich sein könnte.

Um diese Möglichkeit sicher beurteilen zu können, wurde ein neues Drosselgefäß aus Asbest hergestellt, wo zwischen den kupfernen Hitzblechen und Asbeströhren ein Glimmerblatt eingeschaltet wurde; Graphit wurde ganz vermieden („Apparat 5'").

Bei vorgenommener Isolationsprüfung ergab sich, daß eine Spannung von 0,10 Volt, das durch Galvanometer, Hg, Asbest und Glimmer, Graphit und Kupferblech kurz geschlossen wurde, nunmehr nicht zum geringsten merkbaren Ausschlag Veranlassung gab, dies sowohl in der Kälte, als wenn stark gehitzt wurde.

5. Beobachtungen mit dem glimmerisolierten Apparat 5.

Die mit Apparat 5 gewonnene Beobachtungsreihe ist in Fig. 15 dargestellt.

Daß die Galvanometerausschläge merkbar geringer sind als mit Apparat 4, hängt teilweise von der weniger guten Wärmeübertragung, teilweise wohl auch von einer ein wenig gestreckteren Form der Drosselstelle ab.

Im ganzen bestätigt diese neue Beobachtungsreihe die frühere aufs beste — auch betreffend der Ausschlagsrichtung. Nur kommt es wahrscheinlich vor, daß das auffallend unregelmäßige Verhalten bei der stärksten Erhitzung in Fig. 14 wirklich auf die besprochene Überleitung zurückführbar ist, denn in Fig. 15 sind diese Unregelmäßigkeiten nicht mehr zu ersehen.

Ein Ausmessen ergab folgende Zahlen.

Tabelle 7. Hg im Asbestgefäß mit Glimmerisolation.

$\varrho = 1{,}37$ Ohm.

Brenner-einstellung	$2\,\Delta t$ °C	u mm
7,3	390	6,0
8,0	444	6,8
8,6	477	7,0
9,0	498	9,0

Bei diesen Beobachtungen, die eigentlich nur als Kontrolle des Einflusses der befürchteten Fehlerquelle gedacht waren, ist die Temperatur nur wenig variiert worden; die in Fig. 6b, S. 197 gegebene graphische Darstellung (Kreise) läßt indessen hervorgehen, daß sie mit einer T^3-Kurve, wie sie auch hier eingezeichnet wurde, ebenfalls genügend gut übereinstimmen.

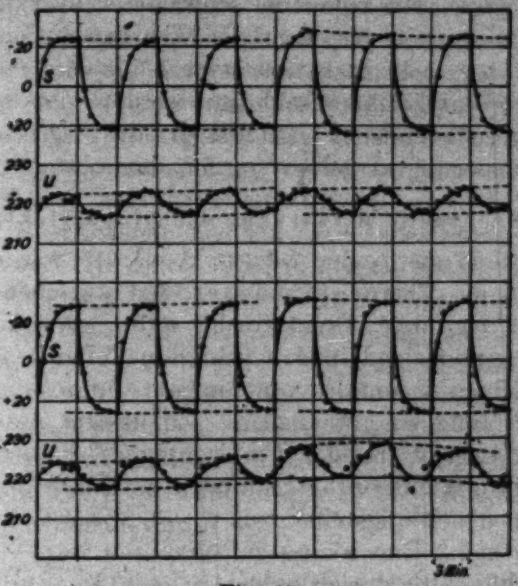


Fig. 15.

6. Weitere Kontrolle.

Die nun erhaltenen Bestimmungen dürften als recht sicher zu bezeichnen sein. Es schien aber der Mühe wert, noch einige Punkte zu kontrollieren.

a) Eventueller Unterschied des Hg.

So erschien es nicht ganz ausgeschlossen, daß zwischen demjenigen Quecksilber, das im Drosselgefäß mit dem Asbest in Berührung steht, und demjenigen der langen Zuleitungen irgendwelcher, Thermospannungen 2. Art ergebender Unterschied vorhanden wäre, trotz ursprünglicher Identität.

Es wurde deshalb das Quecksilber, das im Drosselgefäß gedient hatte, in ein unverjüngtes U-förmiges Glasrohr ge-

gossen, das mit den langen Zuleitungsröhren verbunden wurde. Gehitzt wurde umwechselnd bei den Berührungsstellen, und zwar mit direkter Flamme.

Es wurde durch zwei Beobachtungsreihen (jede von 6 × 3 Min.) festgestellt, daß bei einer Erhitzung, welche schon diejenige der wirklichen Versuche erheblich übertraf, nicht die geringste Einwirkung zu spüren war; bei einer noch stärkeren Erhitzung zeigte sich zwar eine schwache Einwirkung in derselben Richtung wie diejenige der Thermospannung 1. Art, sie betrug aber nicht mehr als etwa 1 mm.

Es kann demgemäß geschlossen werden, daß bei den zur Anwendung gekommenen Hitzungen das Quecksilber als durchaus homogen betrachtet werden darf.

b) Eventuelle Mitwirkung des Druckeffektes.

Wenigstens die beiden letzten Apparate waren so angeordnet, daß die Thermospannung 2. Art zwischen Hg unter Druck und Hg ohne Druck nicht sollte einwirken können (kein Druckunterschied in den gehitzten Teilen!).

Es erschien jedenfalls von einigem Interesse, dies einer direkten Prüfung zu unterziehen. Zu diesem Zwecke wurde umwechselnd gerade bei den Umbiegungen C bzw. C' (Fig. 13) mit der Mikroflamme direkt gehitzt.

Eine Beobachtungsreihe von 6 × 3 Minuten ließ hervorgehen, daß keine Einwirkung zu verspüren war.

Tatsächlich ergibt sich nach dem von Des Coudres u. a. bestimmten Wert der diesbezüglichen Druckkonstante[1]), daß bei der vorhandenen Druckdifferenz von 6,5 cm = 0,086 Atm. erst eine Temperaturdifferenz von 250° C zu einer Spannungsdifferenz wegen Druckunterschieden um

$$4{,}7 \cdot 10^{-9} \text{ Volt},$$

d. h. etwa 1 mm Galvanometerausschlag Veranlassung gibt.

Bei den eigentlichen Versuchen dürfte deshalb der Druckeffekt kaum brauchen berücksichtigt zu werden.

Zu bemerken ist aber noch, daß die *Richtung* der von Druckdifferenz herrührenden Thermospannung *entgegengesetzt* ist zu derjenigen Richtung, die sich für die Thermospannung

1) Vgl. z. B. K. Baedeker, Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern. Braunschweig 1911. S. 69.

1. Art des Hg ergeben hat: es dürfte demgemäß wohl eine allmählich eintretende *Abnahme* der erhaltenen Ausschläge auf den Druckeffekt zurückgeführt werden können, sicher aber nicht die Ausschläge selbst.

c) Vorfindlichkeit der Spannungsursache in der Drosselstelle.

Schließlich wurde folgende Konsequenz geprüft: da die erhaltene Thermospannung 1. Art praktisch genommen nur von dem Temperaturgefälle in der Drosselstelle abhängen soll, läßt sich schließen, daß wenigstens in erster Linie eine Überbrückung der Drosselstelle mit einer leitenden Substanz in derselben Weise wirken soll, wie eine Verminderung der benutzten Mikroflamme. Um dies zu prüfen, wurde rings um die Mitte des Drosselgefäßes, zwischen den Hitzblechen, ein schmaler U-gebogener Streifen von Asbestpapier angebracht; daran wurde ein Quecksilbertropfen aufgetan, der also eine Herabsetzung des sonst vorhandenen Temperaturgefälles verursachen mußte. Auf diese Weise wurde eine Beobachtungsreihe gewonnen („Reihe 20"). Es wurden dann Quecksilber und Asbeststreifen entfernt, und mit unveränderter Flamme eine weitere Beobachtungsreihe angestellt („Reihe 21"). An der graphischen Darstellung dieser Beobachtungen wurden, wie im vorigen, Temperaturdifferenzen $2\,\Delta t$ und Ausschläge u ermittelt. Gefunden wurde:

Tabelle 8. Hg im Asbestgefäß mit Glimmerisolation; Temperaturdifferenz durch Überbrückung variiert.

Reihe	Brenner-einstellung	$2\,\Delta t$ °C	u mm
„20"	7,9	355	2,8
„21"	7,9	435	5,0

Es übt also die Überbrückung der Drosselstelle einen erheblich herabsetzenden Einfluß auf die auftretende Thermospannung aus.

Die somit gewonnenen Beobachtungen sind in Fig. 6b, S. 197 eingetragen (numerierte Vollkreise). Wie ersichtlich, stimmen diese Beobachtungen mit den früheren recht gut überein.

Da der überbrückende Quecksilbertropfen doch auf die

Zuleitungen usw. recht wenig einwirken kann, ist mit diesem Resultat eine Konsequenz bestätigt worden der Grundauffassung, daß die Thermospannung in der Drosselstelle zustande kommt.

d) Wasserkühlung.

Um unter so einfachen und reinen Verhältnissen wie nur möglich zu arbeiten, ist im vorigen ausschließlich die natürliche Luftkühlung des nicht gehitzten Bleches verwendet worden.

Verifiziert wurde aber noch in besonderen Versuchen, daß die Galvanometerausschläge merkbar zunehmen, und schneller erfolgen, wenn das Temperaturgefälle durch Wasserkühlung des augenblicklich nicht gehitzten Bleches vergrößert wird. Dabei wurde einfach das nicht gehitzte Blech mit nasser Baumwolle in Berührung gebracht.

Zu Demonstrationszwecken ist diese Wasserkühlung zu empfehlen.

Zu Demonstrationszwecken würden sich übrigens voraussichtlich kleine, durch andauerndes Auskochen mit Hg gefällte, einseitig abgerundete Zylinder aus Bimsstein eignen können, welche Hg-gefüllte Glasröhren abschließen; es würde sich möglicherweise damit recht scharfe Drosselwirkung erzielen lassen.

Hinzugefügt sei noch, daß außer den angeführten Beobachtungsreihen zur größeren Sicherheit noch mehrere andere ausgeführt wurden; sie ergaben durchwegs Bestätigung der angeführten Resultate.

V. Überblick der gewonnenen Resultate.

Sämtlichen vorangehenden Untersuchungen ist gemeinsam, daß zur Lösung des vorliegenden experimentellen Problems, außer einem hochempfindlichen Galvanometer, ein durch ein geeignetes *Drosselgefäß* (aus Griffel, Durobaxglas, Asbest) gewonnenes, größtmögliches Temperaturgefälle, unter stationären Verhältnissen, ausgenutzt wird. Die Arbeit wird aber nach zwei verschiedenen Linien geführt. Nach der ersteren wird versucht, die Hauptschwierigkeit, die Kleinheit der Ausschläge auch bei verhältnismäßig großen Temperaturdifferenzen, dadurch zu umgehen, daß ein flüssiges Metall benutzt wird, wo die Thermokraft 1. Art erheblich höher zu erwarten ist als bei Hg. Es wurde tatsächlich (I) bei dem bei Zimmertempe-

ratur flüssigen Wismut-Bleiamalgam, das früher von Braun mit negativem Resultat untersucht wurde, kräftige Ausschläge erhalten (140 mm = 0,7 Mikrovolt). Gleichzeitig wurde aber festgestellt, daß das Amalgam keineswegs als sicher homogen zu betrachten ist; die erhaltenen Ausschläge sind demnach für Thermospannungen 1. Art nicht beweisend.

Das Weiterfolgen dieser Linie würde, um immer noch erhebliche Ausschläge zu gewinnen, dazu geführt haben, Metalle wie Kalium oder Wismut bei Temperaturen oberhalb der Schmelzpunkte zu benutzen. Abgesehen von der größeren Komplikation von Versuchen bei höherer Temperatur, was sie leicht weniger beweiskräftig macht, würde das Problem doch nie als erledigt betrachtet werden, bevor es gerade mit Quecksilber durchgeführt worden wäre.

Es wurde deshalb zu Quecksilber übergegangen. Benutzt wurde ein Apparat mit Drosselgefäß aus Griffelmasse genau derselben Konstruktion wie diejenige, die sich anscheinend bei dem Amalgam bewährt hatte (II).

Schon die ersten Versuche ergaben auch mit Quecksilber positives Resultat. Es wurden z. B. regelmäßige Ausschläge von etwa 7,4 mm = $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ Volt erhalten schon bei einer Temperaturdifferenz der Hitzbleche von nur $\Delta t = {}^1/_2 \cdot 195^0 = 97{,}5^0$. Eine über 1 Minute fortgesetzte Erhitzung ergab allerdings eine auffallende Abnahme der unmittelbar nach Verschieben der Hitzquelle (in 1 Min.) stattfindenden Ausschläge (Fig. 3), dieselbe verschwand aber so gut wie vollständig, wenn längere Zuleitungen vorgesehen wurden (Fig. 5: 8 mm bei $\Delta t = 110^0$).

Nur verhältnismäßig geringe Temperaturdifferenzen konnten bisher benutzt werden, weil das Drosselgefäß aus Griffelmasse nicht gasfrei zu erhalten war, und der Hg-Faden deshalb bei höherem Erhitzen nicht mehr zusammenhängend blieb.

Es wurde deshalb ein Glasapparat hergestellt. *Auch dieser ergab deutliche, regelmäßige Ausschläge*, wenn auch, wie erwartet, recht klein: 1,5 mm bei $\Delta t = 185^0$ (Fig. 9). Dabei hatte allerdings die Erhitzung der Zuleitungen — wie zuerst bei dem vorigen Apparat — einen erheblichen, negativen Einfluß; es wurde $a = 2{,}2$ mm bei $\Delta t = 182^0$ erhalten, wenn dieser Einfluß durch zwei hinzukommende Kühlbleche elimi-

niert wurde (Fig. 10). Dies glückliche Resultat dürfte großenteils der effektiven Form der Hitzbleche zuzuschreiben sein.

Wegen der Schwierigkeit, auch bei stärkerer Erhitzung den Zusammenhang des Metallfadens in einem gasdichten Drosselgefäß zu bewahren, wurde dann als Gefäßsubstanz Asbest benutzt, das für Hg dicht, für Gase aber durchlässig ist, und zwar mit gutem Resultate (Fig. 14).

Als Fehlerquelle konnte dabei mangelnde Isolation des Asbests gefürchtet werden. Auch wenn dieselbe durch Glimmerzwischenlage ausgeschaltet wurde, erhielt man ein wesentlich unverändertes Resultat (Fig. 15).

Bei jedem der benutzten Apparate wurde die wichtige *Zeichenkontrolle* der Ausschläge sorgfältig durchgeführt. Es ergab sich dabei in sämtlichen Fällen, daß die bei Quecksilber erhaltenen, auf Thermospannungen 1. Art zurückgeführten Ausschläge entgegengesetzt sind zu denjenigen, die bei dem positiven Kupfer entstehen. Quecksilber verhält sich also *thermoelektrisch negativ*, wie es nach einer früheren, ausführlichen Darlegung des Verfassers und nach dem Zeichen des Thomsoneffektes sein soll.

Kontrolliert wurde weiter, daß eine eventuelle Veränderung des Hg durch Berührung mit der Gefäßsubstanz zu dem erhaltenen Resultat nicht mitwirken konnte, ebensowenig wie eine vorhandene, geringfügige Druckvariation — deren Einfluß sogar in entgegengesetzter Richtung erfolgt.

Verifiziert wurden noch gewisse Konsequenzen des Umstandes, daß die wirksame Thermospannung gerade in der Drosselstelle vorhanden ist.

Da demgemäß meines Erachtens das gewonnene Resultat durch keine bis jetzt bekannte Fehlerquelle vorgetäuscht sein kann und sich insbesondere als unabhängig von der Gefäßsubstanz erwiesen hat, dürfte behauptet werden, daß nunmehr *das Vorhandensein von Thermospannungen 1. Art in einem flüssigen Metall galvanometrisch sicher nachgewiesen worden ist.*

Die bei den schließlichen Versuchen noch vorhandene, obgleich stark heruntergedrückte Abnahme der von Thermospannungen 1. Art verursachten Ausschläge, kann auf mehrere verschiedene Ursachen zurückgeführt werden, wie: 1. noch nicht vollständig ausgeschlossener Seebeckeffekt bei den Elektroden oder 2. Druckeffekt, welche beide sicher in einer zu

den Thermospannungen 1. Art entgegengesetzten Richtung verlaufen. Weiter könnte 3. eine schwache chemische Einwirkung und vielleicht — obgleich kaum wahrscheinlich — 4. eine im Drosselgefäß bei höherer Erhitzung entstehende Wirbelbewegung mitwirken; theoretisch müssen noch 5. vorhandene Durchschnittsveränderungen des Quecksilberfadens außerhalb der Drosselstelle mitwirken — jedoch nur mit einem praktisch wohl ganz zu vernachlässigenden Betrag.

Außerdem wurden einige quantitative Messungen vorgenommen der Beziehung zwischen Thermospannung 1. Art des Quecksilbers und dem Temperaturgefälle, wie dies durch die Temperaturdifferenz der Hitzbleche hervortritt.

Es wurde bei sämtlichen Versuchen (auch bei denen mit Amalgam) eine bedeutend schnellere Zunahme beobachtet als es einer Linearität entsprechen würde. Und zwar ergab sich bei den drei diesbezüglichen Beobachtungsreihen, daß die Thermospannung 1. Art u mit der Temperaturdifferenz T durch folgendes Gesetz verbunden ist:

$$u = k \cdot T^3.$$

Wenn u in Mikrovolt (10^{-6} Volt) und T in °C gerechnet wird, bekommt die Konstante k folgende numerischen Werte:

$k = 1{,}9 \cdot 10^{-9}$ für Apparat 2 aus Griffelmasse (Fig. 6a),
$k = 0{,}7 \cdot 10^{-9}$ „ „ 4 aus Asbest (Fig. 6c),
$k = 0{,}35 \cdot 10^{-9}$ „ „ 5 aus Asbest (Fig. 6b).

Je schärfer die Verjüngung bei der Drosselstelle, je niedriger die Wärmeleitfähigkeit, und je besser die Wärmeübertragung zwischen Hitzblech und Quecksilber, um so höher ist k.[1])

Die gefundene Abhängigkeit von der dritten Potenz des Temperaturgefälles dürfte besser als andere Umstände erklären, daß der Effekt verschwindend ist, sobald nicht ganz besonders schroffe Temperaturgefälle vorhanden sind.

Es bereitet demgemäß kaum eine Schwierigkeit, den negativen Erfolg der älteren Forscher einzusehen. Außer einem

1) Die Ursache, daß k bei Apparat 2 beträchtlich größer ist als bei Apparat 4 und 5, dürfte darin liegen, daß bei jenem die Zwischenwand erheblich dünner war als bei diesem. Die theoretisch günstigste Form hängt von der Wärmeleitfähigkeit der Substanzen ab. Diesbezügliche Versuche sind im Gange im hiesigen Laboratorium.

hochempfindlichen Galvanometer — wie ein solcher z. B. Magnus nicht zu Gebote stand, waren in vorliegender Arbeit besondere praktische Kunstgriffe nötig.

Betreffend die mit modernen Hilfsmitteln ausgeführte Untersuchung von H. Haga und F. Zernike (1919), dessen Resultat als negativ angegeben wurde, ist folgendes zu bemerken. Diese Forscher beobachteten tatsächlich einen Mehrausschlag von 1,5 mm $= 3{,}5 \cdot 10^{-8}$ Volt, bei einer Temperaturdifferenz von etwa $\Delta t = 300°$ C, wenn die Berührung der Strahlen nur minimal war; der übrige Ausschlag (etwa 3 mm $= 7{,}10^{-8}$ Volt) stammte vom Druckeffekt her. Diese Autoren selbst heben hervor, daß der fragliche Mehrausschlag auf innere molekulare Veränderungen des Hg (Allotropie) zurückgeführt werden könnte; wegen der hohen Stromgeschwindigkeit würden solche Veränderungen eventuell keine Zeit finden, sich auszugleichen. Verfasser kann dieser Auffassung nicht beistimmen. Gerade Hg ist eins der wenigen Metalle, wo nichts auf allotrope Umwandlungen hindeutet; ihrer Annahme ist also gänzlich unbewiesen. Andererseits ist zu beachten, daß die benutzten Strahlen so dünn waren (0,10—0,13 mm), daß die Drosselwirkung nur als eine ganz schwache zu erwarten ist, außer möglicherweise bei ganz minimaler Berührung. Nun ist 1. die *Größenordnung* des von H. Haga und F. Zernike beobachteten, auf Thermospannung 1. Art des Hg zurückführbaren Ausschlags genau dieselbe wie diejenige der von mir festgestellten Spannungen; die an die Spitze gestellten Beobachtungen von mir ergaben z. B. Spannungen $1{,}9 \cdot 10^{-8}$ bis $3{,}8 \cdot 10^{-8}$ Volt, bei geringerer Temperaturdifferenz, aber wohl günstigerem Drosselverhältnis.

Weiter hat die von diesen Forschern beobachtete Spannung gerade die von mir gefundene 2. *korrekte Richtung*. Bei meinen Versuchen war die Anordnung nach dem Vorigen eine derartige (die Temperaturdifferenzen wurden im stärker gedruckten Hg hervorgerufen), daß von Druckeffekt herrührende Ausschläge in entgegengesetzter Richtung zu den Thermospannungen 1. Art verlaufen. Bei Haga und Lernikes Versuchen entstand dagegen die Temperaturdifferenz *umgekehrt in dem unter niedrigerem Druck stehenden Hg*; der Druckeffekt muß demnach in derselben Richtung wirken als die Thermospannung 1. Art. Da nun eben nach dem Befund dieser

Forscher beide Ausschläge in derselben Richtung verlaufen, ist auch die Richtung des Mehrausschlages diejenige, die bei ihrer Anordnung der Thermospannung 1. Art zukommen muß.

Aus diesen Gründen glaube ich annehmen zu dürfen, daß schon in dem fraglichen Versuche die langgesuchte Thermospannung 1. Art richtig hervortritt.

Im Lichte des nunmehr Bekannten erscheint es ebenfalls nicht ausgeschlossen, daß nicht die vom Verfasser früher in einem neu hergestellten Drosselapparat aus Glaskapillaren beobachtete Spannung von 2 mm $= 10 \cdot 10^{-8}$ Volt (1 mm dabei $= 5 \cdot 10^{-8}$ Volt) der Wirklichkeit entsprechen könnte; die Erhitzung war dabei eine recht hohe.

Es ist demnach wohl in unzweideutiger Weise das Resultat gewonnen:

> Auch im flüssigen Metall existieren, entgegen Magnus' Satz, Thermospannungen 1. Art, welche bei geeigneten, aber recht verschiedenartigen Versuchsanordnungen an einem empfindlichen Galvanometer meßbar sind; ihre Größe scheint mit der 3. Potenz des Temperaturgefälles anzusteigen.[1])

Zusammenfassung.

1. Es ist festgestellt worden, daß in flüssigem Quecksilber bei starker Asymmetrie des Temperaturgefälles Thermospannungen 1. Art vorhanden und am Galvanometer meßbar sind — entgegen der bisherigen Meinung („Magnus' Satz").

Es werden dazu nötige Apparate („Drosselgefäße") eingehend beschrieben.

2. Die Thermospannungen 1. Art des Quecksilbers sind vom Temperaturgefälle außerordentlich stark abhängig. Bei drei verschiedenen Drosselapparaten wurde zwischen Thermospannung 1. Art u und Temperaturdifferenz der Hitzbleche T folgende Beziehung gewonnen: $u = k\,T^3$, wo k eine Apparatenkonstante darstellt.

Stockholm, Physik. Institut d. Universität, Aug. 1919.

1) Es ist mir ein Vergnügen bemerken zu können, daß H. Borelius a. a. O. (S. 401) richtig eingesehen hat, daß „ein eventueller Asymmetrieeffekt", d. h. die Thermospannung 1. Art eines geschlossenen homogenen Leiters, in erster Annäherung mit der dritten Potenz des Temperaturgefälles ansteigen muß.

(Eingegangen 23. September 1919.)

2. *Zur Gittertheorie der Zinkblende;* *von Max Born und Elisabeth Bormann.*

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung[1]) soll einen Beitrag zu der Frage liefern, ob sich die Kohäsionskräfte der Kristalle heteropolarer Verbindungen als elektrische Anziehungen deuten lassen. Untersucht und bis zu einem gewissen Grade positiv beantwortet ist diese Frage in der Hauptsache nur bei den Alkali-Halogensalzen vom Typus des Steinsalzes NaCl, die das einfachste Ionengitter haben; und zwar sind nicht nur die wichtigsten physikalischen Eigenschaften dieser Kristalle theoretisch berechnet und an der Erfahrung geprüft worden[2]), sondern auch die chemischen Wärmetönungen bei Reaktionen zwischen solchen Salzen.[3]) Die Auswahl von Substanzen, die sich für solche Untersuchungen eignen, ist leider gering[4]); denn bei der Kompliziertheit der Rechnungen kommen nur einfache Strukturen in Betracht, deren die röntgenometrische Forschung bisher nur wenige sichergestellt hat. Unter diesen ist die Zinkblende ZnS aus mehreren Gründen ausgezeichnet (Fig. 1):

1. Die Substanz ist ebenso, wie die früher untersuchten binären Halogensalze vom Typus NaCl, zweiatomig und

1) Eine vorläufige Mitteilung ist unter demselben Titel in den Verh. d. D. Phys. Ges. **21.** S. 733 1919 erschienen.

2) M. Born u. A. Landé, Verh. d. D. Phys. Ges. **20.** S. 210. 1918; M. Born, ebenda, **21.** S. 533. 1919; Ann. d. Phys. **61.** S. 87. 1920.

3) M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. **21.** S. 13, 679. 1919; K. Fajans, ebenda **21.** S. 539, 714. 1919.

4) In den hier zitierten Arbeiten werden auch Calciumsalze in den Kreis der Betrachtung gezogen; diese Rechnungen stützen sich auf das Selbstpotential des Flußspatgitters, das A. Landé nach der Methode von Madelung berechnet hat (Verh. d. D. Phys. Ges. **20.** S. 217. 1918). Leider ist die von Landé angegebene Zahl wegen eines Rechenfehlers falsch; daher sind alle darauf gebauten Schlüsse unbegründet. Eine neue Berechnung des Flußspatgitters wird demnächst mitgeteilt werden.

regulär kristallinisch, aber ihr Gitter ist von dem des NaCl verschieden[1]); daher lauten die Formeln für die physikalischen Konstanten ganz anders als dort.

2. Nach dem elektrolytischen Verhalten sind die Ionen Zn und S zweiwertig; diese Tatsache muß auf Grund der elektrischen Kohäsionstheorie auch aus den Werten der Kristallkonstanten erschlossen werden können.

3. Der Kristall besitzt eine polare Achse und ist piezoelektrisch; er ist daher besonders geeignet, um darüber Auskunft zu geben, ob bei einer Deformation die Atome wesentlich wie punktförmige Kraftzentra fungieren; oder ob sie selbst Drehungen und Deformationen erfahren.

4. Sämtliche, aus dem elementaren Potentialansatze berechenbaren Konstanten, nämlich die der Elastizität, der Piezoelektrizität und die langwellige, ultrarote Eigenfrequenz (Reststrahl) sind durch gute Messungen bekannt.

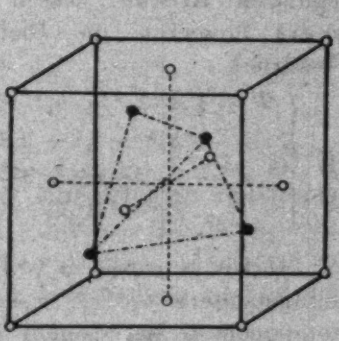


Fig. 1.

5. Wenn die elektrostatische Deutung des Abstoßungsexponenten n richtig ist[2]), so muß man bei Zinkblende nicht $n = 9$, wie bei den Salzen vom Typus NaCl, sondern einen kleineren Wert erwarten; denn während beim NaCl-Gitter die Symmetrie auf kubische Atome deutet, wird beim ZnS-Gitter jedes Atom von seinen Nachbarn in der Weise umgeben, wie das Zentrum eines regulären Tetraeders von den Ecken. Die Atome besitzen daher gewiß niedrigere Symmetrie, folglich wird auch der Abstoßungsexponent kleiner sein. Die Feststellung seines Wertes führt also zu einer Einsicht in die Symmetrieverhältnisse der Atome.

---

1) Das Gitter entsteht aus dem bekannten des Diamanten dadurch, daß man die C-Atome abwechselnd durch Zn- und S-Atome ersetzt. Vgl. etwa A. Johnsen, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 14. S. 52. 1917.

2) Vgl. M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. 20. S. 230. 1918.

Aus diesen Gründen schien uns die Theorie der Zinkblende von Interesse und die darauf zu wendende Rechenarbeit gerechtfertigt. Auch darf man hoffen, in ähnlicher Weise wie bei den Alkali-Halogensalzen thermochemische Daten aus der Gittertheorie zu gewinnen.

Allerdings hätte es keinen Sinn, die mühsamen Berechnungen der Gitterpotentiale zu beginnen, bevor nicht die der Theorie zugrunde liegende Annahme punktförmiger Kraftzentra auf Grund allgemeiner Sätze der Gittertheorie an dem Beobachtungsmaterial geprüft worden ist. Wir schicken die Diskussion dieser Frage im § 1 der eigentlichen elektrostatischen Gittertheorie voraus.

§ 1. Allgemeine Prüfung der Annahme punktförmiger Kraftzentra.

Nach der Gittertheorie[1]) hat für einen zweiatomigen, regulären Kristall, dessen Atome als punktförmige Kraftzentra fungieren, die Dichte der potentiellen Energie den Ausdruck:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \tfrac{1}{2} A\,(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + \tfrac{1}{2} B\{2\,(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) \\ & + y_z^2 + z_x^2 + x_y^2\} + C\{(u_1 - u_2)\, y_z + (v_1 - v_2)\, z_x \\ & + (w_1 - w_2)\, x_y\} + \tfrac{1}{2} D\{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \\ & + (w_1 - w_2)^2\}. \end{aligned}\right.$$

Dabei bedeuten x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y die Verzerrungskomponenten, u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die Verrückungskomponenten der beiden einfachen, von je einer Atomart gebildeten Gitter und A, B, C, D Konstante, die von den Atomkräften abhängen. Die Berechnung dieser Konstanten auf Grund der über die Atomkräfte gemachten Hypothesen wird später unsere Aufgabe sein; hier wollen wir zunächst nur angeben, wie sie mit den beobachtbaren Größen zusammenhängen.

Wir bezeichnen mit e die Ladung des Elektrons und mit z die Anzahl der Ladungen e eines Ions. Nach dem elektro-

1) Vgl. M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Leipzig, B. G. Teubner, 1915. Wir zitieren dieses Buch im folgenden D.K. — M. Born, Phys. Ztschr. 19. S. 539. 1918. Die in dieser Abhandlung gebrauchte Bezeichnung behalten wir bei, obwohl die Konstanten A, B, C, D ihrer Entstehung nach in der umgekehrten Reihenfolge zu schreiben wären.

lytischen Verhalten der Zinkblende ist $z = 2$ anzunehmen. Die Massen der Ionen seien m_1, m_2. Ein elementares Parallelepiped, das ein Ion von jeder Art, also eine chemische Molekel, enthält, habe das Volumen Δ. Ein regulärer Kristall hat drei Elastizitätskonstanten, c_{11}, c_{12}, c_{44}, eine piezoelektrische Konstante e_{14} und eine ultrarote, langwellige Eigenfrequenz (Reststrahl) ω; ferner sei ε die Dielektrizitätskonstante und ε_0 ihr Wert, soweit er von den Elektronenschwingungen, aber nicht den (ultraroten) Ionenschwingungen beeinflußt wird.

Dann drücken sich diese Größen folgendermaßen durch die vier Konstanten A, B, C, D aus[1]):

$$(2)\quad \begin{cases} c_{11} = A, \quad c_{12} = B, \quad c_{44} = B - \dfrac{C^2}{D}, \\ e_{14} = -\dfrac{x e C}{\Delta D}, \\ \varepsilon - \varepsilon_0 = \dfrac{4\pi x^2 e^2}{\Delta^2 \left(D - \dfrac{C^2}{B}\right)}, \\ \omega^2 = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right) \Delta D. \end{cases}$$

Zwischen den sechs Größen c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14}, $\varepsilon - \varepsilon_0$, ω^2 bestehen also zwei von A, B, C, D unabhängige Relationen, allein als Folge des Ansatzes (1) für einen regulären, zweiatomigen Kristall mit punktförmigen Atomen. Die eine von diesen Relationen ist auch von der Ionenladung $z e$ und dem Volumen Δ unabhängig und lautet:

$$(3)\quad \frac{4\pi e_{14}^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} = (c_{12} - c_{44}) \frac{c_{44}}{c_{12}},$$

die andere läßt sich in folgenden Formen schreiben:

$$(4)\quad \begin{cases} \omega^2 = \dfrac{4\pi x^2 e^2}{\Delta} \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right) \cdot \dfrac{c_{12}}{c_{44}} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0}, \\ \omega^2 = \dfrac{x^2 e^2}{\Delta} \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right) \cdot \dfrac{c_{12} - c_{44}}{e_{14}^2}. \end{cases}$$

1) Die in der zitierten Arbeit (Phys. Ztschr. 19. S. 539. 1918) angegebenen Formeln (18), (20), (21), (22) unterscheiden sich von diesen dadurch, daß dort die Ionenladung mit e, hier mit $z e$ bezeichnet ist. Ferner sind dort im Ausdruck für $\varepsilon - \varepsilon_0$ rationelle, hier elektrostatische Einheiten benutzt; leider ist die zweite Formel (25) der zitierten Arbeit um den Faktor $\sqrt{4\pi}$ falsch, der richtige Ausdruck ist der hier angegebene (5).

Führt man hier die Atomgewichte $\mu_1 = N m_1$, $\mu_2 = N m_2$, die Dichte $\varrho = \frac{m_1 + m_2}{\Delta}$, die Faradaysche Konstante $F = Ne$ und die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ein, so erhält man folgende Darstellungen der Elektrovalenz z durch meßbare Größen:

$$(5)\quad \begin{cases} z = \frac{c\sqrt{\pi}}{\lambda F}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\varrho}\cdot\frac{c_{44}}{c_{12}}(\varepsilon - \varepsilon_0)} \\ z = \frac{2\pi c\,|e_{14}|}{\lambda F}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\varrho}\cdot\frac{1}{c_{12}-c_{44}}}\,. \end{cases}$$

Wir werden hier nur die zweite Formel benützen; denn die darin vorkommenden Größen sind sämtlich durch genaue Messungen gut bekannt, während der Wert von $\varepsilon - \varepsilon_0$ unsicher ist.[1])

Wir setzen die numerischen Werte ein. Es ist in C.G.S.-Einheiten:

$$c = 3 \cdot 10^{10}, \quad F = 2{,}90 \cdot 10^{14}.$$

Die Atomgewichte sind:

$$\text{für Zn}\quad \mu_1 = 65{,}4, \qquad \text{für S}\quad \mu_2 = 32{,}1.$$

Nach Landolt-Börnstein ist die Dichte:

$$\varrho = 4{,}00.$$

Die Elastizitätskonstanten sind von W. Voigt[2]) nach einer neuen, sinnreichen Methode gemessen worden. Seine Ergebnisse, in C.G.S.-Einheiten umgerechnet, lauten:

$$c_{11} = 9{,}43 \cdot 10^{11}, \quad c_{12} = 5{,}68 \cdot 10^{11}, \quad c_{44} = 4{,}34 \cdot 10^{11}.$$

Die piezoelektrische Konstante e_{14} läßt sich aus dem direkt beobachtbaren piezoelektrischen Modul d_{14} und der Elastizitätskonstante c_{44} berechnen nach der Formel:

$$e_{14} = c_{44}\, d_{14}.$$

---

1) Die erste Formel, in der $\varepsilon - \varepsilon_0$ vorkommt, ist zuerst von Dehlinger (Phys. Ztschr. **15**. S. 276. 1914), später unter allgemeineren Voraussetzungen von M. Born (Phys. Ztschr. **19**. S. 539. 1919) abgeleitet und geprüft worden. Sie trifft für einfache Salze wie NaCl, KCl, KBr, KJ einigermaßen zu, versagt aber bei Tl- und Ag-Salzen. Gründe hierfür sind von M. Born (in der soeben zitierten Arbeit und in den Ann. d. Phys. **61**. S. 87. 1920) erörtert worden.

2) W. Voigt, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. in Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918.

d_{14} ist einmal von van der Veen[1]) gemessen worden; außerdem wurde uns durch Vermittlung von Hrn. P. P. Ewald eine noch unveröffentlichte Messung des Hrn. du Prel[2]) zugänglich gemacht. van der Veen hat d_{14} für Zinkblende relativ zu der piezoelektrischen Konstante d_{11} von Quarz gemessen, die er selbst in absolutem Maße zu $6{,}90 \cdot 10^{-8}$ bestimmt hat; dagegen hat Röntgen[3]) diese Konstante des Quarz zu $6{,}94 \cdot 10^{-8}$ angegeben. Da der Röntgensche Wert mit großer Wahrscheinlichkeit besser ist, haben wir die van der Veensche Messung damit umgerechnet und

$$d_{14} = -5{,}24 \cdot 10^{-8}$$

gefunden; dann wird

$$e_{14} = -2{,}28 \cdot 10^{4}.$$

Der du Prelsche Wert stimmt damit genau überein.

Die Wellenlänge der Reststrahlen von Zinkblende hat Hr. Rubens gemessen und uns brieflich mitgeteilt[4]); sie beträgt:

$$\lambda = 30{,}9\,\mu = 3{,}09 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}.$$

Setzt man diese Werte in die zweite Formel (5) ein, so findet man:

$$z = 0{,}300$$

statt des zu erwartenden Wertes $z = 2$.

Dieser Widerspruch scheint jeden Versuch einer eingehenden Theorie von vornherein überflüssig zu machen. Doch haben wir uns von folgenden Erwägungen dazu bestimmen lassen, die recht mühsamen Rechnungen trotzdem durchzuführen.

Erstens nämlich ergibt sich die Elektrovalenz z zwar etwa siebenmal zu klein, aber sie fällt doch in die richtige

---

1) A. L. W. E. van der Veen, Physisch- en kristallografisch Onderzoek naar de Symmetrie van Diamant. Diss. Leiden 1911.

2) Die Arbeit ist in dem unter Röntgens Leitung stehenden Physikalischen Institute der Universität München ausgeführt worden. Wir schulden den genannten Herren für die Mitteilung großen Dank.

3) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 41. S. 449. 1913.

4) Wir sind Hrn. Rubens für die Überlassung dieses noch nicht publizierten Wertes zu großem Danke verpflichtet.

Größenordnung, und das lehrt, daß der Grundgedanke der Theorie nicht gänzlich falsch sein wird.

Sodann ist der Wert von z wesentlich bestimmt durch die Größe $c_{12} - c_{44}$, die als Differenz ähnlicher Größen nicht sehr sicher ist; vielleicht wird die Diskrepanz hierdurch zufällig vergrößert.

Endlich und vor allem aber gehen in die Bestimmung von z nur die drei Größen λ, e_{14}, $c_{12} - c_{44}$ ein, nicht aber c_{11} und c_{12}; es ist nun von vornherein klar, daß gerade diese drei Größen λ, e_{14}, $c_{12} - c_{44}$ von Drehungen und Deformationen der Atome viel stärker beeinflußt werden als c_{11} und c_{12}. Daher kann man erwarten, daß die Durchführung der Theorie zwar c_{11} und c_{12} einigermaßen richtig zu berechnen erlaubt, dagegen λ, e_{14}, $c_{12} - c_{44}$ nicht, und man kann hoffen, Hinweise zu finden, wo die Ursache des Fehlschlagens steckt.

§ 2. Formeln für die Kristallkonstanten.

Die vier Konstanten A, B, C, D, welche die beobachtbaren Eigenschaften des Kristalls nach (2) bestimmen, lassen sich bei bekannter Gitterstruktur aus den zwischen den Atomen wirkenden Kräften berechnen. Wir setzen voraus, daß diese reine Zentralkräfte seien und nennen $\varphi_{kk'}(r)$ die potentielle Energie der Kräfte, die zwei im Abstande r voneinander befindliche Partikel der Arten k und k' ($k, k' = 1, 2$) aufeinander ausüben. Man bilde nun:

$$(6)\quad \begin{cases} P^{(l)}_{kk'} = \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi^{(l)}_{kk'}}{dr}\right]_{r^{(l)}_{kk'}}, \\ Q^{(l)}_{kk'} = \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi^{(l)}_{kk'}}{dr}\right)\right]_{r^{(l)}_{kk'}}, \end{cases}$$

wobei der Index $r^{(l)}_{kk'}$ bedeutet, daß nach Ausführung der in der Klammer vorgeschriebenen Operationen für r der Gleichgewichtsabstand $r^{(l)}_{kk'}$ der Partikel $(k\, l_1\, l_2\, l_3)$ und $(k'\, 0\, 0\, 0)$ einzusetzen ist.[1]) Sind $x^{(l)}_{kk'}$, $y^{(l)}_{kk'}$, $z^{(l)}_{kk'}$ die Projektionen dieses

1) In der Bezeichnung weichen wir hier ein wenig von der in D.K. gebrauchten ab, indem wir die drei Indizes l_1, l_2, l_3, die die Punkte eines einfachen Gitters unterscheiden, durch den einen, oben angesetzten Index l andeuten. Die Formeln (6) entsprechen D.K. (14), S. 21. Die Größe A heißt in D.K. a_{11} (wegen der regulären

Abstandes auf die Koordinatenachsen, dann wird für den regulären, zweiatomigen Kristall:

$$(7)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2\Delta} \sum_i \left(Q_{11}^{(i)} x_{11}^{(i)4} + Q_{22}^{(i)} x_{22}^{(i)4} + 2 Q_{12}^{(i)} x_{12}^{(i)4} \right), \\ B = \frac{1}{2\Delta} \sum_i \left(Q_{11}^{(i)} x_{11}^{(i)2} y_{11}^{(i)2} + Q_{22}^{(i)} x_{22}^{(i)2} y_{22}^{(i)2} + 2 Q_{12}^{(i)} x_{12}^{(i)2} y_{12}^{(i)2} \right), \\ C = \frac{1}{\Delta} \sum_i Q_{12}^{(i)} x_{12}^{(i)} y_{12}^{(i)} z_{12}^{(i)}, \\ D = \frac{1}{\Delta} \sum_i \left(P_{12}^{(i)} + Q_{12}^{(i)} x_{12}^{(i)2} \right). \end{cases}$$

Anstatt die Konstante B direkt zu berechnen, ist es bequemer, sie aus A und der Kompressibilität $\varkappa$ abzuleiten, wobei $\varkappa$ sich aus der Gitterenergie bestimmt. Die Energie des Gitters pro Zelle Δ ist:

$$(8)\quad \Phi(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_i \left(\varphi_{11}^{(i)} + \varphi_{22}^{(i)} + 2\varphi_{12}^{(i)} \right),$$

eine Funktion von Δ allein; dann ist:

$$(9)\quad \frac{1}{\varkappa} = \Delta \frac{d^2\Phi}{d\Delta^2} = \frac{A + 2B}{3}.$$

Bei der Zinkblende bilden nun sowohl die Zn-, als auch die S-Ionen je ein flächenzentriertes kubisches Gitter mit der Würfelkante δ; diese beiden Gitter sind um $^1/_4$ der Würfeldiagonale gegeneinander verschoben. Der Würfel enthält vier Ionen von jeder Art, also vier chemische Molekeln ZnS; daher ist:

$$(10)\quad \delta^3 = 4\Delta.$$

Wir setzen nun, wie bei den Alkalihalogeniden[1]), voraus, daß die Kräfte zwischen den Ionen aus 1. den Coulombschen Anziehungen ihrer Ladungen, 2. gewissen, einer höheren Potenz der Entfernung umgekehrt proportionalen Wirkungen bestehen, und machen demgemäß den Ansatz:

$$(11)\quad \varphi_{kk'} = \pm (2e)^2 r^{-1} + b_{kk'} r^{-n} \quad (k, k' = 1, 2);$$

Symmetrie ist $a_{11} = b_{22} = c_{33}$), definiert durch (42), S. 28; B ist identisch mit a_{22} $(= a_{33} = b_{11} = b_{33} = c_{11} = c_{22} = e_{23} = f_{31} = g_{12})$; C ist $e_1^{(k)}$ $(= f_2^{(k)} = g_3^{(k)})$ D.K. (36), endlich ist D $a_0^{(12)}$ $(= b_0^{(12)} = c_0^{(12)})$, D.K. (33).

1) M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 533. 1919.

dabei ist die Elektrovalenz $z = 2$ angenommen und es gilt das positive oder negative Vorzeichen im ersten Gliede, je nachdem $k = k'$ oder $k \neq k'$ ist. Wir müssen ferner voraussetzen, daß:

$$b_{12} = b_{21} > 0$$

ist, während die Vorzeichen von b_{11} und b_{22} offen bleiben.

Man kann nun die relativen Koordinaten eines Gitterpunktes $(k\, l_1\, l_2\, l_3)$ gegen eine Partikel der Basiszelle $(k'\, 0\, 0\, 0)$ so darstellen:

$$(12)\quad \begin{cases} x_{11}^{(l)} = x_{22}^{(l)} = \frac{\delta}{2} l_1 \\ y_{11}^{(l)} = y_{22}^{(l)} = \frac{\delta}{2} l_2 \\ z_{11}^{(l)} = z_{22}^{(l)} = \frac{\delta}{2} l_3 \end{cases} \Big\} \; l_1 + l_2 + l_3 \equiv 0 \text{ mod. } 2, \\ \begin{cases} x_{12}^{(l)} = \frac{\delta}{4} l_1 \\ y_{12}^{(l)} = \frac{\delta}{4} l_2 \\ z_{12}^{(l)} = \frac{\delta}{4} l_3 \end{cases} \Big\} \; \begin{array}{l} l_1,\ l_2,\ l_3 \equiv 1 \text{ mod. } 2, \\ l_1 + l_2 + l_3 \equiv 3 \text{ mod. } 4. \end{array}$$

Daher ergibt sich nach (8):

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi = -\frac{a}{4}\delta^{-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} (b_{11} S_2(n) + b_{22} S_2(n) + 2 b_{12} S_1(n)) \\ \quad = -\frac{\alpha e^2}{4}\delta^{-1} + b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} (S_1(n) + \beta S_2(n)), \end{cases}$$

wenn:

$$(14)\qquad b_{12} = b, \quad \frac{b_{11} + b_{22}}{2 b_{12}} = \beta$$

gesetzt ist. Dabei ist, in Übereinstimmung mit früherem Gebrauche, mit $a = \alpha e^2$ die negative elektrostatische potentielle Energie des Gitters mit der Würfelkante $\delta = 1$ pro Würfel bezeichnet, und es ist gesetzt:

$$(15)\quad \begin{cases} S_1(n) = 2^n \sum_{\substack{l_1,\ l_2,\ l_3 \equiv 1 \text{ mod. } 2 \\ l_1 + l_2 + l_3 \equiv 3 \text{ mod. } 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}, \\ S_2(n) = \sum_{l_1 + l_2 + l_3 \equiv 0 \text{ mod. } 2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

Wir eliminieren nun in bekannter Weise die Größe b mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{d\Phi}{d\delta} = 0,$$

woraus folgt:

$$b = \frac{\alpha e^2}{8n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{S_1(n) + \beta S_2(n)}. \tag{16}$$

Dann ergibt sich aus (9), (13) der bekannte Ausdruck:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\alpha(n-1)e^2}{9\delta^4}. \tag{17}$$

Jetzt berechnen wir die Konstanten A, C, D nach (7); dabei trennen wir immer den elektrostatischen Anteil ab und schreiben ihn so, daß der numerische Faktor sich auf ein Gitter mit der Ladung 2 und der Würfelkante 1 bezieht. Dann wird:

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^2}{\delta^4}\alpha_1 + \frac{1}{2A}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} n(n+2)\{(b_{11}+b_{22})C_2(n+4) \\ &\qquad + 2b_{12}C_1(n+4)\} \\ &= \frac{e^2}{\delta^4}\alpha_1 + \frac{4}{\delta^2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} n(n+2)b\{C_1(n+4) + \beta C_2(n+4)\}, \end{aligned} \tag{18}$$

wo:

$$\begin{aligned} C_1(n) &= 2^{n-4} \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4, \\ C_2(n) &= \sum_{l_1+l_2+l_3 \equiv 0 \bmod 2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4 \end{aligned} \tag{19}$$

gesetzt ist. Führt man hier den Wert (16) von b ein, so erhält man:

$$A = \frac{e^2}{\delta^4} f_1(n, \beta), \tag{20}$$

$$f_1(n, \beta) = \alpha(n+2)\frac{C_1(n+4) + \beta C_2(n+4)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} + \alpha_1. \tag{21}$$

In derselben Weise folgt aus (7):

$$A \cdot C = -\frac{e^2}{\delta^3}\alpha_2 + n(n+2)b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-1} S_2(n+4), \tag{22}$$

wo

$$S_2(n) = 2^{n-3} \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)\, l_1 l_2 l_3 \tag{23}$$

gesetzt ist. Nach (16) erhält man:

$$\Delta \cdot C = \frac{e^2}{\delta^3} f_2(n, \beta), \tag{24}$$

$$f_2(n, \beta) = \alpha \frac{n+2}{2} \cdot \frac{S_3(n+4)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - \alpha_2 . \tag{25}$$

Bei der Berechnung von D ist zu beachten, daß dabei die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Kräfte berücksichtigt werden muß; man findet für den elektrischen Anteil von $D\Delta$ (vgl. Anhang 2, Formel (k)):

$$-\frac{4\pi}{3}\frac{(2e)^2}{\Delta} = -\frac{64}{3}\pi \cdot \frac{e^2}{\delta^3} .$$

Daher wird nach (7):

$$\Delta \cdot D = -\frac{64}{3}\pi \cdot \frac{e^2}{\delta^3} - n\,b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-2} \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}}$$

$$+ n(n+2)\,b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-4}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}} l_1^2 .$$

Nun ist hier offenbar die zweite Summe gleich dem dritten Teil der ersten und diese nach (15) gleich $S_1(n+2)$; daher wird:

$$\Delta \cdot D = -\frac{64}{3}\pi \cdot \frac{e^2}{\delta^3} + \frac{n(n-1)}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-2} b\, S_1(n+2),$$

und nach (16):

$$\Delta \cdot D = \frac{e^2}{\delta^3} f(n, \beta), \tag{26}$$

$$f(n, \beta) = \frac{1}{3}\left(\alpha \frac{(n-1)\,S_1(n+2)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - 64\pi\right). \tag{27}$$

Wir bilden nun nach (2) folgende Kombinationen der gemessenen Konstanten:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{c_{11} + 2c_{12}}{3} = \frac{e^2}{\delta^4} \cdot \frac{\alpha(n-1)}{9}, \\
c_{11} &= \frac{e^2}{\delta^4} \cdot f_1(n, \beta), \\
c_{12} - c_{44} &= \frac{e^2}{\delta^4} \cdot \frac{4 f_2^2(n, \beta)}{f(n, \beta)}, \\
c_{14} &= -\frac{e}{\delta^3} \frac{8 f_2(n, \beta)}{f(n, \beta)}, \\
\lambda &= \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi c}{F}\sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varrho\, f(n, \beta)}} .
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Damit sind diese auf die zwei Parameter n und β zurückgeführt.

§ 3. Numerische Diskussion der Formeln.

Die Gitterkonstante δ kommt nur in der Verbindung:

$$\frac{e}{\delta^2} = e\left(\frac{4(\mu_1+\mu_2)}{N\varrho}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sqrt{e}F\varrho}{4(\mu_1+\mu_2)}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{29}$$

vor, die mit den in § 1 benutzten Werten und $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ den Zahlenwert:

$$\frac{e}{\delta^2} = 1{,}615 \cdot 10^5 \tag{29'}$$

hat.

Wir bestimmen nun zunächst den Exponenten n aus der Kompressibilität:

$$n = 1 + \frac{9\delta^4}{\alpha \varkappa e^2}. \tag{30}$$

Die elektrostatische Konstante α hat den Wert (vgl. Anhang 2a, Formel (g)):

$$\alpha = 61{,}2. \tag{31}$$

Ferner wird mit den in § 1 angegebenen Zahlen für c_{11} und c_{12}:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{c_{11}+2c_{12}}{3} = 6{,}93 \cdot 10^{11}.$$

Damit ergibt sich:

$$n = 1 + \frac{9 \cdot 6{,}93 \cdot 10^{11}}{61{,}2 \cdot 2{,}61 \cdot 10^{15}} = 4{,}92, \tag{30'}$$

sehr nahe dem ganzzahligen Werte $n = 5$.

Demnach besteht ein wesentlicher Unterschied in dem Abstoßungsgesetz der Atome bei den Alkalihalogeniden und bei Zinkblende; bei ersteren ist $n = 9$, bei der letzteren $n = 5$. Dieses Ergebnis bietet der Deutung einige Schwierigkeit. Faßt man nämlich die abstoßende Kraft als elektrostatische Wirkung der den Kern umgebenden Elektronen auf, so läßt sich der Exponent $n = 9$ deuten, indem man die beiden wirkenden Atome (Ionen) als nahezu gleich große Elektronenwürfel annimmt. Das entspricht der kubischen Natur des

Gitters der Alkalihalogenide. Bei sehr verschieden großen Elektronenwürfeln würde allerdings in der potentiellen Energie der Abstoßung neben dem Term mit $n = 9$ ein Term mit $n = 5$ auftreten. Bei Zinkblende weist die Struktur des Gitters auf tetraedrische Atome hin, weil jedes Atom von seinen vier Nachbarn der anderen Art umgeben wird wie das Zentrum eines regulären Tetraeders von den vier Ecken. Aber zwei nahezu gleiche Elektronentetraeder geben als Hauptglied der Abstoßung $n = 7$, und, wenn sie verschieden groß sind, daneben einen Term mit $n = 4$. Der Exponent $n = 5$ tritt im Hauptgliede der Abstoßung bei rotationssymmetrischen Elektronenanordnungen (Elektronenringen nach Bohr) auf; aber solche Ringsysteme erscheinen aus manchen Gründen unwahrscheinlich. Die Frage nach der Deutung des Abstoßungsexponenten muß vorläufig wohl noch offen bleiben.

Im folgenden wollen wir mit dem Werte

$$n = 5$$

rechnen. Wir haben ihn in die drei Funktionen f, f_1, f_2 einzusetzen; die dazu nötigen Rechnungen finden sich im Anhang 1; sie ergeben (Formeln (a) bis (f)):

$$(32)\quad \begin{cases} S_1(5) = 9{,}97\,, & S_2(5) = 2{,}994\,, & C_1(9) = 1{,}283\,, \\ S_1(7) = 11{,}39\,, & S_2(9) = 1{,}787\,, & C_2(9) = 0{,}546\,. \end{cases}$$

Im Anhang 2 finden sich auch die elektrostatischen Konstanten a_1, a_2 berechnet und zwar mit dem Ergebnis (Formeln (h), (i)):

$$(33)\qquad a_1 = 3{,}885\,, \quad a_2 = 70{,}0\,.$$

Setzt man das in (21), (25), (27) ein, so kommt:

$$(34)\quad \begin{cases} f_1(\beta) = \dfrac{-22{,}9}{1 + 0{,}3003\,\beta} + 81{,}9\,, \\ f_2(\beta) = \dfrac{38{,}3}{1 + 0{,}3003\,\beta} - 70{,}0\,, \\ f(\beta) = \dfrac{93{,}1}{1 + 0{,}3003\,\beta} - 67{,}0\,. \end{cases}$$

Wir schreiben nun die noch nicht benutzten der Formeln (28) mit numerischen Faktoren an, wobei wir die Wellenlänge in $\mu = 10^{-4}$ cm ausdrücken:

$$(35)\quad \begin{cases} c_{11} = 2{,}61 \cdot 10^{10} f_1(\beta), \\ c_{12} - c_{44} = 10{,}44 \cdot 10^{10} \dfrac{f_2^2(\beta)}{f(\beta)}, \\ c_{14} = -\,12{,}92 \cdot 10^{5} \dfrac{f_2(\beta)}{f(\beta)}, \\ \lambda = \dfrac{298}{\sqrt{f(\beta)}}. \end{cases}$$

Während der Wert von β bei den Alkalihalogeniden ziemlich gleichgültig ist, spielt er hier eine wesentliche Rolle, was mit dem kleineren Werte des Exponenten n zusammenhängt.

Zur ersten Übersicht geben wir eine Tabelle der Funktionen f_1, f_2, f von β, nebst den zugehörigen Werten von c_{11} und λ nach (35). Die gemessenen Werte sind (vgl. § 1):

$$c_{11} \cdot 10^{-11} = 9{,}48\,, \quad \lambda = 30{,}9;$$

sie deuten darauf hin, daß β in der Gegend von $-1{,}5$ liegen wird. Dieses höchst merkwürdige Resultat eines negativen β

Tabelle 1.

β	f_1	f_2	f	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	λ
$-2{,}0$	24,60	25,98	166,0	6,42	23,1
$-1{,}5$	40,25	$-0{,}24$	102,3	10,50	29,5
$-1{,}0$	49,18	$-15{,}21$	65,99	12,84	36,7
$-0{,}5$	54,97	$-24{,}89$	42,50	14,85	45,7
0,0	59,00	$-31{,}66$	26,05	15,40	58,4
0,5	61,99	$-36{,}66$	13,92	16,18	79,8
1,0	64,28	$-40{,}51$	4,57	16,78	139,0
1,5	66,11	$-43{,}58$	$-2{,}88$	17,25	—
2,0	67,59	$-46{,}05$	$-8{,}82$	17,63	—

wird nun aber weiter gestützt durch den Umstand, daß dicht bei dem Werte $\beta = -1{,}5$ die Funktion f_2 durch Null geht und für größere β-Werte negativ wird; negative Werte von f_2 sind aber unmöglich, weil sonst e_{14} positiv würde im Widerspruch zu den Beobachtungen. Wir verfeinern nun unsere Tabelle im Intervalle von $\beta = -2{,}0$ bis $\beta = -1{,}45$ und ergänzen sie durch Hinzufügen der nach (35) berechneten Werte von $c_{12} - c_{44}$ und e_{14}.

Als letzte Spalte ist das Produkt $\varkappa c_{11}$ eingetragen, das nach (28) und (31) den Ausdruck:

$$\varkappa c_{11} = \frac{9 f_1(n, \beta)}{\alpha (n-1)} = 0{,}0369 \cdot f_1(\beta)$$

hat und von der Ionenladung und der Gitterkonstanten vollkommen unabhängig ist; aus den Messungen erhält man dafür den Betrag:

$$\varkappa c_{11} = 1{,}360 .$$

Dieser führt auf einen Wert von β zwischen $-1{,}60$ und $-1{,}65$. Dafür stimmt dann c_{11} gut, während λ ein wenig zu klein ist. Vergleicht man nun auch $c_{12} - c_{44}$ und e_{14} für dieses β mit den beobachteten Werten

$$(c_{12} - c_{44}) \cdot 10^{-11} = 1{,}34 , \qquad -e_{14} \cdot 10^{-4} = 2{,}28 ,$$

so sieht man, daß $c_{12} - c_{44}$ zu klein, e_{14} zu groß wird. Eine etwas andere Wahl von β hat auf c_{11} und λ nur geringen Einfluß, dagegen einen sehr großen auf $c_{12} - c_{44}$ und e_{14}; man

Tabelle 2.

β	f_1	f_2	f	$\frac{c_{11}}{10^{-11}}$	λ	$\frac{(c_{12} - c_{44})}{10^{-11}}$	$-e_{14} \cdot 10^{-4}$	$\varkappa c_{11}$
−2,00	24,60	25,98	166,0	6,42	23,1	4,25	20,2	0,906
−1,95	26,67	22,50	157,6	6,96	23,8	3,35	18,4	0,982
−1,90	28,60	19,27	149,7	7,42	24,4	2,59	16,6	1,053
−1,85	30,40	16,26	142,4	7,93	25,0	1,94	14,8	1,120
−1,80	32,09	13,43	135,5	8,38	25,6	1,39	12,8	1,182
−1,75	33,66	10,79	129,1	8,79	26,2	0,942	10,8	1,240
−1,70	35,14	8,31	123,1	9,17	26,9	0,586	8,72	1,294
−1,65	36,53	5,99	117,5	9,53	27,5	0,319	6,59	1,345
−1,60	37,84	3,79	112,1	9,88	28,1	0,131	4,27	1,394
−1,55	39,08	1,72	107,1	10,20	28,8	0,028	2,03	1,440
−1,50	40,25	−0,24	102,3	10,51	29,5	—	—	1,483
−1,45	41,36	−2,10	97,8	10,79	30,1	—	—	1,523

kann z. B. e_{14} zur Übereinstimmung bringen, indem man β etwa gleich $-1{,}55$ wählt, dann bleibt der Fehler von c_{11} noch gering, λ wird sogar verbessert, aber $c_{12} - c_{44}$ wird vielmals zu klein.

Jetzt wird das Ergebnis des § 1, das Versagen der Formel (5), verständlich. Die Werte von $c_{12} - c_{44}$ und von e_{14} sind eben äußerst empfindlich gegen kleine Änderungen des Mechanismus. Drehungen und Deformationen der Atome, die hier vernachlässigt sind, werden in Wirklichkeit wesentlichen Einfluß auf $c_{12} - c_{44}$ und besonders auf e_{14} haben. Wenn sich z. B. der

Kern eines Atoms gegen die Elektronenhülle verschiebt, wird ein intraatomarer Beitrag zum piezoelektrischen Momente entstehen, der voraussichtlich den Betrag von e_{14} zu verkleinern strebt.

Die elastischen Eigenschaften werden jedenfalls durch die Theorie gerade so gut wiedergegeben wie bei den Salzen des Typus NaCl. Dabei ist die Annahme doppelt geladener Ionen ($z = 2$) wesentlich; würde man $z = 1$ wählen, müßte nach (30) $n - 1$ viermal so groß, also n etwa gleich 17 genommen werden, was ganz unwahrscheinlich ist. Dann würden aber auch alle anderen Übereinstimmungen verschwinden.

Endlich müssen einige Worte über das auffällige Resultat gesagt werden, daß β negativ herauskommt. Es bedeutet nach (14), daß die Ionen gleicher Art sich *anziehen* mit einem Potentiale $b r^{-5}$, während die Ionen ungleicher Art sich nach demselben Entfernungsgesetze abstoßen. Man könnte hieran allerlei Spekulationen knüpfen, etwa daß in dieser Anziehung die rätselhafte Kohäsionskraft gefunden sei, die homöopolare Verbindungen, einatomige Kristalle zusammenhält. Doch möchten wir eine solche Vermutung nur mit dem größten Vorbehalte aussprechen. Andererseits möchten wir darauf hinweisen, daß diese Erscheinung des negativen β vom Standpunkte der elektrostatischen Atommodelle keineswegs so unerklärlich ist, wie es den Anschein hat. Denn die Wirkung zweier Elektronensysteme aufeinander ist nicht bloß eine Funktion der Entfernung, sondern auch von der wechselseitigen Orientierung der Systeme abhängig, und zwar ist sie für gewisse Stellungen Anziehung, für andere Abstoßung. Es wäre nun möglich, daß infolge der Verteilung und Stellung der Ionen im Gitter bei den Ionen der gleichen Art die Anziehung, bei denen verschiedener Art die Abstoßung überwiegt. Doch ist ein ausführliches Eingehen auf diese Umstände vorläufig noch nicht geboten; denn diese elektrostatischen Wirkungen fallen gar nicht unter unser Schema von Zentralkräften und liefern überdies niemals stabile Gleichgewichte. Ohne quantentheoretische Ergänzungen haben also solche Betrachtungen keine Aussicht auf Erfolg.

Wir glauben durch unsere Ausführungen gezeigt zu haben, daß die Annahme der elektrostatischen Kohäsion zusammen mit einer Zentralkraft vom Exponenten $n = 5$ zwar nicht

alle Eigenschaften der Zinkblende erklärt, aber als eine richtig gewählte erste Näherung der exakten Theorie gelten darf.

Anhang.

1. Berechnung der Summen S und C.

Es handelt sich um Summen der Form:

$$S = \sum_{(K)} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^\alpha l_2^\beta l_3^\gamma ,$$

wo α, β, γ positive ganze Zahlen oder Null sind und die Summation über alle ganzen Zahlen l_1, l_2, l_3, die gewissen Kongruenzen (K) genügen, zu erstrecken ist.

Wir ordnen die Summe nach wachsenden Werten der Entfernung:

$$r_l = (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{1/2} ;$$

das geschieht in jedem Falle durch Anlegung einer Tabelle der zulässigen Werte von l_1, l_2, l_3. Dann nimmt die Summe S die Form an:

$$S = \sum_{l=1}^{\infty} C_l r_l^{-n},$$

wo die C_l ganzzahlige Koeffizienten sind, die man mit Hilfe der Tabelle leicht berechnen kann. Für die numerische Ausrechnung muß man die Reihe bei einem bestimmten Gliede abbrechen; wir setzen:

$$S = S^{(p)} + R^{(p)},$$

wo

$$S^{(p)} = \sum_{l=1}^{p} C_l r_l^{-n}.$$

Den Rest $R^{(p)}$ berechnen wir näherungsweise, indem wir die Summe S durch das entsprechende Integral ersetzen:

$$R^{(p)} = \eta \iiint_{r>r_p} r^{-n} x^\alpha y^\beta z^\gamma \, dx\, dy\, dz ;$$

dabei ist η ein echter Bruch, der angibt, welcher Bruchteil aller Gitterpunkte l_1, l_2, l_3 auf Grund der Kongruenzen (K) zugelassen ist. Um die Genauigkeit dieser Restberechnung abzuschätzen, vergleichen wir die Differenz:

$$R^{(p-1)} - R^{(p)}$$

mit dem letzten Reihengliede

$$C_p r_p^{-n};$$

unterscheiden sich diese Größen nun wesentlich weniger als die angestrebte Genauigkeit der Rechnung (1%), so begnügen wir uns mit dem erreichten Werte.

Auf diese Weise finden wir:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} 2^{-n} S_1(n) = \sum\limits_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1 + l_2 + l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \quad = \frac{4}{\sqrt{3^n}} + \frac{12}{\sqrt{11^n}} + \frac{12}{\sqrt{19^n}} + \frac{16}{\sqrt{27^n}} + \frac{24}{\sqrt{35^n}} + \frac{12}{\sqrt{43^n}} + \frac{24}{\sqrt{51^n}} \\ \quad + \frac{36}{\sqrt{59^n}} + \frac{12}{\sqrt{67^n}} + \frac{28}{\sqrt{75^n}} + \frac{36}{\sqrt{83^n}} + \frac{24}{\sqrt{91^n}} + \frac{36}{\sqrt{99^n}} + \frac{36}{\sqrt{107^n}} + \cdots, \\ 2^{-n} R^{(p)} = \frac{4\pi}{16} \int_{r_p}^{\infty} r^{-n} \cdot r^2 \, dr = \frac{\pi}{4(n-3) r_p^{n-3}}. \end{cases}$$

Für $n = 5$ brechen wir die Reihe bei dem Gliede mit:

$$r_p = \sqrt{99}$$

ab; die Summe der ersten Glieder ist:

$$2^{-5} S^{(p)} = 0{,}307461,$$

ferner:

$$2^{-5} R^{(p)} = \frac{\pi}{4 \cdot 2 \cdot 99} = 0{,}003967,$$

$$2^{-5} R^{(p-1)} = \frac{\pi}{4 \cdot 2 \cdot 91} = 0{,}004315,$$

also:

$$2^{-5} (R^{(p-1)} - R^{(p)}) = 0{,}000348,$$

während das letzte Glied mit $r_p = \sqrt{99}$ den Wert 0,000369 hat; der Unterschied ist also weniger als 1‰ des Betrages von $2^{-n} S^{(p)}$. Daher haben wir:

$$2^{-5} S_1(5) = 2^{-5} (S^{(p)} + R^{(p)}) = 0{,}307461 + 0{,}003967 = 0{,}311428,$$

$$\text{(a)}\qquad S_1(5) = 9{,}965.$$

Für $n = 7$ wird mit $r_p = \sqrt{99}$:

$$2^{-7} S^{(p)} = 0{,}089002\,,$$

$$2^{-7} R^{(p)} = \frac{\pi}{4 \cdot 4 \cdot 99^2} = 0{,}000020\,,$$

$$2^{-7} R^{(p-1)} = \frac{\pi}{4 \cdot 4 \cdot 91^2} = 0{,}000024\,.$$

Die Differenz ist 0,000004, das letzte Glied ebenso groß. Also wird:

$$2^{-7} S_1(7) = 0{,}089002 + 0{,}000020 = 0{,}089022\,,$$

$$S_1(7) = 11{,}392\,. \tag{b}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} S_2(n) = \sum_{l_1 + l_2 + l_3 = 0 \bmod 2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \quad = \frac{12}{\sqrt{2^n}} + \frac{6}{\sqrt{4^n}} + \frac{24}{\sqrt{6^n}} + \frac{12}{\sqrt{8^n}} + \frac{24}{\sqrt{10^n}} + \frac{8}{\sqrt{12^n}} + \frac{48}{\sqrt{14^n}} \\ \quad + \frac{6}{\sqrt{16^n}} + \frac{36}{\sqrt{18^n}} + \frac{24}{\sqrt{20^n}} + \frac{24}{\sqrt{22^n}} + \frac{24}{\sqrt{24^n}} + \frac{72}{\sqrt{26^n}} + \frac{48}{\sqrt{30^n}} \\ \quad + \frac{12}{\sqrt{32^n}} + \frac{48}{\sqrt{34^n}} + \frac{30}{\sqrt{36^n}} + \frac{72}{\sqrt{38^n}} + \frac{24}{\sqrt{40^n}} + \cdots \\ R^{(p)} = \frac{4\pi}{2} \int_{r_p}^{\infty} r^{-n} r^2 \, dr = \frac{2\pi}{(n-3) r_p^{n-3}}\,. \end{cases}$$

Für $n = 5$ wird mit $r_p = \sqrt{40}$:

$$S^{(p)} = 2{,}9152\,,$$

$$R^{(p)} = \frac{2\pi}{2 \cdot 40} = 0{,}07856\,,$$

$$R^{(p-1)} = \frac{2\pi}{2 \cdot 38} = 0{,}08264\,.$$

Die Differenz ist 0,00408, das letzte Glied 0,00240; der Unterschied dieser Zahlen ist hinreichend klein gegen $S^{(p)}$. Daher wird:

$$S_2(5) = 2{,}9152 + 0{,}0786$$

$$S_2(5) = 2{,}994 \tag{c}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} 2^{-n+3} S_3(n) = \sum\limits_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1 l_2 l_3 \\ \quad = \frac{4}{\sqrt{3^n}} - \frac{36}{\sqrt{11^n}} + \frac{108}{\sqrt{19^n}} - \frac{48}{\sqrt{27^n}} - \frac{360}{\sqrt{35^n}} + \frac{540}{\sqrt{43^n}} \\ \quad + \frac{316}{\sqrt{51^n}} - \frac{396}{\sqrt{59^n}} + \cdots \end{cases}$$

Der Rest $R^{(p)}$ wird hier, als Integral berechnet, gleich Null. Die absolute Größe des letzten Gliedes liefert daher einen Anhalt für die erreichte Genauigkeit. Mit $r_p = \sqrt{59}$ wird:

$$2^{-6} S_3(9) = 0{,}027926$$

und das letzte Glied $-0{,}000004$; die Genauigkeit genügt also. Daher wird:

$$\text{(d)} \qquad S_3(9) = 1{,}787\,.$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} 2^{-n+4} C_1(n) = \sum\limits_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4 \\ \quad = \frac{4}{\sqrt{3^n}} + \frac{332}{\sqrt{11^n}} + \frac{652}{\sqrt{19^n}} + \frac{2332}{\sqrt{27^n}} + \frac{5648}{\sqrt{35^n}} \\ \quad + \frac{3148}{\sqrt{43^n}} + \frac{14616}{\sqrt{51^n}} + \frac{25188}{\sqrt{59^n}} + \frac{10252}{\sqrt{67^n}} + \frac{26716}{\sqrt{75^n}} \\ \quad + \frac{51108}{\sqrt{83^n}} + \frac{53144}{\sqrt{91^n}} + \frac{41496}{\sqrt{99^n}} + \frac{77028}{\sqrt{107^n}} + \cdots, \\ R^{(p)} = \frac{2\pi}{16} \int_{r_p}^{\infty} \int_0^{\pi} r^{-n} \cdot r^4 \cos^4\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta = \frac{\pi}{20(n-7) r_p^{n-7}} \end{cases}$$

Für $n = 9$ und $r_p = \sqrt{91}$ wird:

$$2^{-5} C^{(p)}(9) = 0{,}03928\,,$$

$$R^{(p)} = \frac{\pi}{40 \cdot 91} = 0{,}000863\,,$$

$$R^{(p-1)} = \frac{\pi}{40 \cdot 83} = 0{,}000946\,.$$

Die Differenz der Reste 0,000083 unterscheidet sich vom letzten Gliede 0,000081 genügend wenig. Also wird:

$$2^{-5}\, C_1(9) = 0{,}03925 + 0{,}00086 = 0{,}04009$$

(e) $$C_1(9) = 1{,}283\,.$$

(V)
$$\begin{cases} C_2(n) = \sum_{l_1+l_2+l_3 \equiv 0 \bmod 2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\, l_1^4 \\ \quad = \frac{8}{\sqrt{2^n}} + \frac{32}{\sqrt{4^n}} + \frac{144}{\sqrt{6^n}} + \frac{128}{\sqrt{8^n}} + \frac{656}{\sqrt{10^n}} \\ \quad + \frac{128}{\sqrt{12^n}} + \frac{1568}{\sqrt{14^n}} + \frac{512}{\sqrt{16^n}} + \frac{2712}{\sqrt{18^n}} \\ \quad + \frac{2176}{\sqrt{20^n}} + \frac{1424}{\sqrt{22^n}} + \frac{2304}{\sqrt{24^n}} + \frac{10422}{\sqrt{26^n}} \\ \quad + \frac{10272}{\sqrt{30^n}} + \frac{2048}{\sqrt{32^n}} + \frac{8992}{\sqrt{34^n}} + \frac{6816}{\sqrt{36^n}} + \cdots, \\ R^{(p)} = \frac{2\pi}{2} \int_{r_p}^{\infty} \int_{0}^{\pi} r^{-n} r^4 \cos^4\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta = \frac{2\pi}{5\,(n-7)\, r_p^{n-7}}. \end{cases}$$

Für $n = 9$ und $r_p = \sqrt{36} = 6$ wird:

$$C^{(p)}(9) = 0{,}52872\,;$$
$$R^{(p)} = 0{,}01744\,,$$
$$R^{(p-1)} = 0{,}01848\,.$$

Die Differenz der Reste ist 0,00104, das letzte Glied 0,00068, der Unterschied beider genügend klein. Also wird:

$$C_2(9) = 0{,}5287 + 0{,}0174$$

(f) $$C_2(9) = 0{,}5461\,.$$

2. Berechnung der elektrostatischen Gitterkonstanten.

I. Die Konstante α ist die negative elektrostatische Energie des Gitters pro Elementarwürfel, wenn dessen Kante $\delta = 1$ und die Ionenladung $2e = 2$ gesetzt wird.

Wir bezeichnen den Abstand zweier auf der Würfeldiagonale benachbarter Ionen Zn^{++} und S^{--} mit h; dann ist:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}\, h\,.$$

Wir betrachten nun ein Gitter, für das $h = 1$ und die Ionenladung $2e = 1$ ist, und bezeichnen das Potential aller Gitterpunkte auf einen mit φ; dieses hat den gleichen Wert für alle Gitterpunkte. Dann ist das Potential aller Gitter-

punkte auf die 4 Zn^{++}- und die 4 S^{--}-Ionen eines Elementarwürfels:

$$8\,\frac{(2e)^2}{h}\,\varphi = \frac{128\,e^2}{\sqrt{3}\,\delta}\,\varphi\,;$$

die potentielle Energie pro Elementarwürfel erhält man durch Division mit 2, und daraus entsteht dann α für $e = 1$, $\delta = 1$:

$$\alpha = -\frac{64}{\sqrt{3}}\,\varphi = -36{,}95\,\varphi\,.$$

Die Größe φ berechnen wir nach der Methode von Madelung[1]) in folgender Weise.

Wir zerlegen φ in ein Punkt-, Linien- und Ebenenpotential:

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_L + \varphi_E\,.$$

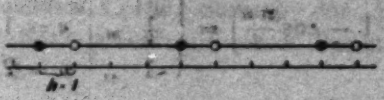


Fig. 2.

1. *Punktpotential.* φ_P sei das Potential aller Punkte einer Würfeldiagonalen D auf einen von ihnen (Fig. 2). Offenbar ist:

$$\begin{aligned}\varphi_P &= -\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-+\ldots\\ &\quad -\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-+\ldots\\ &= -\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\ldots\\ &\quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\ldots\\ &= -\log 2-\frac{1}{2}\log 2 = -\frac{3}{2}\log 2\\ &= -1{,}0397\,.\end{aligned}$$

2. *Linienpotential.* Wir legen durch die Würfeldiagonale D und eine Würfelkante die Ebene E; diese enthält eine Schar zur Würfeldiagonale D paralleler Punktreihen. Das Potential aller dieser auf einen Punkt der Diagonale D sei φ_L (Fig. 3). Nach Madelung ist das Potential einer periodischen Ladungs-

1) E. Madelung, Phys. Ztschr. 19, S. 524. 1918.

verteilung auf der Achse der Zylinderkoordinaten r, z durch die Summe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n K(\nu_n r) \cos(\nu_n z)$$

dargestellt[1]): dabei drücken sich die Koeffizienten durch die Periode Z und die lineare Dichte σ so aus:

$$c_0 = \frac{1}{Z}\int_Z \sigma\, dz, \quad c_n = \frac{1}{Z}\int_Z \sigma \cos(\nu_n z)\, dz,$$

und es ist:

$$\nu_n = \frac{2\pi n}{Z}.$$

Im Falle unserer Punktreihen wird $Z = 4$ und:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ für } n = 0,\ 4,\ 8, \ \ldots \\ \frac{1}{2} \ \ \text{„} \ \ n = 1,\ 3,\ 5, \ \ldots \\ 1 \ \ \text{„} \ \ n = 2,\ 6,\ 10, \ \ldots \end{cases}$$

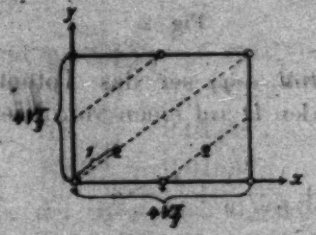


Fig. 3.

Um das Potential der parallelen Punktreihen auf einen Punkt der Diagonale D zu finden, hat man in der Summe als Anfpunkt der Reihe nach die folgenden Punkte zu nehmen:

1. Parallele: $r = 1 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}, \quad z = 1 \cdot \frac{4}{3},$
2. „ $r = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}, \quad z = 2 \cdot \frac{4}{3},$
3. „ $r = 3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}, \quad z = 3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 0,$
4. „ $r = 4 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}, \quad z = 1 \cdot \frac{4}{3},$

. . . . . .

1) Es ist $K(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^{1}(ix)$, wo H_0^{1} die bekannte Hankelsche Zylinderfunktion darstellt.

Dabei haben die z-Werte offenbar die Periode 8. Setzt man diese Werte ein und summiert, so findet man nach längerer Rechnung:

$$\varphi_L = -K\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\right) - 3K\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}\right) + K\left(\frac{3\pi\sqrt{2}}{3}\right) + K\left(\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$- 2K\left(\frac{5\pi\sqrt{2}}{3}\right) + 3K\left(\frac{6\pi\sqrt{2}}{3}\right) - 2K\left(\frac{7\pi\sqrt{2}}{4}\right) - 3K\left(\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$+ 2K\left(\frac{9\pi\sqrt{2}}{3}\right) - 6K\left(\frac{10\pi\sqrt{2}}{3}\right) + \ldots$$
$$= -0{,}3208 .$$

3. *Ebenenpotential.* Die Summe der Potentiale aller zu E parallelen Netzebenen auf einen Punkt von E sei φ_E

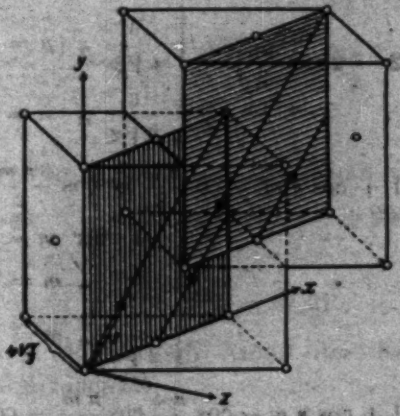


Fig. 4.

(Fig. 4). Nun ist nach Madelung das Potential einer Belegung σ der xy-Ebene, die nach x und y periodisch ist, in einem Aufpunkte $x\,y\,z$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2c_{mn}\,\pi\,\frac{e^{-\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}\cdot|z|}}{\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}}\cos(\mu_m x)\cos(\nu_n y),$$

wo die Koeffizienten durch die Perioden X, Y und die Ladungsdichte σ sich so ausdrücken:

$$c_{00} = \frac{1}{XY}\int_X\int_Y \sigma\, dx\, dy,$$

$$c_{m0} = \frac{2}{XY}\int_X\int_Y \sigma \cos(\mu_m x)\, dx\, dy,$$

$$c_{0n} = \frac{2}{XY}\int_X\int_Y \sigma \cos(\nu_n y)\, dx\, dy,$$

$$c_{mn} = \frac{4}{XY}\int_X\int_Y \sigma \cos(\mu_m x)\cos(\nu_n y)\, dx\, dy,$$

und wo:

$$\mu_m = \frac{2\pi m}{X}, \qquad \nu_n = \frac{2\pi n}{Y}$$

gesetzt ist.

Im Falle unserer Netzebenen ist $X = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$, $Y = 4\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $c_{00} = 0$,

$$c_{0n} = \frac{3}{8\sqrt{2}}\left(2 - 2\cos\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} & \text{„ } n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & \text{„ } n = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \end{cases}$$

$$c_{m0} = \frac{3}{8\sqrt{2}}\left(1 + \cos\pi m - \cos\frac{\pi m}{2} - \cos\frac{3\pi m}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } m = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ 0 & \text{„ } m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & \text{„ } m = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \end{cases}$$

$$c_{mn} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(1 + \cos\pi m - \cos\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi m}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}\cos\frac{3\pi m}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ für } \begin{cases} m = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \end{cases} \\ \qquad\quad \begin{cases} m = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \end{cases} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ für } \begin{cases} m = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ n = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \end{cases} \\ \qquad\quad \begin{cases} m = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \\ n = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Um das Potential der parallelen Netzebenen auf einen Punkt der Ebene E zu finden, hat man als Aufpunkte der Reihe nach folgende Punkte zu wählen:

1. Nachbarebene: $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $z = \sqrt{\frac{2}{3}}$,
2. „ $x = 0$, $y = 0$, $z = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$,
3. „ $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $z = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$

. . . . . .

Die $x\,y$-Werte haben offenbar die Periode 2.

Setzt man das in die Reihe ein und summiert über alle Parallelebenen, so findet man nach längerer Rechnung:

$$\varphi_K = -\sqrt{6}\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\,e^{-\pi} + 2\,e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}} + \frac{4}{3\sqrt{2}}e^{-3\pi}\right.$$

$$\left. - 2\,e^{-\pi\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\pi\sqrt{\frac{4}{3}}} - \frac{4}{\sqrt{8}}e^{-\pi\sqrt{6}} - \sqrt{2}\,e^{-2\pi} - 2\,e^{-2\pi\sqrt{2}} + \ldots\right)$$

$$= -0{,}2960\,.$$

Aus den Werten von φ_P, φ_L, φ_K erhält man nun:

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_L + \varphi_K = -1{,}0397 - 0{,}3208 - 0{,}2960 = -1{,}6565\,,$$

und daraus:

(g) $$a = -36{,}95\;\varphi = 61{,}21\,.$$

II. Für den elektrischen Anteil der Konstante A benützen wir den Ausdruck[1]):

$$\frac{e^2}{\delta^4}\alpha_1 = \frac{1}{2A}\sum_k\sum_{k'}\sum_l\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\pm 4\,e^2}{r}\right)\right]^{(l)}_{r_{kk'}} \cdot z^{(l)\,2}_{kk'}\,,$$

wo das $+$-Zeichen für $k = k'$, das $-$-Zeichen für $k \neq k'$ gilt. Wir beziehen jetzt die Summe auf ein Hilfsgitter, bei dem die Länge $\delta/4$ als Einheit gewählt ist; dann wird:

$$\frac{e^2}{\delta^4}\alpha_1 = 2\cdot\frac{4e^2}{\delta/4}\cdot\frac{1}{2A}\sum_{k'}\sum_l\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\pm 1}{r}\right)\right]^{(l)}_{r_{kk'}} \cdot z^{(l)\,2}_{kk'}\,,$$

weil die hier auftretende Summe offenbar vom Index k unabhängig ist. Wegen (10) folgt:

1) D.K. (8), (26), (42).

$$a_1 = 64 \cdot \sum_{k'} \mathfrak{S}_i \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\pm 1}{r} \right) \right]_{r_{ik'}^{(i)}} \cdot x_{ik'}^{(i)2} \ldots$$

Diese Summe setzen wir aus den Beiträgen zusammen, die die Netzebenen $z =$ konst. liefern; ist φ das Potential einer solchen Netzebene, so wird:

$$a_1 = 64 \cdot 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} x^2 \right)_p .$$

Nach der oben mitgeteilten Madelungschen Formel für das Potential einer Netzebene wird:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2 c_{mn} \pi \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}\, e^{-\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}\, z} \cos(\mu_m x) \cos(\nu_n y);$$

dabei sind hier die Perioden $X = 4$, $Y = 4$, also:

$$\mu_m = \frac{\pi m}{2}, \qquad \nu_n = \frac{\pi n}{2}$$

und:

$$c_{0n} = \tfrac{1}{8}(1 + \cos n\pi) = \begin{cases} \tfrac{1}{4} \text{ für gerade } n, \\ 0 \quad \text{„ ungerade } n; \end{cases}$$

$$c_{m0} = \tfrac{1}{8}(1 + \cos m\pi) = \begin{cases} \tfrac{1}{4} \text{ für gerade } m, \\ 0 \quad \text{„ ungerade } m; \end{cases}$$

$$c_{mn} = \tfrac{1}{4}(1 + \cos \pi m \cos \pi n) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}, \text{ wenn } m, n \text{ beide gerade oder} \\ \quad \text{beide ungerade,} \\ 0 \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Für die aufeinander folgenden Nachbarebenen sind in der Summe folgende Aufpunkte einzusetzen:

1. Nachbarebene:	$x = 1$,	$y = 1$,	$z = 1$;	Ladung	-1,
2. „	$x = 2$,	$y = 0$,	$z = 2$;	„	$+1$,
3. „	$x = 3$,	$y = 1$,	$z = 3$;	„	-1,
4. „	$x = 0$,	$y = 0$,	$z = 4$;	„	$+1$,
5. „	$x = 1$,	$y = 1$,	$z = 5$;	„	-1,

. . . . . .

(Periode 4)

Nach längerer Rechnung findet man schließlich folgende Reihe:

$$a_1 = 128\pi^2 (e^{-\pi} - 3\sqrt{2}\, e^{-\pi\sqrt{2}} + 2e^{-2\pi} + 2\sqrt{5}\, e^{-\pi\sqrt{5}} + 10\sqrt{2}\, e^{-2\pi\sqrt{2}} + 12e^{-3\pi} - 6\sqrt{10}\, e^{-\pi\sqrt{10}} + 2\sqrt{13}\, e^{-\pi\sqrt{13}} + 4e^{-4\pi} + 2\sqrt{17}\, e^{-\pi\sqrt{17}} - 36\sqrt{2}\, e^{-3\pi\sqrt{2}} + (8\sqrt{5} - 20) e^{-\pi\sqrt{20}} - 4\sqrt{26}\, e^{-\pi\sqrt{26}} + \ldots)$$

(h) $$a_1 = 3{,}885 .$$

III. Für den elektrischen Anteil der Konstanten C gilt die Formel[1]):

$$-\frac{e^2}{\delta^3}\alpha_2 = \sum_{(12)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\pm\frac{4e^2}{r}\right)\right]_{r_{12}^{(i)}}\cdot z_{12}^{(i)}\,.$$

Beziehen wir die Summe wieder auf ein Hilfsgitter mit $\delta/4$ als Einheit, so wird:

$$-\frac{e^2}{\delta^3}\alpha_2 = \frac{4e^2}{(\delta/4)^3}\sum_{(12)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\pm\frac{1}{r}\right)\right]_{r_{12}^{(i)}}\cdot z_{12}^{(i)}\,.$$

Die Summe setzen wir aus den Beiträgen der Netzebenen $z =$ konst. zusammen; dann folgt:

$$\alpha_2 = -64\cdot 2\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}z\right)_p,$$

wo φ das Potential einer Netzebene ist. Dabei ist φ dieselbe unter II. benützte Reihe. Man findet leicht:

$$\alpha_2 = 64\pi^2\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}(2p+1)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn\,e^{-\frac{\pi}{2}(2p+1)\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$= 64\pi^2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\,e^{-\pi\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{10}}e^{-\pi\sqrt{4}} + \frac{8}{\sqrt{5}}e^{-\pi\sqrt{5}}$$

$$+\frac{10}{\sqrt{26}}e^{-\pi\sqrt{\frac{13}{2}}} + 2\sqrt{2}\,e^{-2\pi\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{2}}}$$

$$-3\sqrt{2}\,e^{-3\pi\sqrt{2}} - \frac{18}{\sqrt{10}}e^{-3\pi\sqrt{\frac{5}{2}}} + \ldots\Big),$$

(i) $$\alpha_2 = 70{,}0\,.$$

IV. Der elektrische Anteil der Konstanten D ist die Kraft, die von den Ionen der einen Art auf die der anderen ausgeübt wird, wenn die beiden einfachen Gitter gegeneinander schwingen. Die auf ein negatives Ion wirkende Kraft in der x-Richtung ist gleich dem Werte von $-2e\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ an der Stelle des Ions, wobei φ die von den positiven Ionen herrührende Wirkung darstellt; φ genügt der Wellengleichung und wird an allen positiven Gitterpunkten unendlich wie $2e\,r^{-1}$. Wie

1) D.K. (8), (25), (36).

a. a. O.[1]) gezeigt worden ist, muß der Grenzwert von φ für unendlich lange Wellen so berechnet werden, daß der Mittelwert des Feldes über eine Zelle nicht verschwindet. Dann erhält man in erster Näherung für φ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{4\pi(2e)}{\Delta}.$$

Da nun aus Symmetriegründen in jedem negativen Gitterpunkte:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

ist, so folgt für die Kraft auf ein Ion:

$$(k) \qquad -2e\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} = \frac{4\pi(2e)^2}{3\Delta} = \frac{64\pi e^2}{3\delta^2};$$

das ist der Anteil der elektrischen Kräfte zu der quasielastischen Kraft $D\Delta$.

---

1) D.K. 2. Teil (238), S. 91; vgl. auch § 31, S. 98. Vgl. auch M. Born, Ann. d. Phys. 61, S. 87. 1920. Anhang.

(Eingegangen 3. November 1919.)

3. *Die Zungenpfeife als gekoppeltes System;* *von Hans Vogel.*

(Auszug aus einer Jenaer Dissertation.)

Die eigentümlichen Erscheinungen beim Abstimmen der Zungenpfeife, das Umspringen und Aussetzen des Tones bei gewissen Längen der Ansatzröhre, haben schon seit langer Zeit das Interesse der Physiker auf sich gezogen. Vor allem hat sich W. Weber[1]) in seiner Habilitationsschrift und einer Reihe weiterer Arbeiten experimentell und theoretisch sehr eingehend mit dem Gegenstand beschäftigt, nach ihm vor allem Willis[2]) und später Helmholtz.[3]) Trotzdem sich so hervorragende Physiker mit dem Problem befaßt haben, ist noch keine Klarheit hineingebracht, so daß der berühmte Organist J. G. Töpfer 1888 in seinem Lehrbuch über den Orgelbau zusammenfassend zu dem Urteil kommt: Es lassen sich für Zungenpfeifen mit durchschlagenden Zungen allgemein gültige Maße nicht angeben. „Der Orgelbauer ist bei Zungenpfeifen auf Probieren angewiesen. Die Theorie ist ebenso ratlos wie die Praxis." In seiner Arbeit „Über die Rückwirkung eines resonierenden Systems" hat M. Wien darauf hingewiesen, daß man die Erscheinungen bei der Zungenpfeife als gekoppelte Schwingungen auffassen muß, jedoch sind es keine freien Schwingungen, sondern „erzwungene Schwingungen durch eine Kraft, deren Periode durch die Periode der Schwingung gegeben ist. Letztere wird jedoch wieder durch die Kraft beeinflußt und verändert, so daß hier wesentlich kompliziertere Verhältnisse vorliegen". Wien ist jedoch nicht näher darauf eingegangen. Es sollen nun im folgenden die älteren Versuchsergebnisse, insbesondere die von Weber auf Grund der Theorie der gekoppelten Schwingungen gedeutet und ferner

1) W. Webers Werke, I. S. 207, 257, 266, 276, 292.
2) O. Willis, Pogg. Ann. 24. S. 397. 1832.
3) H. v. Helmholtz, Tonempfindungen, S. 130, 619, 622. 1862.

die physikalischen Vorgänge in der Zungenpfeife durch weitere Versuche erläutert werden, bei denen besonders die Koppelung zwischen Zunge und Ansatzrohr verändert wurde.

I. Ältere Versuche.

Weber benutzte zu seinen Versuchen fast stets den von ihm erfundenen Pfeifenkopf. Der von mir benutzte Pfeifenkopf ist dem seinigen genau nachgebildet und ist in Fig. 1 dargestellt, die wohl ohne nähere Erläuterung verständlich ist. Die von Weber benutzte Zunge bestand aus Messing und war 28,4 mm lang, 5,6 mm breit und 0,50 mm dick. Beim Anzupfen in einem Schraubstock machte sie 388 Schwingungen. Die Änderung der Ansatzröhren, die aus Holz oder Glas waren, bewirkte Weber durch Abschneiden. Mit dieser Apparatur stellte er 5 größere Versuchsreihen an.[1]) Die Erregung der Pfeife erfolgte bei den ersten 4 durch Anblasen, bei der 5. durch Ansaugen. Die Röhrenweite betrug bei den ersten 12,4 mm, bei den übrigen 10,6 mm. Außerdem findet sich noch eine 6. Beobachtungsreihe, bei der eine Zunge aus Eisen von ähnlichen Dimensionen und 570 Schwingungen benutzt wurde.[2]) Weber teilt die Ergebnisse dieser Versuche in seinen Arbeiten mehrmals mit, sowohl in Noten als in Zahlen. Da er einfache Schwingungen zählt und als Längeneinheit 1 Linie (Pariser Maß) = 2,257 mm benutzt, habe ich seine Beobachtungen in Doppelschwingungen und Zentimeter umgerechnet. Von diesen ist Reihe 4 in Fig. 2 (ausgezogene Kurve) wiedergegeben.

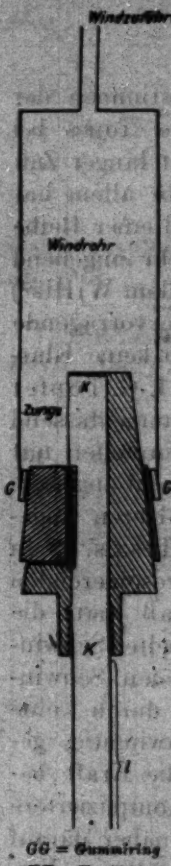


Fig. 1.

Weber beschreibt seine Versuche zusammenfassend etwa in folgender Art: Fügt man an eine Zungenpfeife ein kurzes Ansatzrohr und erregt sie durch Anblasen, so wird der

1) Beobachtungsreihe 1, 1. S. 233, 235, 286; 2, 1. S. 237f.; 3, 1. S. 241f., 256, 274; 4, 1. S. 247, 287; 5, 1. S. 275.
2) Beobachtungsreihe 6, 1. S. 318.

Ton fast nicht verändert. Er wird kaum merklich tiefer. Verlängert man das Ansatzrohr, so tritt eine merkliche Vertiefung ein, die mit zunehmender Röhrenlänge immer rascher wächst, bis sie eine Oktave beträgt. In diesem Augenblick schlägt der Ton plötzlich in den um, den die Pfeife ohne Ansatzrohr gab. Die Länge a, bei der dieser Tonsprung erfolgt, ist die Länge derjenigen offenen Pfeife, die den Eigenton der Zunge als Grundton gibt ($a = \lambda/2$). Bei weiterer Verlängerung der Röhren über a hinaus wird der Ton von neuem tiefer, erst wenig, dann schneller. Bei der Länge $2a$ beträgt die Vertiefung eine Quarte, und es erfolgt wieder ein Sprung zum Anfangstone. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch bei Zunahme der Ansatzröhren um die Länge a. Dabei verhalten sich die Schwingungszahlen der tiefsten Töne vor dem Tonsprung zum Eigenton der Zunge wie 1 : 2, 3 : 4, 5 : 6 usw. Dieses Gesetz stellt Webers Experimente gut dar. Die Tonsprünge erfolgen etwa bei Vielfachen von a, allerdings sind die tiefsten Töne etwas tiefer als das Gesetz angibt. Wird die Zungenpfeife durch Ansaugen erregt, so tritt statt der Vertiefung des ursprünglichen Tones eine periodisch wiederkehrende Erhöhung ein. Weber drückt das Gesetz durch eine Formel aus, die gestattet, bei bekanntem Eigenton der Zunge für jede Länge des Ansatzrohres die Schwingungszahl der Zungenpfeife angenähert zu berechnen:

$$N = \frac{2l + \left[\left(\frac{a}{2} - r\right) \pm \left(\frac{a}{2} - r\right)\right]}{4al} \cdot c.$$

Hierin bedeuten:

N die Schwingungszahl der Zungenpfeife,
l die Länge der Luftsäule,
a die halbe Wellenlänge des Eigentones,
c die Schallgeschwindigkeit,
r den Rest, der sich bei Division von l durch a ergibt.

Für $r > a/2$ ist „+“, für $r < a/2$ ist „−“ in die Formel einzusetzen. Eine nach dieser Formel berechnete Kurve zeigt Fig. 2 a. f. S. (gestrichelte Kurve). Sie stimmt bei hohen und tiefen Tönen gut mit dem Experiment überein, dagegen ergibt sie für die mittleren Töne, wo l = einem ungeraden Vielfachen

von $a/2$, viel zu hohe Werte. Dabei ist $c = 344$ m pro Sekunde, der Eigenton der Zunge = 388, wie bei Versuchsreihe 4 von Weber. Wird die Zungenpfeife durch Ansaugen erregt, so lautet die Formel:

$$N = \frac{2l - \left[\left(\frac{a}{2} - r\right) \pm \left(\frac{a}{2} - r\right)\right]}{4al} \cdot c.$$

Diese Formel entspricht jedoch noch weniger den Versuchsergebnissen Wébers als die obige Formel für die angeblasene Zungenpfeife.

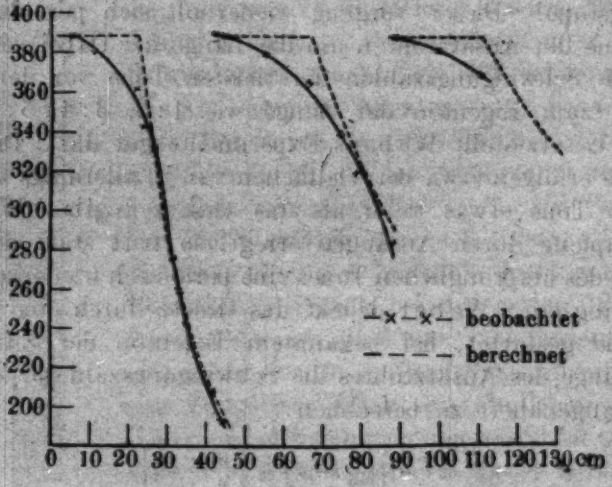


Fig. 2.

Auf Grund seiner Versuche stellte Weber folgende Sätze auf: Die Ursache des Tönens ist der periodisch unterbrochene Luftstrom. Die Schwingungszahl des Tones ist die unmittelbare Folge der Schwingungen der Zunge, deren Zahl wieder bestimmt wird einerseits durch die Dimensionen und die Elastizität der Zunge, andererseits durch die Einwirkung der im Ansatzrohr schwingenden Luft. Die Zunge und das Ansatzrohr beeinflussen sich in ihren Schwingungen so, daß sie synchron schwingen, wobei bald die Zunge bald die Luftsäule mehr nachgibt. Die Schwingungszahl der Zunge ist insofern von besonderem Einflusse, als sie die Zahl der Knoten bestimmt, die sich in der schwingenden Luft des Ansatzrohres ausbilden; denn sie begünstigt die Entstehung des Grund- oder

eines bestimmten Obertones von denen, die im Ansatzrohr möglich sind. *An den Stellen, wo die Zungenpfeife zwei Töne gibt, verhält sie sich bei Entstehung des tiefen wie eine gedeckte, bei Entstehung des hohen wie eine offene Pfeife.* Im ersteren Falle befindet sich an der Zunge ein Schwingungsknoten, im letzteren ein Schwingungsbauch. Hiernach bestimmte Weber das Intervall, um das sich der Ton ändert.

Über die Erscheinung, daß in gewissen Fällen eine Zungenpfeife überhaupt nicht anspricht, finden sich nur zwei Bemerkungen: Die eine bei Beobachtungsreihe 2, die andere in Band 5, S. 391. Dort sagt Weber, daß mit sehr engen Röhren kein Ton erzeugt werden kann.

Wenige Jahre nach Weber machte der Engländer Willis bei Versuchen zur künstlichen Hervorbringung von Vokalen Beobachtungen über die Tonhöhe von Zungenpfeifen beim Ansetzen zylindrischer Röhren. Er findet: Wird die Ansatzröhre einer angeblasenen Zungenpfeife verlängert, so wird der Ton allmählich tiefer, bis die Luftsäule die Länge $\lambda/4$ erreicht hat, wobei λ die Wellenlänge des Eigentones der Zunge ist. Dort springt der Ton plötzlich in einen höheren um, der noch höher ist als der Eigenton der Zunge. Er vertieft sich dann wieder, wird bei $\lambda/2$ dem Eigentone der Zunge gleich und dann tiefer, bis die Luftsäule gleich ist $3\lambda/4$, wo er wieder umspringt. Das Intervall zwischen dem höchsten und tiefsten Tone beträgt dabei nicht mehr als 1 Ton. Die Zungenpfeife spricht am besten an und der Ton ist am lautesten in der Mitte zwischen den Tonsprüngen; an diesen ist er schwächer und läßt sich dort oft überhaupt nicht hervorbringen.

Die benutzten Röhren waren so weit, daß sich der ganze Pfeifenkopf wie ein Stempel im Ansatzrohr verschieben ließ ($d = 33$ mm). Daher konnte Willis die Röhrenlänge stetig verändern. Zur Bestimmung der Tonhöhe wurde eine gedeckte Pfeife mit verschiebbarem Stempel benutzt. Aus dem Beobachtungsmaterial sei eine für seine Experimente charakteristische Figur (3) a. f. S. mitgeteilt. Die Ordinate darin ist die Länge z (in Zoll) des verschiebbaren Stempels der Vergleichspfeife.

Die Resultate von Willis weichen wesentlich von denen Webers ab.

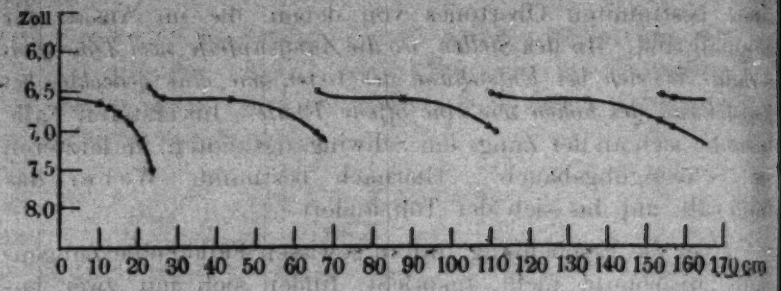


Fig. 3.

a) Weber findet die Tonsprünge bei Vielfachen von $\lambda/2$, Willis bei ungeraden Vielfachen von $\lambda/4$, also um eine Viertelwellenlänge verschoben.

b) Bei Willis beträgt das Intervall zwischen den höchsten und tiefsten Tönen nicht mehr als 1 Ganzton, bei Weber bis zu einer Oktave.

c) Bei derselben Erregung durch Anblasen findet Weber nur gleiche und tiefere Töne, Willis jedoch auch höhere Töne als den, den die Pfeife ohne Ansatzrohr gibt.

Da bei sonst gleicher Versuchsanordnung nur die Röhrenweite wesentlich verschieden war, so wird es Aufgabe der folgenden Experimente sein, auch den Einfluß von Ansatzröhren verschiedener Weite zu untersuchen.

II. Theoretische Betrachtungen.

Charakteristik der Koppelungserscheinung.

Die Zungenpfeife besteht im wesentlichen aus 3 Teilen: Dem Windrohr, der Zunge und dem Ansatzrohr. Alle 3 sind schwingungsfähige Systeme, die aber nicht unabhängig voneinander sind, sondern, wie die früheren Experimente zeigen, einander in Tonhöhe und Tonstärke, d. h. Schwingungszahl und Amplitude beeinflussen oder: sie sind miteinander gekoppelt. Man müßte die Zungenpfeife als ein gekoppeltes System von 3 Teilsystemen behandeln. Doch genügt es für die hier gestellte Aufgabe, wenn wir den einfachsten Fall, den zweier Teilsysteme, zugrunde legen und an ihm das Auftreten

der Koppelungserscheinungen nachweisen. Wir wollen daher vom Windrohr absehen und nur den Einfluß des Ansatzrohres (Resonator) auf die Zunge untersuchen. Das bedingt natürlich, daß wir später bei den Experimenten stets dasselbe Windrohr benutzen. Dabei bleibt die Zunge unverändert, hat also stets dieselbe Eigenperiode, während das Ansatzrohr so beschaffen ist, daß man seine Eigenschwingungen in weiten Grenzen ändern kann.

Für die freien Schwingungen zweier gekoppelter Systeme mit den Dämpfungen h_1 und h_2, wovon das System 2 — in unserem Falle die Luftsäule — stark gedämpft ist, stellt M. Wien[1]) folgende Gesetze auf:

I. Ist die *Dämpfung vorherrschend*, so tritt eine schwach gedämpfte Schwingung A und eine stark gedämpfte B in beiden Systemen auf. Vorherrschend und charakteristisch für den ganzen Vorgang ist daher die Schwingung A. Ihre Schwingungszahl liegt in der Nähe der Schwingungszahl des weniger gedämpften Systems 1. Wenn der Ton von System 2 höher ist als der von 1, so ist der Ton von A tiefer als der von System 1 und zwar um so mehr, je geringer die Differenz ε der Eigenperioden der beiden Systeme ist. Für $\varepsilon = h_2 - h_1$ besteht ein Minimum. Dann verschwindet jedoch diese Vertiefung von A schnell und geht durch Null hindurch. Wenn dann System 2 etwas tiefer ist als 1, tritt eine fast gleich große Erhöhung von A auf, die mit wachsender Differenz der Eigentöne wieder kleiner wird. Die Schwingung A ist stets schwach gedämpft, nur in der Nähe der Resonanz wächst die Dämpfung etwas. Die Schwingung B dagegen ist stets stark gedämpft, nur in der Nähe der Resonanz wird die Dämpfung etwas kleiner.

II. Ist die *Koppelung gleich der Dämpfung*, so ist der Verlauf der Erscheinung ganz ähnlich. Doch werden im Resonanzfall sowohl die Schwingungszahlen als auch die Dämpfungen beider Schwingungen A und B gleich.

III. Ist die *Koppelung vorherrschend*, so haben die beiden Schwingungsarten A und B niemals gleiche Schwingungszahlen. Ihre Differenz ist im Resonanzfall ein Minimum. Dabei werden die Dämpfungen gleich, so daß Schwebungen oder zwei

---

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. S. 151. 1897.

getrennte Töne entstehen. Sind die beiden Systeme verstimmt so wird die Differenz der Schwingungszahlen von *A* und größer, und eine der beiden Schwingungsarten ist stärker gedämpft als die andere. Es entstehen daher nur bei Beginn der Bewegung schnelle, aber bald verschwindende Schwebungen. Die weniger gedämpfte Schwingung *A* ist wieder maßgebend für den Charakter der ganzen Erscheinung. Ihre Abweichung von der Schwingung des Systems 1 ist größer als in den beiden früheren Fällen, in der Nähe der Resonanz erfolgt ein Sprung der Schwingungszahl. Vgl. Fig. 4.

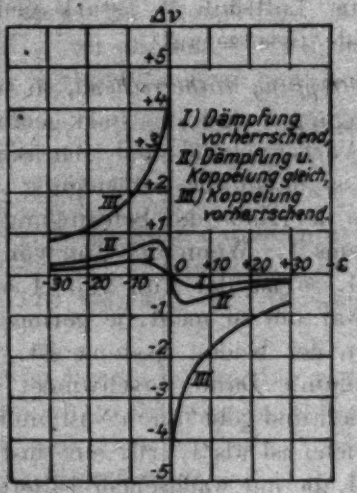


Fig. 4.

Diese Grundsätze müssen jetzt auf die Zungenpfeife angewandt werden. Wir haben es dabei, wie oben erwähnt, eigentlich nicht mit den freien Schwingungen der beiden gekoppelten Systeme zu tun, sondern mit erzwungenen Schwingungen, wobei die Kraft — der Luftstrom — infolge einer Art „Rückkoppelung“ durch die Schwingungen der Zunge reguliert wird. Die Klangerzeugung beginnt jedoch damit, daß zunächst die freien Schwingungen der beiden gekoppelten Systeme durch den ersten Luftstoß angeregt werden; von den beiden gekoppelten Schwingungen bleibt schließlich die weniger gedämpfte übrig, und in dieser Periode schwingend reguliert dann die Zunge den Luftstrom, wobei die Amplitude zu einem Maximum ansteigt.

Im allgemeinen wird also die Zungenpfeife denjenigen Ton geben, welcher der weniger gedämpften der beiden Koppelungsschwingungen von Zunge und Ansatzrohr entspricht. In der Umgebung der Resonanz wird die Erscheinung der Verlauf der Fig. 4 zeigen. Das Ansatzrohr sei zunächst höher gestimmt als die Zunge $\varepsilon > 0$, also zu kurz, dann ist der Ton etwas tiefer als der Eigenton der Zunge, bei Verlängerung des Ansatzrohres wird diese Vertiefung immer größer, bis beim Überschreiten der Resonanzlage des Eigentones der Zunge ein mehr oder weniger schneller Übergang zu einem gegen die Eigenschwingung der Zunge erhöhten Ton erfolgt. Diese Erhöhung nimmt bei weiterer Verlängerung des Rohres dann allmählich wieder ab. Je enger die Koppelung, um so größer sind die Tondifferenzen und um so schneller ist der Übergang, so daß schließlich ein Umspringen des Tones in der Resonanzlage erfolgen muß. Bei weiterem Verlängern des Rohres wiederholt sich diese Erscheinung jedesmal, wenn ein Oberton der Röhre mit dem Ton der Zunge in Resonanz ist.

Eigenschwingungen der beiden Einzelsysteme.

Um die Erscheinung nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu verfolgen, müssen wir die Eigenschwingungen der beiden Systeme näher betrachten. Die Zunge könnte man als einseitig eingeklemmten Stab ansehen und die Eigenschwingungen theoretisch berechnen, jedoch ist der Einfluß der Befestigungsart, das Mitschwingen des Rahmens und vor allem der Luft so groß, daß sich die Schwingungszahl nur höchst ungenau berechnen lassen würde. Z. B. änderte sich die Eigenschwingung meiner Zunge Nr. 10 beim Anblasen im Pfeifenkopf ohne Ansatzrohr in folgender Weise mit dem Druck der zugeführten Luft:

Tabelle 1.

$P =$	30 mm	Wasser	303	Schwingungen
	50 „	„	317	„
	100 „	„	335	„
	140 „	„	341	„
	160 „	„	343	„

Beim Anzupfen im Schraubstock gab sie 405 Schwingungen. Auch der Einfluß des Durchmessers d der Kanüle (KK in Fig. 1 u. 6) war sehr merklich. Für $d = 11{,}5$ mm erhielt ich bei

140 mm Druck 341 Schwingungen, für $d = 9$ mm 336, für $d = 7$ mm 313, für $d = 6$ mm entstand kein Ton mehr. Die Öffnung der Kanüle darf ein gewisses Mindestmaß nicht unterschreiten.

Der Eigenton der Zunge muß daher für die gerade vorhandenen Verhältnisse jedesmal experimentell bestimmt werden. Wie das möglich ist, soll unten besprochen werden.

Die Eigenschwingungen von Röhren sind bekannt. Die absolute Tonhöhe einer beiderseits offenen Röhre ist

$$r_m = \frac{m}{2L} \cdot c,$$

einer auf einer Seite gedeckten Röhre

$$r_m = \frac{2m-1}{4L} \cdot c.$$

Hierin bedeutet c die Schallgeschwindigkeit in Luft, m charakterisiert den Oberton und L ist die reduzierte Pfeifenlänge $= l + a + \beta$. a ist die Korrektion für das von der Zunge abgewandte offene Ende der Ansatzröhre, nach Helmholtz $= \frac{\pi}{8} \cdot d$. β ist die Korrektion für das der Zunge zugewandte Ende der Ansatzröhre und läßt sich nicht voraus berechnen, da sie von den Dimensionen des Pfeifenkopfes und der Ansatzröhre in unbekannter Weise abhängig ist. Also bleibt zur genauen Bestimmung des Eigentones der Ansatzröhre auch wieder nur das Experiment übrig.

Koppelung der beiden Systeme.

Ist $\lambda = \frac{c}{p}$ die Wellenlänge des Eigentones p der Zunge in Luft, so muß bei offenem Ansatzrohr Resonanz eintreten für $L = m \cdot \lambda/2$, wenn also die reduzierte Länge des Ansatzrohres gleich ist einem Vielfachen der halben Wellenlänge des Zungentones. Bei einem gedeckten Ansatzrohr muß Resonanz eintreten für

$$L = (2m-1)\frac{\lambda}{4},$$

wenn die reduzierte Länge des Ansatzrohres gleich ist einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge des Zungentones. Die Resonanzstellen des gedeckten Ansatzrohres sind um eine Viertelwellenlänge gegen die des offenen Ansatzrohres verschoben. Man erkennt hieraus, daß sowohl bei offenen als

auch bei gedeckten Ansatzröhren im Abstande von genau einer halben Wellenlänge eine regelmäßige Wiederkehr der Resonanz stattfinden muß. Ist dabei die Koppelung groß genug, so daß eine Rückwirkung des resonierenden Systems stattfindet, so muß die entstehende Tonkurve der Zungenpfeife — Verlauf der Tonhöhe mit Änderung der Röhrenlänge — einen Verlauf zeigen, der sich bei Verlängerung der Anatzröhren um eine halbe Wellenlänge wiederholt.

Dieses Ergebnis läßt sich auch in umgekehrtem Sinne verwerten. Die experimentell gefundene Tonkurve sei so beschaffen, daß man aus ihr die genaue Lage der Resonanzstellen entnehmen kann. Dann kann man aus den Abständen derselben die halbe Wellenlänge des Eigentones der Zunge ermitteln. Wir wollen also den Eigenton der Zungenpfeife durch die Formel $p = c/\lambda$ definieren, wobei $\lambda/2$ der wahrscheinlichste Wert des Abstandes der Resonanzstellen ist. Ebenso kann man, wenn z. B. ein offenes Rohr die erste Resonanzstelle bei l_1 aufweist, während sie doch bei $L = \lambda/2$ liegen soll, daraus die Korrektion für die Pfeifenlänge finden. Da $L = l_1 + \alpha + \beta$, so ergibt sich $\lambda/2 = l_1 + \alpha + \beta$ oder $\alpha + \beta = \lambda/2 - l_1$. *Man kann somit lediglich aus der Lage der Resonanzstellen den Eigenton der Zunge und* die Korrektionsglieder $\alpha + \beta$, mit deren Hilfe dann auch *die Eigentöne des Ansatzrohres ermitteln.* Dabei ist auf die richtige Wahl der Zahl m, die den resonierenden Oberton bzw. die Resonanzstelle angibt, zu achten.

Es ist so gezeigt worden, daß die Eigenschwingungen der beiden Systeme, die in der Zungenpfeife gekoppelt sind, sich nicht aus den Dimensionen voraus berechnen lassen, sondern nur rückwärts aus dem Experiment ermittelt werden können. Dies gilt natürlich erst recht von den Koppelungskoeffizienten der beiden Systeme. Sie hängen von der Art und Weise ab, wie die Zunge und das Resonanzrohr miteinander verbunden werden, weiter auch von der Form und den Dimensionen des Resonators. Zur Berechnung aus beobachteten Werten dient die Formel

$$\tau = 1 - \frac{n_1^2}{p^2} \quad \text{bzw.} \quad \tau = \frac{n_2^2}{p^2} - 1 .$$

Um schließlich ein Bild der zu erwartenden Koppelungsschwingung zu erhalten, soll ein Beispiel theoretisch berechnet werden. Eine Zunge mit dem Eigenton $p = 312$ (halbe Wellenlänge in Luft = 55 cm) werde mit einem offenen zylindrischen

Rohre gekoppelt, dessen Korrektionsglied $\alpha + \beta = 6$ cm. Die ersten Resonanzstellen liegen dann bei 49 und bei 104 cm. Der Koppelungskoeffizient sei $\tau = 0{,}18$; die Schallgeschwindigkeit $c = 342$ m pro Sekunde. Wir berechnen zunächst für das Ansatzrohr die korrigierte Länge $L = l + \alpha + \beta$, dann die Eigentöne desselben nach der Formel

$$q_m = \frac{m \cdot c}{2L},$$

wobei wir $m = 1$ setzen für die Längen bis zu 75 cm, $m = 2$ für größere Längen. Hierauf werden n_1 und n_2 nach der Formel

$$n_1^2 \text{ bzw. } n_2^2 = \tfrac{1}{2}\left[(p^2 + q^2) \mp \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4\tau^2 p^2 q^2}\right]$$

berechnet, wobei die Dämpfungen nicht berücksichtigt sind. In Fig. 5 zeigt die stark gestrichelte Kurve den zu erwartenden

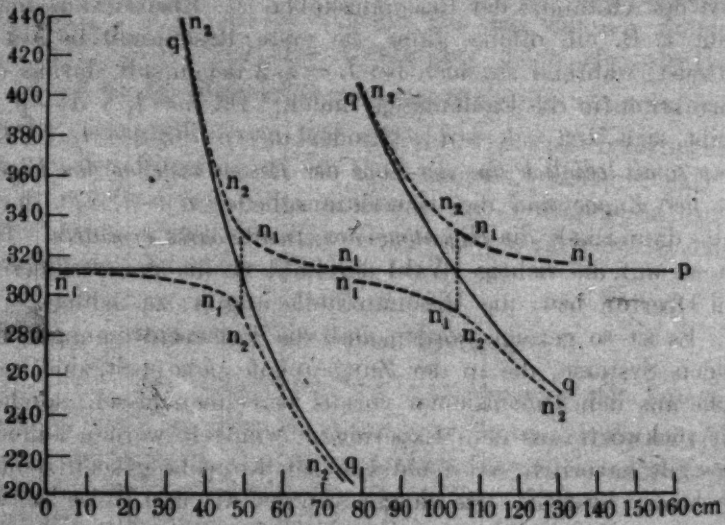


Fig. 5.

Verlauf der Tonhöhe. Bei größerer Verstimmung der beiden Systeme weicht sie nur wenig von der Tonhöhe der Zunge ab, in der Nähe der Resonanzstelle jedoch stark und zwar so, daß bei höher gestimmtem Resonator, der Ton der Zungenpfeife vertieft wird, bei tiefer gestimmtem Resonator erhöht. An der Resonanzstelle selbst erfolgt das charakteristische Umschlagen des Tones.

III. Experimentelle Untersuchungen.

Die Apparate.

Für die Versuche wurde aus Messing ein möglichst genaues Modell (Fig. 1) des schon von Weber benutzten und in seinen Werken beschriebenen Pfeifenkopfes hergestellt.[1]) Seine ganze Länge beträgt 9 cm, die Weite der Kanüle 11,5 mm. In den Pfeifenkopf können Zungen aus verschiedenem Material eingeklemmt werden, die 0,5 mm dick, 5,6 mm breit und 60 mm lang sind. Die Länge ihres schwingenden Teiles beträgt 28,5 mm. Die für die folgenden Versuche benutzten Zungen sind aus Stahlfederband. Ihre Herstellung verursachte Schwierigkeiten, da sie einerseits die Öffnung im Rahmen des Pfeifenkopfes möglichst genau verschließen sollen, ohne dabei an den Rändern eine merkliche Reibung oder gar Nebengeräusche zu verursachen, andererseits auch durch die Bearbeitung keine Verbiegung erleiden dürfen. Die Zunge 10 erfüllte diese Bedingungen am besten. Da der Pfeifenkopf von konischer Form ist, läßt er sich mit einem darüber geschobenen Gummiring luftdicht in das Windrohr einsetzen, das aus Glas — später aus Messing — hergestellt wurde. Es ist 12 cm lang und 44 mm weit. Die Zuführungsöffnung für den Luftstrom ist klein ($d = 5$ mm), um ein Mitschwingen der Luft in den Zuleitungsröhren und der übrigen Anblasevorrichtung möglichst zu vermeiden. Als *Resonanzröhren*, deren Länge veränderlich sein soll, werden Messingpräzisionsröhren benutzt, die so abgeschliffen sind, daß sie sich ineinander verschieben lassen. Bei einer Wandstärke von 0,75 mm betragen die inneren Durchmesser 13,0 und 11,5 mm. Das ist auch der Durchmesser der Kanüle. Die Röhren wurden in solchen Längen hergestellt, daß man daraus jede Länge von 7—340 cm zusammensetzen kann. Außerdem wurden für Längen bis 120 cm weite Röhren vorbereitet. Bei einer Wandstärke von 0,5 mm betragen ihre inneren Durchmesser 30 und 29 mm. Zur Verbindung mit dem Pfeifenkopf — bei den Vorversuchen wurden nur enge Röhren benutzt — wurde das Ende der Kanüle durch Ausdrehen um 1,5 mm erweitert, so daß die Resonanzröhren dicht schließend eingesetzt werden können. Ihre Längen sind vom Ende des Pfeifenkopfes an gemessen.

---

1) W. Webers Werke 1. S. 263.

Beim *Anblasen* der Zungenpfeife zeigte sich nun, daß verhältnismäßig großer Luftdruck nötig war. Vorversuche darüber ergaben, daß Drucke bis 300 mm Wassersäule in Betracht kommen. Ist damit kein Ton entstanden, so scheint eine weitere Steigerung des Druckes zwecklos zu sein. Die Zunge wird dann in den Rahmen hineingedrückt und kommt nicht zum Schwingen. Gleichzeitig wurde beobachtet, daß der Luftdruck möglichst konstant sein muß, da die Tonhöhe stark vom Druck abhängig ist. Demgemäß wurde die Anblasevorrichtung aus den folgenden Teilen zusammengestellt.

Ein kräftiger *Blasebalg* mit Fußbetrieb, wie er für Schmiedefeuer im Gebrauch ist, liefert die Druckluft, die in einen *Windkessel* von etwa 300 Liter geleitet wird, wo die starken Stöße, in denen die Luft aus dem Blasebalg kommt, geschwächt werden. Von da gelangt sie in einen *Glockengasometer*. Er besteht aus 2 Zylindern von Zinkblech, die je 60 cm hoch und 44 bzw. 40 cm weit sind. Die Belastung des eintauchenden Zylinders erfolgt durch einen Bleiring und beträgt für gewöhnlich 30 g pro qcm. Durch das veränderliche Volumen des Gasometers werden die Druckschwankungen weiter vermindert. Enge Zuführungsröhren und ein Hahn mit enger Bohrung tragen außerdem zum Ausgleich der Druckschwankungen bei, so daß beim Eintritt der Luft in das Windrohr — gleichmäßiges Treten des Blasebalges vorausgesetzt — die Schwankungen nur etwa 1 mm betragen. Zur Messung des Luftdruckes dient ein Wassermanometer unmittelbar vor dem Windrohr.

Die *Bestimmung der Tonhöhen* der Zungenpfeife sollte wie bei Weber mit dem Monochord erfolgen. Wegen der großen Unterschiede von Pfeife und Monochord in Tonstärke und Klangfarbe erwies sich dies nicht günstig. Deshalb wurden zu offenen Lippenpfeifen Stempel angefertigt, durch deren Verschiebung eine stetige Folge von Vergleichstönen erhalten werden kann. Ein Zeiger an dem Stempel gab auf einer Skala die Länge der gedeckten Pfeife an. Diese Pfeifen wurden mit konstantem Druck von 10 mm Wasser betrieben und mittels Stimmgabeln geeicht.

Die Vorversuche.

In den Pfeifenkopf wurden beiderseits offene Röhren verschiedener Länge eingesetzt und die Pfeife mit dem konstanten Druck von 140 mm angeblasen. Es zeigte sich, daß sie für

gewisse Längen des Ansatzrohres überhaupt nicht ansprach. Wenn sie aber zum Tönen kam, so gab sie nur *einen* Ton. Schwebungen oder zwei Töne konnten nicht einwandfrei beobachtet werden. Zur Messung der Tonhöhe wurde der Stempel der Vergleichspfeife so gestellt, daß sie einmal einen etwas höheren, dann einen etwas tieferen Ton als die Zungenpfeife gab. Durch Zählen der sehr deutlichen Schwebungen, die die Töne der beiden Pfeifen verursachten, ließ sich die Tonhöhe auf eine Schwingung genau bestimmen.

Stellt man das Ergebnis graphisch dar (Fig. 14), so sieht man periodisch wiederkehrende Vertiefungen des Tones bei zunehmender Länge des Ansatzrohres ähnlich wie bei Weber. Doch erhält man keine zusammenhängende Kurve, sondern nur Tonbereiche, zwischen denen kein Ton entstand. Die höchsten Töne der einzelnen Kurven sind dabei nicht gleich, sondern werden mit zunehmender Länge des Ansatzrohres tiefer: auf der anderen Seite sind die tiefsten Töne ungefähr dieselben. Infolgedessen ist die Vertiefung bei der ersten Tonkurve geringer, bei den folgenden größer als sie nach dem Weberschen Gesetz zu erwarten ist. Über die Lage der Resonanzstellen läßt sich aus dieser Beobachtungsreihe eine genaue Angabe nicht machen, da der Ton aussetzt. Um den Einfluß des Anblasedruckes zu beobachten, wurde die Pfeife dann mit $P = 100$ mm angeblasen. Dabei sprach sie bei Längen, bei denen vorher noch ein Ton entstand, nicht mehr an: Die Tonbereiche wurden kleiner. Ein Vergleich mit den früheren Messungen zeigt, daß die Töne in größeren Abständen von den Resonanzstellen am leichtesten entstehen und daß ebenso wie bei der Pfeife ohne Ansatzrohr einem geringeren Anblasedruck tiefere Töne entsprechen.

Derselbe Versuch wurde mit Zunge 8 angestellt. Auch sie gab für bestimmte Längen, z. B. von 54—57 cm, keinen Ton. Doch gelang es, durch Steigerung des Anblasedruckes, sie mit allen Ansatzröhren zum Ansprechen zu bringen. Von den größten Längen bei 300 cm beginnend, wurden die Töne mit abnehmender Röhrenlänge höher, bis bei $l = 238$ cm der Ton plötzlich in einen tieferen umschlug. Hierauf trat wieder eine Erhöhung ein. Es folgten noch Tonsprünge bei 170 cm, 113 cm und 52 cm. Für den Koppelungskoeffizienten ergibt sich der sehr hohe Wert von $\varkappa = 0{,}7$.

Änderung der Koppelung.

Um die charakteristischen Erscheinungen gekoppelter Systeme an der Zungenpfeife beobachten zu können, mußte versucht werden, die Koppelung der Zunge und des Resonators zu ändern und zwar loser zu machen. Es galt also, die Erregung der Luftschwingung im Ansatzrohr abzuschwächen. Dazu wurde auf den Ansatz des Pfeifenkopfes ein 3 cm langes Rohr (Verteilungsrohr) luftdicht aufgesetzt. An der gegenüberliegenden Seite war es durch einen Kork mit 2 Öffnungen verschlossen, von denen in die eine das Ansatzrohr eingefügt werden konnte. Die andere — als Seitenloch bezeichnet — blieb frei. Dadurch konnte ein Teil der Luft, nachdem sie die Zungenpfeife erregt und die Kanüle passiert hatte, das Instrument verlassen, ohne durch das Ansatzrohr strömen zu müssen, vgl. Fig. 6. Durch Korkringe mit verschiedenen Bohrungen ließ sich sowohl die Größe des Seitenloches als auch die Öffnung des Ansatzrohres verkleinern. Dadurch wurde es möglich, die Verteilung des Luftstromes und damit die Koppelung weitgehend zu ändern. Bei den Experimenten wurde Zunge 10 benutzt und stets mit dem Druck von 140 mm angeblasen.

Fig. 6.

Versuche mit engen Röhren.

a) Offene Röhren.

Bei der ersten Versuchsreihe war das Seitenloch vollkommen geöffnet. Sein Durchmesser betrug 11,5 mm, war also dem des Ansatzrohres gleich, so daß der Luftstrom zu ungefähr gleichen Teilen durch das Ansatzrohr und das Seitenloch strömen konnte. In der Tabelle 2 bedeutet l die Länge des Resonanzrohres vom Verteilungsrohr an gemessen, e_4 die Tonhöhe. Die hinter „Tonsprung" angegebenen Zahlen sind die unmittelbar nach dem Umschlagen des Tones gemessenen Schwingungszahlen. Zwei Töne oder Schwebungen wurden

Tabelle 2.

l	e_4	l	e_4
340	308	160	320
330	311	158	Tonsprung 296
323	Tonsprung 299	150	301
320	301	140	306
310	303	130	310
300	305	120	314
290	308	110	319
280	310	104	Tonsprung 295
270	314	100	299
268	Tonsprung 298	90	303
260	305	80	309
250	309	70	312
240	311	60	317
230	314	50	322
220	317	49	Tonsprung 291
212	Tonsprung 297	40	303
210	299	30	308
200	304	20	312
190	308	10	316
180	312	4	321
170	316	0	326

auch hier nicht beobachtet. Die Diskussion der Beobachtungsreihe soll an die graphische Darstellung durch Fig. 10 angeknüpft werden. Sie zeigt eine zusammenhängende Kurve mit unstetigen Übergängen von den höchsten zu den tiefsten Tönen. Da diese ganz plötzlich und sehr deutlich erfolgen, so läßt sich daraus die Lage der Resonanzstellen genau entnehmen. Ihre Abstände betragen 55, 56, 54, 54 und 55 cm, sind also ziemlich gleich. Der nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete wahrscheinlichste Wert ist 54,7 cm. Es ergibt sich daraus als Eigenton der Zungenpfeife $p = 312$. Aus der absoluten Lage der ersten Resonanzstelle bei 49 cm kann man einen Schluß auf den Einfluß der Kanüle und des Verteilungsrohres ziehen und das Korrektionsglied der Röhrenlänge berechnen. Es ergibt sich zu 5,7 cm. Die Differenz zwischen den höchsten und tiefsten Tönen beträgt etwa einen Ton, ist also bedeutend kleiner als bei den Vorversuchen, wo sie eine Quarte bzw. eine Oktave betrug. Sie wird außerdem von einer Resonanzstelle zur andern kleiner, indem die höchsten Töne tiefer werden und die tiefsten höher. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zu den Beobachtungen Webers. Dort zeigten die tiefsten Töne ein anfangs sogar sehr schnelles Ansteigen,

während die höchsten Töne dieselben blieben. Ein weiterer Unterschied ist im Verlaufe der einzelnen Tonkurven zu bemerken. Während sie bei Weber anfangs nur wenig, dann aber schnell abnahmen, zeigen die neuen Kurven die stärkste Abnahme am Anfang und am Ende, während die Mitte die kleinste Änderung aufweist. Man kann meist einen deutlichen Wendepunkt der Kurve erkennen.

Wir wollen nun die Abweichungen der höchsten und tiefsten Töne von dem zu 312 berechneten Eigentone betrachten. Sie betragen für die höchsten Töne 11, 10, 9, 7, 3; für die tiefsten Töne 21, 17, 16, 15, 14 Schwingungen. Sie sind demnach nach unten durchschnittlich um 8 Schwingungen größer. Es scheint, als ob die obere Hälfte der Koppelungsschwingung nicht vollkommen ausgebildet ist. Deshalb soll zur *Berechnung des Koppelungskoeffizienten* stets die Schwingungszahl des tiefsten Tones benutzt werden, die übrigens auch genauer bestimmt werden konnte. Es ergeben sich für die Resonanzstellen der vorliegenden Versuchsreihe folgende Werte von $\varkappa$.

Tabelle 3.

Resonanzstelle . . .	1	2	3	4	5	6
Koppelungskoeffizient	0,130	0,106	0,100	0,094	0,088	0,082

Der Koppelungskoeffizient nimmt also mit länger werdenden Resonanzröhren ab; er ist für die Obertöne der Röhre kleiner als für den Grundton.

Die Versuchsreihe war bei Verkürzung der Röhren gemacht worden. Eine Wiederholung bei Verlängerung ergab fast dasselbe Resultat, jedoch erfolgten die Tonsprünge bei etwas größeren Längen der Röhren als vorher. Sie lagen bei 56, 112, 170, 222, 278 und 336 cm, also durchschnittlich um 10 cm nach außen verschoben. Diese bei enger Koppelung auftretende Verschiebung der Tonsprünge soll als „Ziehen" des Tones bezeichnet und unten näher besprochen werden.

Zur Durchführung desselben Versuches bei anderer Verbindung der Resonanzröhren mit dem Pfeifenkopf, also anderer Koppelung, wurden hierauf am Anfang des Ansatzrohres Korkringe eingesetzt, so daß nun noch weniger Luft hindurchströmen konnte. Es wurden unter sonst gleichen Bedingungen bei Verkürzung der Röhren 3 Versuchsreihen e_1, e_2 und e_3 angestellt, wobei sich bei e_1 der Kork mit der kleinsten Bohrung

im Ansatzrohr befand, die Koppelung also am losesten war; vgl. die Figg. 7—9.

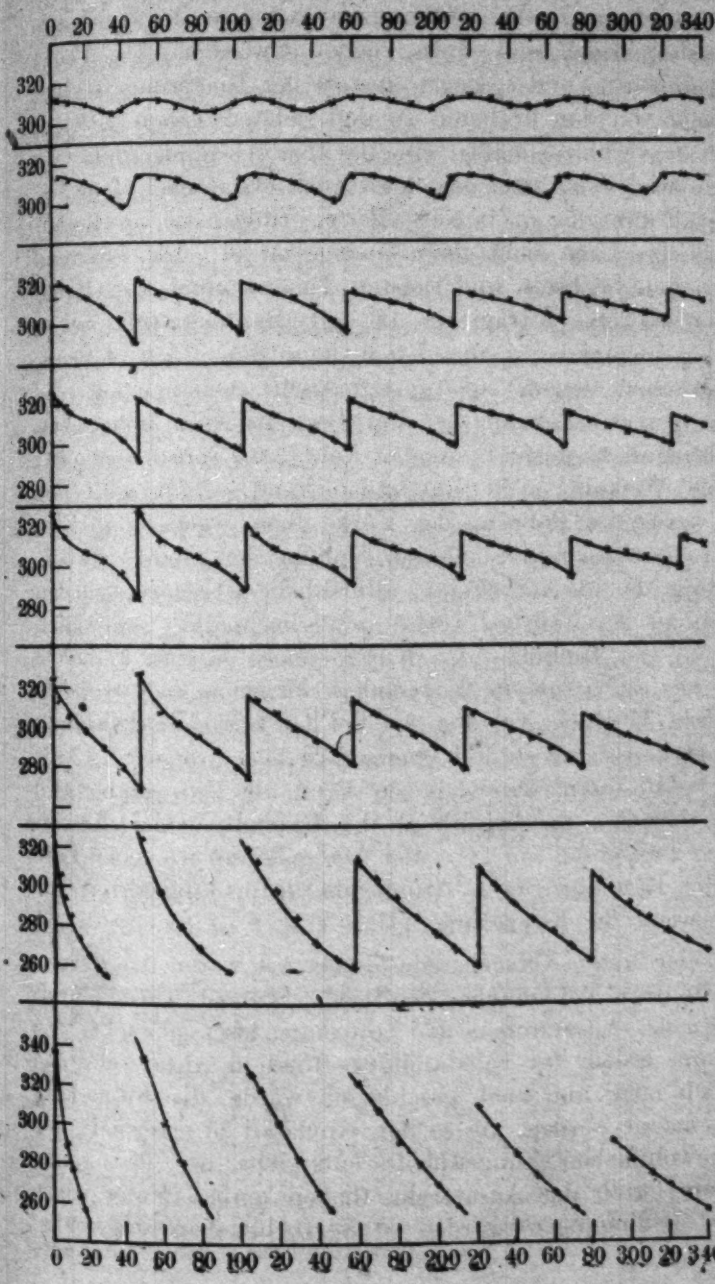


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Die Beobachtungsreihe e_3 zeigt fast dasselbe Bild wie e_4. Die Abstände der Resonanzstellen sind im Mittel dieselben, nur liegen sie alle ein wenig, etwa 1 cm, nach dem Anfang der Röhre verschoben. Die Differenzen zwischen den höchsten und tiefsten Tönen sind etwas kleiner geworden. Die Beobachtungsreihen e_1 und e_2 zeigen anstatt der Tonsprünge stetige Übergänge von den höchsten zu den tiefsten Tönen. Bei e_2 erfolgen sie verhältnismäßig schnell. Ihre Abstände sind etwa dieselben wie bei e_3, doch liegen sie noch etwas nach dem Anfang der Röhre zu verschoben. Bei e_1 erfolgen sie so allmählich, daß ihre Lage nicht genau anzugeben ist. Die Differenz zwischen den höchsten und tiefsten Tönen nimmt von Reihe zu Reihe ab. Sie beträgt für die erste Resonanzstelle bei e_3 31, bei e_2 16 und bei e_1 nur 7 Schwingungen. Diese 4 Beobachtungsreihen zeigen eine systematische Abhängigkeit der Tonhöhe von der Bohrung der Korkringe im Ansatzrohr. Von dem Grenzfall ausgehend, wo das Rohr ganz verschlossen ist, also eine Wirkung nicht stattfinden kann, erhält man mit größer werdender Bohrung der Korke einen wachsenden Einfluß des Resonanzrohres auf die Tonhöhe der Pfeife. Außerdem erfolgt der im Anfang ganz allmähliche Übergang von den höchsten zu den tiefsten Tönen immer schneller, schließlich als Sprung der Tonhöhe. *Die Kurven zeigen dasselbe Verhalten wie die weniger gedämpfte Koppelungsschwingung in den Zeichnungen von M. Wien*; vgl. Fig. 4. Bei den mit kleiner Öffnung des Korkringes angestellten Versuchsreihen, wo wenig Luft durch die Resonanzröhren fließen kann, die Koppelung also lose ist, herrscht im Augenblick der Entstehung der Schwingung die Dämpfung vor (I). Bei den anderen, wo mehr Luft durch die Resonanzröhren strömt, die Koppelung also enger ist, überwiegt die Koppelung (III).

Bei der ersten Versuchsreihe dieser Art waren Ansatzrohr und Seitenloch vollkommen geöffnet. Hierauf wurde durch Schließen des Ansatzrohres die Koppelung loser gemacht. Es sollte nun, indem bei vollständig geöffnetem Ansatzrohr das Seitenloch nach und nach geschlossen wurde, die Koppelung enger gemacht werden, um so den Grenzfall zu erreichen, der einer gewöhnlichen Zungenpfeife entspricht, wo der ganze Luftstrom durch das Ansatzrohr fließen muß. Unter sonst gleichen Bedingungen wurden 8 Versuchsreihen angestellt,

wobei das Seitenloch bei e_7 am kleinsten, die Koppelung also am engsten war. Vgl. Figg. 11—13.

Bei Verlängerung der Ansatzröhren ließen sich die Töne wieder ziehen. An Stellen, wo keine Tonsprünge stattfanden, sondern der Ton aussetzte, erfolgte entsprechend das Verlöschen und Wiedereinsetzen des Tones erst bei größeren Längen der Ansatzröhren als vorher.

Die Darstellung der Beobachtungsreihen ergibt für e_5 und e_6 ähnliche Kurven wie bei e_4. Doch ist die Einwirkung des Resonanzrohres auf die Tonhöhe der Zungenpfeife stärker geworden. Bei e_4 beträgt die Differenz der Schwingungszahlen an der ersten Resonanzstelle 33, bei e_5 beträgt sie 45 und bei e_6 sogar 60. Bei e_7 schließlich treten Absorptionserscheinungen auf, so daß an den beiden ersten Resonanzstellen überhaupt kein Ton entsteht. Wird die seitliche Öffnung nun völlig verschlossen (e_8), so erhält man den Fall, der bereits als Vorversuch ausgeführt wurde.[1]) Hierbei ist die Rückwirkung der Luftsäule so groß, daß an allen Resonanzstellen der Ton aussetzt. Die ersten Resonanzstellen weisen dabei besonders große Lücken auf.

Gleichzeitig sei darauf hingewiesen, daß in allen Versuchsreihen die Rückwirkung des resonierenden Systems mit länger werdenden Ansatzröhren abnimmt. Besonders zeigt sich dies durch die kleiner werdenden Tonsprünge. Hierin liegt auch der Grund, weshalb bei e_7 die beiden ersten Resonanzstellen ein Verlöschen des Tones bewirken, während bei den folgenden noch ein Ton entsteht, und weshalb bei e_8 die ersten Resonanzstellen besonders große Lücken aufweisen. Bei e_4 ist die Abnahme der Koppelung mit länger werdenden Röhren zahlenmäßig nachgewiesen worden.

Die *Lage der Resonanzstellen*, soweit sie sich genau angeben läßt, ist in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

Resonanzstelle	1	2	3	4	5	6
e_2	45	100	155	203	264	—
e_3	48	103	157	211	267	322
e_4	49	104	158	215	268	323
e_5	49	105	159	215	272	328
e_6	49	105	159	220	276	—

1) Die absolute Tonhöhe dieser Versuchsreihe darf nicht mit der der übrigen verglichen werden, da bei diesem Versuch das Verteilungsrohr noch nicht angebracht war.

Daraus ergibt sich, daß alle Resonanzstellen von e_2 bei kleineren Längen liegen, als die von e_3, diese wieder alle bei kleineren als die von e_4. Von den Resonanzstellen der Beobachtungsreihen e_5 und e_6 haben die ersten keine, die folgenden eine beträchtliche Verschiebung nach außen, ihre Abstände werden also größer. Tab. 5 enthält die Abstände der Resonanzstellen und deren wahrscheinlichsten Wert $\lambda/2$.

Tabelle 5.

Abstand	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	$\lambda/2$	p
e_2	55	55	54	55	—	54,7	312
e_3	55	54	54	56	55	54,7	312
e_4	56	54	54	56	55	54,7	312
e_5	56	54	56	57	56	55,8	306
e_6	56	54	56	61	—	56,4	303

Der Mittelwert der Abstände ist demnach bei den Reihen e_2 bis e_4 derselbe, während er bei den späteren größer wird. Dadurch wird der daraus ermittelte Eigenton p der Zungenpfeife bei diesen Versuchen etwas tiefer. Es sind dies die Beobachtungsreihen, bei denen wegen des teilweise geschlossenen Seitenloches weniger Luft durch die Pfeife strömen konnte. Bei geringerer Luftzufuhr wird aber, wie oben gezeigt wurde, der Ton der Zunge tiefer.

Auch hier zeigen die tiefsten Töne meist eine stärkere Abweichung vom Eigentone als die höchsten. Hierauf ist später noch zurückzukommen. Zur Berechnung der Koppelungskoeffizienten sollen daher wieder die tiefsten Töne benutzt werden. Wir finden für die ersten Resonanzstellen der Reihen e_1 bis e_6

0,04; 0,09; 0,13; 0,13; 0,15; 0,22.

Für e_1 lassen sich wegen des allmählichen Überganges in der Tonhöhe die Abstände nur ungefähr angeben. Bei Beobachtungen mit sehr enger Koppelung, wie e_7 und e_8, scheitert die Bestimmung von τ daran, daß der Ton an den Resonanzstellen aussetzt. Doch erkennt man schon aus den für e_1 bis e_6 berechneten Werten, daß die Rückwirkung der Resonanzröhren auf die Zunge abhängig ist von der Art ihrer Verbindung. *Es ist also durch die beschriebene Anordnung der Versuche gelungen, die Koppelung von Zunge und Resonator willkürlich zu ändern.*

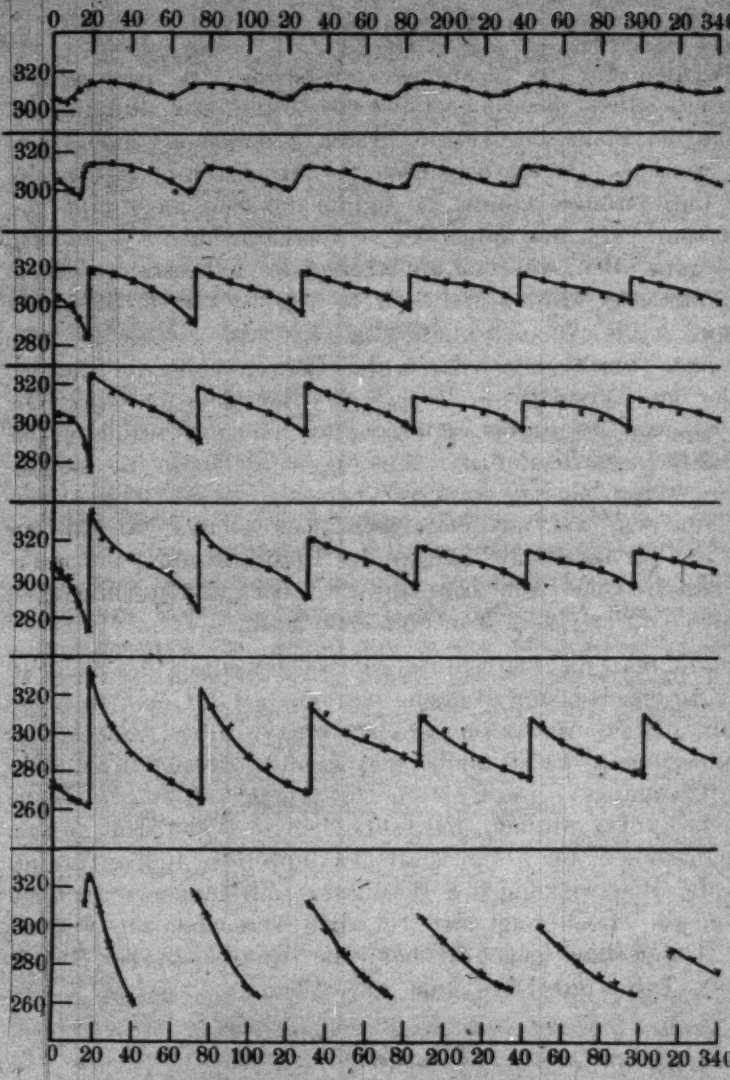
b) Gedeckte Röhren.

Wurden für die bisherigen Versuche als Resonatoren beiderseits offene Röhren benutzt, so sollten nun Röhren, die an dem der Pfeife abgekehrten Ende geschlossen sind, untersucht werden. Da hierbei durch die Ansatzröhren überhaupt keine Luft strömen konnte, so mußte das Seitenloch stets geöffnet sein. Bei den folgenden 3 Versuchsreihen eg_1 bis eg_3 war es ganz offen, während am Anfang des Ansatzrohres Korkringe eingesetzt wurden und zwar bei eg_1 der mit der kleinsten Bohrung. Die Versuchsanordnung war also, abgesehen von dem einen verschlossenen Ende der Röhren völlig die gleiche, wie bei den Versuchen e_1 bis e_3. Bei der nächsten Versuchsreihe eg_4 war sowohl das Seitenloch als auch die Mündung des Ansatzrohres ganz geöffnet. Bei eg_5 wurde dann das Seitenloch ein wenig, bei eg_6 stark verkleinert. Bei der letzten Versuchsreihe eg_7 war das Seitenloch noch kleiner, so daß die Pfeife nur für bestimmte Längen des Resonanzrohres ansprach. Man näherte sich dem Grenzfall, wo bei ganz geschlossener seitlicher Öffnung kein Ton entstehen kann.

Stellt man die Beobachtungsreihen graphisch dar Figg. 15 bis 21, so ergeben sich ähnliche Kurven, wie für die Versuche, die mit offenen Ansatzröhren ausgeführt wurden: Zuerst sind die Änderungen der Tonhöhe gering und erfolgen in allmählichen Übergängen. Dann treten Tonsprünge auf, die von Reihe zu Reihe größer werden, und schließlich setzt der Ton an den Resonanzstellen aus. Innerhalb der einzelnen Reihen nimmt dabei die Rückwirkung des Resonators mit länger werdenden Röhren ab. Doch zeigt sich bei allen Versuchen ein wesentlicher Unterschied gegen früher: die Resonanzstellen liegen anders. Tab. 6 gibt ihre Lage an.

Tabelle 6.

Resonanzstelle	1	2	3	4	5	6
eg_2	17	72	127	182	238	294
eg_3	18	72	127	182	238	295
eg_4	19	74	129	184	240	295
eg_5	19	74	131	186	242	298
eg_6	19	76	132	188	245	303



Bei den Versuchen eg_2 und eg_3 liegen sie fast gleich, während bei den folgenden, vor allem bei größeren Längen eine Verschiebung nach außen stattfindet. Wir wollen deshalb für die Versuche, bei denen sich die Resonanzstellen genau feststellen lassen (eg_2 bis eg_6) wieder eine Tabelle aufstellen, die die Abstände, ihren wahrscheinlichsten Wert und den Eigenton p enthält.

Tabelle 7.

Abstand	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	$\lambda/2$	p
eg_2	55	55	55	56	56	55,4	309
eg_3	54	55	55	56	57	55,4	309
eg_4	55	55	55	56	55	55,2	310
eg_5	55	57	55	56	56	55,8	306
eg_6	55	56	56	57	58	56,4	303

Der Mittelwert der Abstände ist also bei den letzten Reihen, wo die seitliche Öffnung des Verteilungsrohres teilweise geschlossen war und weniger Luft die Pfeife erregen konnte, größer und damit der Eigenton etwas tiefer.

Die Berechnung der Koppelungskoeffizienten ergibt für die erste Resonanzstelle der Versuche $eg_2 - eg_6$ folgende Werte:

0,08; 0,15; 0,20; 0,21; 0,25.

Für eg_1 ergibt sich der Näherungswert 0,03.

Auch hier hat der Koppelungskoeffizient infolge der Versuchsanordnung von Reihe zu Reihe zugenommen.

Wie schon oben erwähnt, liegen die Resonanzstellen bei gedeckten Röhren anders, sie sind gegen die bei offenen Röhren nach dem Pfeifenkopf zu verschoben. Entnimmt man aus den Tab. 4 und 6 die Größe dieser Verschiebung d, so ergeben sich als Mittelwerte der einzelnen Versuchsreihen folgende Zahlen:

Tabelle 8.

	d	d'	$\lambda/4$
eg_2	27,4	26,9	27,7
eg_3	29,0	28,5	27,7
eg_4	28,8	28,3	27,6
eg_5	29,3	28,8	27,9
eg_6	28,8	28,3	28,2

Von dieser Größe d ist die Korrektion für das eine offene Ende — gleich 0,5 cm — in Abzug zu bringen, da bei den letzten Versuchen die Röhren auf einer Seite gedeckt waren. Die korrigierten Werte d' stehen in Spalte 3. Vergleicht man sie mit den aus Tab. 7 entnommenen Angaben für $\lambda/4$, so findet man eine gute Übereinstimmung. *Die Resonanzstellen gedeckter Röhren liegen also gegen die offener Röhren um eine Viertelwellenlänge des Eigentones der Zungenpfeife verschoben, genau so wie es der Theorie entspricht.*

Alle 7 Versuche wurden auch bei Verlängerung der Ansatzröhren ausgeführt. Bei $e\,g_1$ und $e\,g_2$ ergab sich kein Unterschied, dagegen trat bei den übrigen wieder das Ziehen des Tones auf. Die Erscheinung war vollkommen dieselbe wie bei offenen Resonanzröhren.

c) Vergleich mit der Theorie.

Wir wollen nun noch die Tonhöhe der Koppelungsschwingung betrachten. Auf S. 258 ist ein Beispiel für $p = 312$, $\tau = 0{,}13$ und die Korrektion für die offenen Enden $\alpha + \beta = 6$ cm berechnet worden. Dies entspricht den Verhältnissen der ersten Versuchsreihe e_4, aber nur an der ersten Resonanzstelle, da der Koppelungskoeffizient für die folgenden abnimmt. Wir wollen den ersten Teil der berechneten Kurve mit dem entsprechenden Teil der Reihe e_4 vergleichen; vgl. Tab. 9.

Tabelle 9.

l	n_1	e_4	l	n_1	e_4
20	310	312	55	322	319
25	309	310	60	319	317
30	308	308	65	316	314
35	306	306	70	315	312
40	304	303	75	314	311
45	300	299			
49	291	291			
	332	323			

Dabei ergibt sich eine hinreichende *Übereinstimmung der berechneten und der beobachteten Schwingungszahlen* mit Ausnahme der höchsten Töne, für die die beobachteten Werte merklich kleiner sind als die berechneten. Es scheint, wie schon oben erwähnt, als ob der obere Teil der Koppelungskurve nicht voll ausgebildet ist, zumal da auch eine genauere Berechnung mit Benutzung quadratischer Glieder nicht genügt, die Differenz zu erklären. Eine Untersuchung aller Beobachtungen ergibt, daß im allgemeinen die Vertiefung an der Resonanzstelle größer ist als die Erhöhung. Eine Gesetzmäßigkeit läßt sich aber weder zwischen noch in den Reihen erkennen. Es finden sich sogar Stellen mit größerer Erhöhung. Vermutlich spielt dabei die Phase zwischen der Schwingung der Zunge und der Schwingung der Luft eine Rolle. Doch sind

für eine solche Untersuchung die Beobachtungen nicht genau genug, zumal an der Resonanzstelle die Schwingungszahl sich leicht ändert und schwer zu bestimmen ist.

Es bleibt nun noch eine Betrachtung der Tonhöhe für kleine Längen des Ansatzrohres, etwa von 0 bis $\lambda/4$. Nach der Theorie muß sich die Koppelungsschwingung bei Entfernung von der Resonanzstelle dem Eigenton des Systems 1 nähern. In Wirklichkeit trifft dies nur bei gedecktem Ansatzrohr zu. Bei offenem dagegen geht der Ton bei abnehmender Röhrenlänge durch den Eigenton der Zunge hindurch und gibt bei kurzem Ansatzrohr höhere Töne und zwar um so höher je größer die Bohrung des Korkes im Ansatzrohr wird. Ist kein Korkring mehr darin und das Seitenloch ganz offen, so gibt die Pfeife den höchsten Ton. Dieser wird wieder tiefer, wenn die seitliche Öffnung geschlossen wird. Hieraus und aus der Tatsache, daß bei gedecktem Rohr die Erscheinung überhaupt nicht auftritt, ersieht man, daß sie vermutlich auf die größere durch die Pfeife strömende Luftmenge zurückzuführen ist.

Schließlich ist noch einiges über das *Aussetzen des Tones* zu sagen, das trotz konstanten Anblasedruckes und gleicher Öffnung hinter der Kanüle bei bestimmten Längen des Ansatzrohres auftritt. Überblicken wir nochmals die Versuchsreihen. Bei e_6 entsteht der Ton für jedes beliebige Resonanzrohr, bei e_7 verlischt er an den beiden ersten, bei e_8 an allen Resonanzstellen. Da sich die Versuche nur durch den Grad der Koppelung unterscheiden, so ergibt sich, daß eine engere Koppelung das Verlöschen des Tones begünstigt. Der Anblasedruck ist dabei insofern von Einfluß, als er, worauf schon bei den Vorversuchen hingewiesen wurde, die Tonbereiche vergrößert. Z. B. entstand bei dem Versuch mit Zunge 8 zwischen 54 und 57 cm kein Ton. Steigerte man aber den Druck, so tönte die Pfeife und es fand ein Tonsprung statt. Viel mehr als durch Drucksteigerung kann man die Tonbereiche durch Ziehen des Tones vergrößern; doch hierüber erst später.

Die Erklärung ist etwa folgende: Bei dieser Art der Erzeugung ungedämpfter Schwingungen mit Rückkoppelung ist es notwendig, daß das System wenig gedämpft ist, da die Möglichkeit des Entstehens einer Schwingung von der Dämpfung

abhängig ist. Nun wird durch die Koppelung der wenig gedämpften Zunge mit der stark gedämpften Luftsäule die freie Koppelungsschwingung so stark gedämpft, daß unter Umständen keine Anregung der Schwingung erfolgt. Dies gilt besonders für die Umgebung der Resonanzstelle. Denn während die Dämpfung der Zunge durch die Koppelung bei stärkerer Verstimmung gering ist, nimmt sie im Resonanzfalle plötzlich stark zu. Die Zungenpfeife spricht daher nicht an. Je enger die Koppelung, desto breiter wird die Stelle, wo die Pfeife nicht tönt. Durch Steigerung des Anblasedruckes wird das Entstehen der Schwingung begünstigt.

Einfluß der Röhrenweite.

Um den Einfluß der Röhrenweite zu untersuchen, wurden auch Versuche mit sehr engen Röhren ($d = 6$ mm) und sehr weiten ($d = 44$ mm) angestellt. Bei sehr engen Röhren ergibt die graphische Darstellung (Fig. 22) dieselbe Art der Rückwirkung des Resonanzrohres auf die Zunge, wie sie die früheren

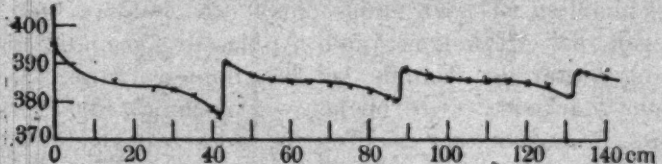


Fig. 22.

Beobachtungsreihen mit loser Koppelung zeigten. Die stärksten Änderungen der Tonhöhe, die schnell, aber noch stetig erfolgen, liegen bei 132, 88 und 43 cm. Daraus folgt als Eigenton der Pfeife 385,5. Es ergeben sich für die Koppelungskoeffizienten die Werte: 0,05; 0,03; 0,02. Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch hier bei sehr kurzem Ansatzrohr der Ton sehr hoch ist.

Versuche mit weiten Röhren ergaben ebenfalls genau die gleichen Erscheinungen wie die mit engen Röhren. Nur in einer Beziehung weichen sie von den Beobachtungen mit offenen engen Röhren ab: das ist *die absolute Lage der Resonanzstellen.* Früher lagen die Resonanzstellen aller Beobachtungsreihen etwa bei geraden Vielfachen der Viertelwellenlänge. Bei weiten Röhren liegen sie ganz anders. Wir wollen ihre Lagen für die erste Stelle jeder Versuchsreihe vergleichen; Tab. 10.

Tabelle 10.

Reihe	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
l	26	37	44	39	32

Die Resonanzstellen verschieben sich mit *loser* werdender Koppelung erst nach außen, dann nach innen. Da sich die Koppelung stets in demselben Sinne ändert, so muß ein anderer Grund für die Verschiebung der Resonanzstellen vorhanden sein. Vergleicht man ihre Lage mit den Wellenlängen des zugehörigen Eigentones, so liegt der Tonsprung in w_1 etwa bei ein Viertel der Wellenlänge ($\lambda/2 = 54$ cm), nähert sich aber bei w_3 schon der halben Wellenlänge. Tonsprünge, die bei ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge erfolgen, fanden wir schon bei gedeckten Ansatzröhren. Daß hier dieselbe Ursache vorliegt, zeigt folgende Überlegung. Der Querschnitt des Ansatzrohres beträgt 660 qmm, der der Kanüle 104 qmm. Nur an dieser kleinen Fläche hat also die Luft des Ansatzrohres Kommunikation mit der äußeren Luft. Wir müssen das Resonanzrohr bzw. Verteilungsrohr an der Stelle, wo es an die Kanüle angesetzt ist, als *teilweise gedeckt* ansehen. Wird aber das Seitenloch geöffnet, so findet auch durch dieses eine Kommunikation der Luft des Ansatzrohres mit der äußeren statt. Das Rohr nähert sich einem an beiden Enden offenen Rohr um so mehr, je größer die seitliche Öffnung wird. Dadurch verschiebt sich die Resonanzstelle nach außen in die Nähe der halben Wellenlänge. Sie wandert von 26 nach 37 und 44 cm. Warum rückt sie aber bei w_4 und w_5 wieder nach innen? Erinnern wir uns, daß bei diesen Versuchen, um eine losere Koppelung herzustellen, Korkringe am Anfang des Rohres eingesetzt waren, wodurch sich dieses wieder einem gedeckten Rohre näherte. Die Resonanzstelle muß also nach innen wandern, um so mehr, je kleiner die Bohrung im Korkring wird. Durch weitere Versuche wurde diese Erklärung bestätigt.

Durch diese Experimente klärt sich der auffallende Widerspruch in den Beobachtungen von Weber und Willis: Weber findet die Tonsprünge bei Vielfachen der halben, Willis bei ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge. Ein eingehender Vergleich der Versuchsanordnung ergibt, daß bei beiden die Windzuführung, Befestigung und Lage der Zunge einander vollkommen entsprachen und nur die Röhrenweite verschieden

war. Sie betrug bei Weber 9,8—12,4 mm, bei Willis 33 mm. Die von mir benutzten engen Röhren waren 11,5 mm weit und zeigten Tonsprünge bei Vielfachen der halben Wellenlänge wie bei Weber. Die weiten Röhren waren 29 mm weit und zeigten im Falle der engsten Koppelung Tonsprünge bei ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge wie bei Willis. Die engste Koppelung kommt allein zum Vergleich mit Versuchen früherer Autoren in Betracht, da diese seitliche Öffnungen hinter der Kanüle nicht benutzten.

Versuche mit Resonatoren.

a) Resonator mit veränderlicher Öffnung.

Statt der bisher benutzten zylindrischen Röhren sollten nun kubische Resonatoren mit der Zungenpfeife gekoppelt werden. Dazu wurde eine Kugel aus Zinkblech ($R = 40{,}6$ mm) benutzt mit einer Öffnung, die durch eine Irisblende beliebig verändert werden konnte, so daß der Eigenton des Resonators in ziemlich weiten Grenzen variabel war. Dieser Resonator wurde mit seiner Öffnung der Kanüle des Pfeifenkopfes in 1 mm Abstand gegenüber gestellt. Die Zungenpfeife wurde wieder mit dem konstanten Druck von 140 mm angeblasen und ihre Tonhöhe für verschiedene Öffnungen der Irisblende (Durchmesser d in mm) bestimmt.

Bei der graphischen Darstellung hatten wir bisher auf der Abszissenachse die zunehmenden Längen der Ansatzröhren aufgetragen, was einer Vertiefung des Tones entspricht. Analog müssen wir nun die abnehmenden Durchmesser der Irisblende auftragen. Wir erhalten (r_1 in Fig. 23) bei tiefer werdendem Resonator ein Sinken der Tonhöhe bis zu einem Minimum, dann einen raschen Anstieg bis über den Anfangswert hinaus und schließlich wieder eine langsame Abnahme der Tonhöhe. Die Kurve ist etwa dieselbe wie bei zylindrischen Röhren im Falle loser Koppelung. Bei Vergrößerung des Abstandes zwischen Resonator und Pfeifenkopf wurde die Änderung der Tonhöhe noch geringer. Wurden dagegen Resonator und Pfeifenkopf einander mehr genähert, so wurde der Austritt der Luft aus

Fig. 23.

der Kanüle gehindert. Daher war es mit dieser Anordnung nicht möglich, den Fall enger Koppelung zu untersuchen.

b) Resonator mit veränderlichem Volumen.

Deshalb wurden für die weiteren Versuche Resonatoren mit konstanter Öffnung benutzt, wobei die Tonhöhe durch Änderung des Volumens geändert wurde. Dabei mußte natürlich auf die Kugelform des Resonators verzichtet werden. Die Form des Hohlraumes ist aber, wie Sondhauss nachgewiesen hat, nicht wesentlich für die Tonhöhe.

Eine Chemikalienflasche, die etwa 90 mm innere Weite hatte, wurde durch eine dicke Metallplatte luftdicht verschlossen. Im Deckel befanden sich 2 runde Öffnungen: die eine war 160 qmm, die andere 113 qmm groß. Auf den Rand der letzten wurde ein kurzes Messingrohr gelötet, um damit den Resonator an den Pfeifenkopf fügen zu können. Zur Änderung des Volumens wurde durch den Deckel luftdicht ein Heberrohr mit Hahn geführt, durch das Wasser ein- und ausfließen konnte; Fig. 24.

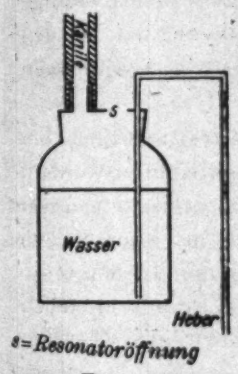


Fig. 24.

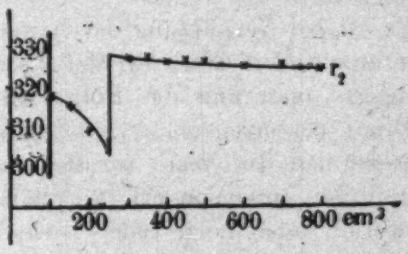


Fig. 25.

Zur Darstellung des Ergebnisses (Fig. 25) müssen auf der Abszissenachse zunehmende Volumina des Resonators aufgetragen werden. Der Verlauf der Erscheinung ist wieder der gleiche: Mit tiefer werdendem Eigenton des Resonators wird der Ton rasch tiefer, um an der Resonanzstelle plötzlich in einen hohen Ton umzuschlagen, der dann seinerseits allmählich tiefer wird. Eine genaue Durchrechnung ist hier nicht möglich, weil man die Eigentöne der Einzelsysteme nicht bestimmen kann. Eine angenäherte Berechnung ergibt, als Koppelungskoeffizienten 0,18.

Die Versuche r_1 (mit loser Koppelung) Fig. 28 und r_2 (mit fester Koppelung) Fig. 25 zeigen, daß *bei Verwendung kubischer Resonatoren dieselben Erscheinungen auftreten, wie sie bei zylindrischen Röhren beobachtet wurden.*

Da bei den kubischen Resonatoren die von Weber vermutete Ursache des Tonumschlagens — hoher Ton: offene Pfeife, tiefer Ton: gedeckte Pfeife — fortfällt, so beweist dies am besten die Unrichtigkeit der Weberschen Theorie und die Richtigkeit der Koppelungstheorie.

Das Ziehen des Tones.

Schon mehrfach wurde in den vorhergehenden Kapiteln darauf hingewiesen, daß bei Verlängerung der Ansatzröhren das Umschlagen des Tones nicht an derselben Stelle wie bei Verkürzung erfolgt, sondern später. Auf diese merkwürdige Erscheinung, die als „Ziehen des Tones" bezeichnet worden war, soll wegen ihrer Analogie zu elektrischen Erscheinungen kurz eingegangen werden.

Es sei bei Verkürzung der Ansatzröhren ein Sprung vom hohen zum tiefen Tone bei der Länge l beobachtet worden. Verlängerte man nun die Röhre allmählich und hielt dabei den Druck des erregenden Luftstromes möglichst konstant, so schlug der tiefe Ton nicht bei der Länge l in den vorher beobachteten Ton um, sondern er blieb über l hinaus bestehen und wurde dabei noch tiefer. Erst dann erfolgte das Umschlagen nach oben auf die Tonhöhe, die vorher bei dieser Röhrenlänge beobachtet worden war. Die so erzeugten Töne waren leise und schwankten in der Tonstärke. Sie schienen sogar auszusetzen. Auch erfolgte der Tonsprung nicht immer an genau derselben Stelle. Seine Lage war stark abhängig vom Luftdruck und von der Schnelligkeit, mit der man die Röhren verlängerte. Bei den Versuchsreihen mit loser Koppelung, wo der Übergang zwischen den höchsten und tiefsten Tönen allmählich erfolgte, war ein Ziehen des Tones nicht zu beobachten. An Resonanzstellen, wo der Ton aussetzte, äußerte sich die Erscheinung darin, daß der Ton, der bei Verkürzung der Röhren bei der Länge l eingesetzt hatte, bei Verlängerung erst bei einer größeren Länge verstummte.

Wir wollen in Tab. 11 die Beträge zusammenstellen, um die sich der Ton in den Versuchsreihen e_3 bis e_6 ziehen ließ.

Tabelle 11.

	e_3	e_4	e_5	e_6
1. Resonanzstelle	3	7	12	8
2. „	4	8	12	18
3. „	3	12	11	29
4. „	4	10	15	29
5. „	6	10	15	23
6. „	6	13	13	—
Mittelwert z	4,3	10	12,8	21,4 cm

Da der Tonsprung nicht immer an derselben Stelle erfolgte, so zeigen die Beträge des Ziehens ein unregelmäßiges Bild. An den Mittelwerten der einzelnen Versuchsreihen erkennt man aber deutlich, daß das Ziehen von e_3 bis e_6, d. h. mit enger werdender Koppelung zunimmt, vgl. die Figg. 26—29.

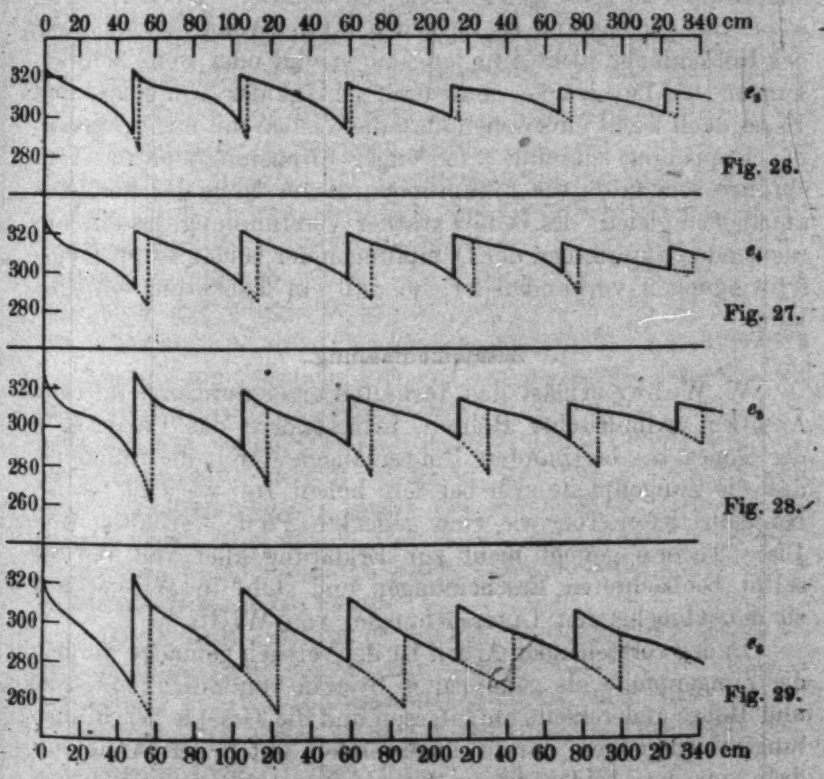


Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Dieselbe Berechnung ergibt für die Beobachtungen mit engen gedeckten Röhren:

Tabelle 12.

Reihe	eg_2	eg_4	eg_5	eg_8
x	5,3	9,8	9,2	19,8

mit weiten Röhren:

Tabelle 13.

Reihe	w_5	w_4	w_3	w_2
x	0,5	1,5	4,5	14

Auch hier *nimmt das Ziehen mit enger werdender Koppelung zu.* Die Erklärung des Vorganges ist etwa folgende: Die wirklich vorhandene Schwingung unterdrückt völlig die andere. Sie ist stabil und dauert auch noch an, wenn eigentlich die andere — beim Einsetzen als freie Schwingung — vorherrschend wäre. Dieser Zustand ist natürlich labil. Wenn die Änderung der Röhrenlänge nicht sehr langsam erfolgt oder wenn Schwankungen des Luftdruckes auftreten, schlägt der Ton sofort um. Es ist auch leicht einzusehen, daß das Ziehen mit enger werdender Koppelung zunimmt. Bei enger Koppelung sind die Tonsprünge sehr groß, die Dämpfungen in der Nähe der Resonanz annähernd gleich. Es bedarf starker Verstimmung, bis ein hinreichender Unterschied der Dämpfungen der beiden Koppelungsschwingungen vorhanden ist, so daß ein Tonsprung erfolgen kann.

Zusammenfassung.

W. Weber erklärt das Verhalten einer Zungenpfeife beim Ansetzen zylindrischer Röhren, insbesondere das Umspringen des Tones bei bestimmten Röhrenlängen durch die Annahme, daß die Zungenpfeife sich bei dem hohen Ton wie eine offene, bei dem tiefen Ton wie eine gedeckte Pfeife verhalten soll. Diese Theorie genügt nicht zur Erklärung aller von Weber selbst beobachteten Erscheinungen und steht in Widerspruch zu den eingehenden Untersuchungen von Willis.

In der vorstehenden Arbeit ist der Versuch gemacht worden, die Zungenpfeife als gekoppeltes System von Zunge einerseits und Röhre andererseits aufzufassen und die Gesetze der Koppelungsschwingungen darauf anzuwenden unter der Annahme, daß von den beiden freien Koppelungsschwingungen in der

Regel die weniger gedämpfte die „tonangebende“ ist. Indem der die Schwingungen unterhaltende Luftstrom durch die Zunge reguliert wird, entsteht so eine erzwungene Schwingung in der Periode der weniger gedämpften der beiden Koppelungsschwingungen. In der Umgebung der Resonanz von Zunge und Röhre, wo die Dämpfungen der beiden Koppelungsschwingungen merklich gleich sind, müssen bei enger Koppelung labile Zustände bezüglich der Tonhöhe auftreten. Die Theorie fordert daher folgenden Verlauf der Erscheinung: Ist die Röhre etwas zu hoch gestimmt, so wird der Ton der Zunge und damit der der Pfeife vertieft. Beim Überschreiten der Resonanz erfolgt eine mehr oder weniger plötzliche Erhöhung des Tones, der sich bei weiterer Verlängerung des Rohres dann wieder vertieft. Die Größe der Tonänderung und die Plötzlichkeit des Tonsprunges hängen von der mehr oder weniger engen Koppelung zwischen Zunge und Rohr ab. Bei noch weiterer Verlängerung der Röhren muß eine entsprechende Änderung der Tonhöhe an der Resonanzstelle zwischen Zunge und erstem Oberton der Röhre auftreten, und die Erscheinung sich dann für jeden weiteren Oberton im Abstande von $\lambda/2$ wiederholen.

Eingehende Versuche ergaben, daß die Tonhöhenänderung der Zungenpfeife genau der Theorie entspricht. Es gelang, durch einen Kunstgriff die Koppelung zwischen Rohr und Zunge willkürlich zu ändern, indem an dem Pfeifenkopf neben der Öffnung zu der Röhre noch eine zweite frei in die Luft mündende Öffnung angebracht wurde. Je größer diese Öffnung im Verhältnis zu der Röhrenöffnung gemacht wurde, um so loser war die Koppelung und um so kleiner und weniger steil der Tonsprung.

Außer mit offenen Röhren wurden auch Versuche mit gedeckten Röhren angestellt: Die Erscheinungen waren die gleichen, nur waren, wie zu erwarten, die Resonanzstellen um $\lambda/4$ verschoben. Durch Versuche mit sehr weiten und sehr engen Röhren wurden auch die scheinbaren Widersprüche zwischen den Ergebnissen von Weber und Willis aufgeklärt. Schließlich wurden auch an Kugelresonatoren die gleichen Tonhöhenänderungen beobachtet.

Das häufig auftretende völlige Aussetzen des Tones an der Resonanzstelle erklärt sich daraus, daß bei Resonanz die Dämpfung der Koppelungsschwingung so hoch wird, daß die Entstehung des Tones an der Resonanzstelle verhindert wird.

Bei loserer Koppelung spricht die Pfeife unter sonst gleichen Umständen wieder an. Die einmal vorhandene Schwingung hat eine gewisse Stabilität; dadurch gelingt es bei langsamer Verlängerung des Rohres, den vorhandenen tiefen Ton ein gewisses Stück über die Resonanzstelle hinaus zu „ziehen", bis dann plötzlich der Ton in den höheren umspringt. Ebenso umgekehrt bei Verkürzung des Rohres: Der hohe Ton läßt sich über die Resonanzstelle hinwegziehen. Dieses Ziehen ist um so mehr ausgebildet, je enger die Koppelung ist.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Univeristät Jena ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochgeschätzten Lehrer Hrn. Prof. Dr. M. Wien für die Anregung zu dieser Arbeit und das dauernde fördernde Interesse daran meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, Oktober 1919.

(Eingegangen 28. Oktober 1919.)

4. *Beiträge zur Kenntnis von Farbe und Polarisation des Himmelslichtes;* *von A. Gockel.*

1. Die Polarisation in Farben.

Messungen der atmosphärischen Polarisation für einzelne Farben und besonders für eng begrenzte Spektralbezirke liegen bis jetzt nur in sehr beschränktem Maße vor. Die meisten sind mit dem Cornuschen Polarimeter unter Vorschaltung von farbigen Gläsern ausgeführt worden. Auch meine eigenen hier zu besprechenden Messungen sind in dieser Weise vorgenommen worden, jedoch unter Benutzung des dem Cornuschen ähnlichen Martenschen Polarimeters und Ersatz der farbigen Gläser durch Wratton-Gelatinfilter, die nur eng begrenzte Spektralbezirke durchlassen, nämlich

α	= dunkelrot,	durchlassend λ	695—682
β	= rot	„	668—648
γ	= orange,	„	638—610
δ	= gelb,	„	607—582
ε	= grün,	„	561—520
η	= blau,	„	516—467
Θ	= violett,	„	470—432

α und Θ sind recht dunkel und die unter Vorschaltung dieser Filter ausgeführten Messungen erreichen nicht die Genauigkeit der anderen. Die Filter wurden zwischen Okular und Auge angebracht. Es wäre vielleicht bequemer gewesen, die Filter vor die dem Himmel zugewandte Öffnung des Instrumentes zu setzen, es zeigte sich aber, daß einige der Filter trotz ihrer geringen Schichtdicke das Himmelslicht nicht unbeträchtlich depolarisierten.

Nach einem von dieser Messungsart abweichenden Verfahren arbeiteten Nichols[1]) und Dorno.[2]) Sie setzten vor

1) L. Nichols, Phys. Rev. **26** S. 497. 1908.

2) C. Dorno, Veröff. des Preuß. Meteor. Instit. Nr. 303. Auszug Meteor. Zt. **36**. S. 109. 1919.

ihr Photometer ein Nicolsches Prisma, und bestimmten die Lichtstärke das eine Mal, wenn die kurze Diagonale desselben in der Hauptschwingungsrichtung des auffallenden Lichtes, das zweite Mal, wenn sie senkrecht dazu war. Der erste der genannten Forscher bediente sich dabei zur Lichtmessung eines Lummerschen Spektralphotometers, der zweite eines Weberschen Polarisationsphotometers, dem rote, grüne und blaue Farbfilter vorgeschaltet werden konnten. Nichols scheint dabei übersehen zu haben, daß die Menge des von dem Zerstreuungsprisma durchgelassenen Lichtes von der Lage der Polarisationsebene desselben abhängt. Da sich diese während der 1 bis 2 Stunden in Anspruch nehmenden Durchmessung des gesamten Spektrums beträchtlich ändern mußte, so glaubte ich es mindestens zum Teil der Nichtbeachtung dieses Umstandes zuschreiben zu dürfen, daß die Resultate von Nichols von denen anderer Forscher so wesentlich abweichen.

Das von Nichols und Dorno angewandte System der getrennten Messung der beiden senkrecht zueinander stehenden Schwingungskomponenten bietet gegenüber Messungen mit dem Cornuschen bzw. Martenschen Photometer den Vorteil, daß durch die Kenntnis der Helligkeit der einzelnen Komponenten die Erklärung der Erscheinung erleichtert wird, und daß auch die schwache Polarisation in der Nähe der Sonne gemessen werden kann. Andererseits aber wird sich nicht in Abrede stellen lassen, daß eine Größe im allgemeinen genauer gemessen werden kann, wenn sie direkt gemessen und nicht erst als Quotient zweier anderer notwendigerweise mit nicht unbeträchtlichen Messungsfehlern behafteten Größen bestimmt wird.

Diese Erwägung schien mir ausschlaggebend für die Messung der farbigen Polarisation, weil es hier auf die *Unterschiede* in den einzelnen Farben ankommt, die einzelnen Werte also, weil diese Unterschiede relativ klein sind, möglichst genau gemessen werden müssen. Ich suchte den Vorteil, den das Verfahren der beiden genannten Forscher bietet, dadurch zu erreichen, daß ich im Anschluß an die Polarisationsmessungen auch Helligkeitsmessungen mit einem Crovaschen Spektralphotometer vornahm.

Ein gelegentlicher Versuch dasselbe ebenfalls in der Art, wie es Nichols getan, zu verwenden, scheiterte, — auf welche

Möglichkeit übrigens schon Dember[1]) aufmerksam gemacht hat —, an der Schwierigkeit, das vorgesetzte Nicol so zu zentrieren, daß seine Drehachse streng mit der Achse des Spaltrohres zusammenfiel. Die beiden Schwingungskomponenten erschienen infolgedessen auch dann nicht gleich hell, wenn man unpolarisiertes Licht auf das Nicol fallen ließ. Aus den oben dargelegten Erwägungen verzichtete ich darauf, eine präzisere Vorrichtung anfertigen zu lassen. Da die Polarisation stets kleinen Schwankungen unterworfen ist, so wurde die Messung in der Weise ausgeführt, daß zwischen je zwei Messungen in Weiß 2 bis 3 Messungen in Farben ausgeführt wurden. Diese letzteren wurden dann mit dem arithmetischen Mittel der beiden Messungen in Weiß verglichen, wobei dieses = 100 gesetzt wurde. Natürlich wurde dafür gesorgt, daß während der ganzen Messungsreihe, die etwa eine halbe Stunde in Anspruch nahm, der anvisierte Punkt stets den gewünschten Abstand von der Sonne in Azimut und Höhe beibehielt. Am bequemsten war die Messung am Himmelspol, da der Abstand der Sonne von diesem Punkte als im Laufe eines Tages unveränderlich angesehen werden konnte, es brauchte dann während der Messungsreihe nur die Einstellung auf die mit dem Laufe der Sonne sich ändernde Polarisationsebene noch korrigiert zu werden. Außer an dem genannten Punkte wurde beobachtet im Sonnenvertikal und zwar in der Regel 90° von der Sonne, in dem zum Sonnenvertikal senkrechten Vertikal in verschiedenen Höhen und auf Parallelkreisen zur Sonne, also in derselben Höhe mit dieser, aber in wechselndem Abstand von ihr. Näher als 45° konnte nicht an die Sonne herangegangen werden, weil in größerer Nähe die Polarisationswerte schon so klein sind, daß die Unterschiede in den einzelnen Farben nicht mehr mit der genügenden Sicherheit festgestellt werden können.

Übereinstimmend mit Dorno fand ich in den Abständen von der Sonne, in denen ich beobachtete, wenn überhaupt ein Unterschied in den einzelnen Farben zu erkennen war, die Polarisation überwiegend im Blau. Eine stärkere Polarisation im Rot wurde nur zweimal beobachtet, obwohl ich häufig bei dunstigem Wetter in der Nähe des Horizontes und

1) H. Dember, Ber. der Sächs. Ges. der Wissensch. 69. S. 149. 1917.

auch bei teilweise bewölktem Himmel maß. Die Anwesenheit von Teilchen, die zwar noch klein gegenüber dem langwelligen Licht, aber schon groß gegenüber der Wellenlänge der blauen Strahlen sind, scheint mir daher nicht die Ursache des von anderen beobachteten Überwiegens der Polarisation im Blau zu sein. Daß in der Nähe der Sonne, wie Dorno beobachtete; die Polarisation im Rot überwiegt, erklärt sich nach meiner Ansicht leicht durch den Umstand, daß die sonnennahen Teile des Himmels nach der Rayleighschen Theorie direkt nur wenig blaues Licht zurücksenden können, daß das aus der Sonnennähe kommende blaue Licht also vorwiegend solches ist, das von einer anderen Himmelstelle dahin reflektiert wurde und daher infolge der erfahrenen zweimaligen Reflexion negativ polarisiert ist, also die positive Polarisation des aus der Nähe der Sonne stammenden Lichtes herabsetzt.

Wenn in der Nähe der Sonne die positive Polarisation im Rot überwiegt, so müssen auch die neutralen Punkte im Rot der Sonne näher liegen als im Blau. Für den Aragoschen Punkt hat dieses Jensen sowohl als Dember auch gefunden; für den schwerer zu beobachtenden Babinetschen Punkt scheinen keine Beobachtungen vorzuliegen; für den unterhalb der Sonne liegenden Brewsterschen kam dagegen Dember auf Teneriffa zu dem entgegengesetzten Resultat.

Zur Erklärung dieser Erscheinung weist der genannte Forscher darauf hin, daß das sekundär zerstreute, also negativ polarisierte Licht in den unteren Atmosphärenschichten im Blau stärker ausgelöscht wird als im Rot. Die sekundäre Polarisation ist unterhalb der Sonne also in dem Gebiet der langwelligen Strahlen größer als in dem der kurzwelligen, und der neutrale Punkt wird damit im Rot weiter von der Sonne weggeschoben als im Blau. Es scheint mir noch ein anderer Umstand mitzuwirken. Weiter unterhalb der Sonne, im Gebiet der positiven Polarisation, enthielt, worauf schon der merkwürdige Umstand des Vorhandenseins zweier neutraler Punkte hinweist, das Himmelslicht offenbar sehr viel neutrales, vom Meer her reflektiertes Licht. In diesem vom Horizont herstammendem Lichte muß natürlich wegen der stärkeren Auslöschung der kurzwelligen Strahlen das Rot erst recht überwiegen. Es ist also im Gebiet der positiven Polarisation dem Rot mehr neutrales Licht beigemengt als dem kurzwelligen

Licht, und auch aus diesem Grunde muß der neutrale Punkt im Blau der Sonne näher liegen als im Rot.

Mit dem verschiedenen Verhalten der neutralen Punkte ober- und unterhalb der Sonne bzw. ihres Gegenpunktes stehen auch die Resultate meiner spektralphotometrischen Messungen in guter Übereinstimmung. Geht man von der Sonne bzw. ihrem Gegenpunkt nach dem Zenit zu, so nimmt die Helligkeit ständig ab und der relative Gehalt an blauem Licht zu. Geht man dagegen von der Sonne nach dem Horizont zu, so nimmt auch zunächst die Helligkeit ab und die Blaufärbung zu, aber nur bis zu einer von der Sonnenhöhe abhängigen Entfernung, dann nimmt, wenn man sich weiter dem Horizonte nähert, die Helligkeit wieder zu und die Blaufärbung ab.

Die von Dember gegebene Erklärung des Heranrückens der neutralen Punkte im Blau an die Sonne läßt sich daher auf die oberhalb der Sonne bzw. ihres Gegenpunktes liegenden neutralen Punkte nicht anwenden.

In einer Atmosphäre, in der alle Teilchen klein sind gegenüber der Wellenlänge des Lichtes, müßte die Polarisation auch in größerer Entfernung von der Sonne für alle Wellenlängen die gleiche sein. Tatsächlich habe ich dieses Verhalten auch z. B. in der reinen Atmosphäre der nur mit wenigen menschlichen Wohnungen bevölkerten Göscheneralp (1760 m) an dem dunkelblauen wolkenlosen Himmel in 84° Abstand von der Sonne an einem Septembertage beobachtet. Aber auch in Freiburg waren öfters die Unterschiede der Polarisationen in den einzelnen Farben geringer als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, die bei hohen Polarisationswerten auf etwa 2 Proz. der beobachteten Größen, bei niederen aber relativ höher veranschlagt werden müssen. Auch Jensen fand bei den wenigen Messungen, die er unter Vorschaltung farbiger Gläser anstellte, keinen Unterschied zwischen der Einstellung im Rot und im Grün, und auch Hurion konnte nur geringe Differenzen feststellen, die in der Mehrzahl der Fälle, wie es auch bei meinen Beobachtungen der Fall war, dahin gingen, daß die Polarisation im Blau etwas größer war als die im Rot. Nun ist allerdings zu beachten, daß die von den beiden Forschern angewandten Gläser viel weniger monochromatisch waren als die von mir angewandten Wratton-Filter. Cornu

fand bei Vorschaltung eines kobaltblauen Glases höhere Werte der Polarisation als bei Vorschaltung eines roten Glases.

Bei Ausschaltung der Tage mit dunstigem Wetter oder beginnender Bewölkung fand ich in Freiburg folgende Mittelwerte:

Filter	0 (weiß)	α (rot)	β	γ	δ	ε	η	Θ (violett)
	100	96	96	97	98	98	101	102

Auf der Göscheneralp erhielt ich im Mittel der über drei vollkommen klare Tage sich erstreckenden Beobachtungen:

Filter	0 (weiß)	α (rot)	β	γ	δ	ε	η	Θ (violett)
	100	97	100	100	98	100	100	102

Abgesehen von einigen noch besonders zu besprechenden Fällen sank auch in Freiburg der Anteil der Polarisation im Rot nicht unter 95 Proz. und stieg der im Violett nicht über 105.

Pernter fand in Wien an dem von ihm als erträglich blau bezeichneten Himmel im Mittel, wobei ich eine Messung an einem 49° von der Sonne entfernten Punkt unberücksichtigt ließ,

Weiß	Rot	Grün	Blau
100	90	106	100

und bei stark weißlichem Himmel:

Weiß	Rot	Grün	Blau
100	111	99	90

Die Unterschiede in den einzelnen Farben sind also an dem offenbar immer stark schmutzigen Himmel der Großstadt im Mittel beträchtlich größer als in Freiburg.

Dorno in Davos, der unter Vorschaltung farbiger Gläser die Polarisation in Rot und Grün, und zeitweise auch in Blau maß, hat in größerer Entfernung von der Sonne ähnliche Werte erhalten wie ich.

Einen Einfluß der Himmelsstelle, abgesehen von dem bereits erwähnten der Sonnenentfernung oder der Jahres- und Tageszeiten auf die Unterschiede der Polarisation in den einzelnen Farben festzustellen, war mir bei der Kleinheit dieser Unterschiede nicht möglich, während es nach den von Dorno[1]) mitgeteilten Zahlen scheint, als ob diese Unterschiede in Hori-

1) C. Dorno, a. a. O., Tab. 35.

zontnähe in der Regel größer seien als in größeren Höhen. Deutlich ergibt sich dagegen, wie schon aus dem bis jetzt Gesagten hervorgeht, aus meinen Beobachtungen der Einfluß der Lufttrübung. Der größte Unterschied zwischen Polarisation in Violett und Rot wurde erhalten, wenn dichter Dunst die Gegend bedeckte, oder in der kalten Jahreszeit unmittelbar nach dem Auflösen des Vormittagsnebels.

So wurde z. B. am 22. XI. 1918 Nachmittags 3^{30} bei dichter Dunstschicht am Horizont beobachtet

Filter	α	β	γ	δ	ε	η	Θ
	87	91	89	97	115	116	134,

in einer leichten Dunstschicht und wie eben in einer Höhe von 10^0 und 90^0 vom Sonnenvertikal am 6. VIII. 1919

Filter	α	γ	ε	Θ
	90	92	94	113.

Daß eine Trübung in der Atmosphäre die Unterschiede in der farbigen Polarisation erhöht, steht in gutem Einklang mit den Ergebnissen der Laboratoriumsversuche.

v. Hauer[1]) fand, daß Zusatz von Stärkekörnchen (Korndurchmesser 8—40 μ) zu seiner Mastixlösung erstens die Polarisation herabsetzte und zweitens ihr Maximum in das Blau verschob. Ähnlich wirkten Kreidezusatz und ebenso durch einen kräftigen Luftstrom erzeugte Luftbläschen.[2])

In einer schwach getrübten Atmosphäre muß das Überwiegen der Polarisation in Blau gegenüber der in Rot noch schärfer ausgeprägt sein, als in einer mit einfarbigem Licht beleuchteten trüben Lösung; denn es kommt hinzu, daß das blaue Licht erst durch die notwendig mit Polarisation verbundene Zerstreuung an kleinsten Teilchen entsteht, während in dem an gröberen Teilchen diffus reflektierten und daher nicht polarisierten Licht Rot überwiegt. In diesem Punkte stimme ich mit Nichols überein, der auch darauf hinweist, daß die größten Teilchen unpolarisiertes (vielleicht besser gesagt schwach polarisiertes) Licht reflektieren, dessen Intensität gegenüber dem an sehr kleinen Teilchen reflektierten im Rot

1) F. v. Hauer, Ann. d. Phys. 57. S. 145. 1918.

2) Die das Maximum in das Blau und nicht, wie es a. a. O., S. 155, unterste Zeile infolge eines Druckfehlers heißt, in das Rot verschieben.

größer ist als im Blau. Das an weißlichem Himmel beobachtete Maximum der Polarisation im Rot erklärt Pernter — und Nichols schließt sich ihm an — durch die Anwesenheit von Teilchen, deren Durchmesser groß gegenüber der Wellenlänge des kurzwelligen aber nicht mehr gegenüber der des roten Lichtes ist. Diese Auffassung scheint mir aus verschiedenen Gründen unhaltbar. Erstens sind die Durchmesser der in der Atmosphäre in Betracht kommenden Teilchen, nämlich der ersten Kondensationsprodukte, groß auch gegenüber der Wellenlänge des roten Lichtes (vgl. die Zusammenstellung in dem Lehrbuch von v. Hann, wo als kleinste Durchmesser 6 μ, von den meisten Beobachtern weit größere angegeben sind), zweitens gilt das Rayleighsche Gesetz doch nur für Teilchen, die klein gegenüber der Wellenlänge des Lichtes und nicht für solche, deren Durchmesser schon von der Größenordnung dieser Wellenlänge sind; an solchen findet, wie Untersuchungen von H. Wyrsch in meinem Laboratorium beweisen, die Reflexion nach den gewöhnlichen Gesetzen statt. Nichols will die Perntersche Erklärung auch auf das von ihm gefundene Maximum der Polarisation im Grün anwenden, dagegen hat schon v. Hauer (a. a. O.) eingewendet, daß die Wellenlängen des grünen und blauen Lichtes gar nicht so sehr verschieden sind. Ich vermute, daß das von Nichols gefundene Maximum im Grün, von anderen möglichen Fehlerquellen abgesehen, ihm nur dadurch vorgetäuscht wurde, daß sich die Polarisation während der langen Dauer seiner Messung erheblich änderte. Pernter hat auch in 90° Entfernung von der Sonne im Sonnenvertikal wiederholt das Maximum der Polarisation im Rot beobachtet. Die Reihe, welche die extremsten Werte lieferte, ist folgende:

weiß	rot	grün	blau
100	132	103	75

Ich selbst habe ein Maximum der Polarisation im Rot nur dreimal und zwar jedesmal bei stark dunstigem Wetter an einem schmutzig blauen, sich 1—2 Stunden nach der Beobachtung teilweise mit Cu oder Ci bedeckendem Himmel beobachtet. An einem solchen Himmel findet aber überhaupt keine Diffraktion nach Rayleigh statt. Was von blauem Licht hier reflektiert wird, stammt vorwiegend von anderen Himmelsstellen und ist daher durch sekundäre Zerstreuung depolarisiert.

Auch wird von diesem Licht, das auch von einer weit über der Dunstschicht liegenden Himmelsstelle herrühren kann, auf seinem Weg durch die Atmosphäre mehr blaues als rotes Licht absorbiert, so daß sich dem in der Dunstschicht reflektierten, schwach polarisierten Licht mehr polarisiertes rotes als blaues hinzuaddiert.

Ähnliche Verhältnisse wie hier in der Atmosphäre müssen auch bei den Versuchen Bocks[1]) im Dampfstrahl vorgelegen haben, weil das rote Licht polarisiert, das blaue aber unpolarisiert gefunden wurde. Teilchen von 0,9 μ Durchmesser müssen, wie Pernter schon hervorgehoben hat, nach den gewöhnlichen Gesetzen reflektieren. Die starke Polarisation hat offenbar nicht an den Wassertröpfchen, sondern an den Dampfmolekülen stattgefunden. Das polarisierte blaue Licht, das am stärksten zerstreut wird, wird offenbar, wie es auch in den von v. Hauer untersuchten stark konzentrierten Mastixlösungen der Fall war, durch die sekundäre Zerstreuung stärker depolarisiert als das rote. Immerhin scheinen mir einige der Bockschen Resultate noch einer Aufklärung durch weitere Versuche bedürftig, die eine reinlichere Scheidung der einzelnen hier im Spiele befindlichen Faktoren ermöglichen.

Recht gut mit meinen Resultaten stimmen die Piltschikoffs[2]) überein. Auch er fand bei Vorschaltung von Rubin- und Kobaltgläsern vor das Cornusche Polarimeter, an dem 90° von der Sonne im Sonnenvertikal gelegenen Punkte, den größeren Wert der Polarisation im Blau und zwar ist die gefundene Differenz um so größer, je kleiner die Polarisation, d. h. je trüber die Atmosphäre ist.

Ob bei der Mannigfaltigkeit der bei der Erklärung der Erscheinung in Betracht zu ziehenden Faktoren Untersuchungen über die Unterschiede der Polarisation in den einzelnen Werten zurzeit der hohe Wert zukommt, den Jensen ihnen beilegen will, scheint mir zweifelhaft. Auf jeden Fall sollten solche Untersuchungen mit Messungen der Helligkeit der einzelnen Farben verbunden sein. Über die Resultate meiner eigenen einschlägigen spektralphotometrischen Messungen gedenke ich in einem folgenden Aufsatz zu berichten.

---

1) A. Bock, Wied. Ann. **68**. S. 674. 1899.
2) N. Piltschikoff, Compt. rend. **115**. S. 555. 1892.

Zusammenfassung.

1. In einer reinen Atmosphäre sind die Unterschiede der Polarisation in den einzelnen Farben kleiner als die Beobachtungsfehler.

2. Mit zunehmender Trübung wächst die Polarisation in kurzwelligem Licht gegenüber der in langwelligem. Das Maximum liegt im Violett, das Minimum im Rot.

3. An Himmelsstellen, an denen durch Diffraktion kein oder wenig Blau entstehen kann, also in der Nähe der Sonne und in einer Dunstschicht, überwiegt die Polarisation im langwelligen Teil des Spektrums.

Freiburg, Schweiz. November 1919.

(Eingegangen 18. November 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Induktorium Patent Klingelfuss mit eingebautem Meßapparat und eingeschalteten Sicherungen und Milliamperemeter. Beide Instrumente sind spannungslos gegen Erde und können in beliebiger Entfernung vom Induktorium und der Röntgenröhre aufgestellt werden.

FR. KLINGELFUSS & CO., BASEL

Gute Bücher — gute Freunde!

Dr. H. Geissler Nachf., Bonn a. Rh.

Gegründet 1860 Inh. Franz Greiner Gegründet 1860

Telegramm-Adresse: Geissler Bonn. Fernruf 704

Fabrik und Lager chemisch-physikalischer Apparate

Quecksilberluftpumpen n. Geissler, Töpler-Hagen, Bollwood, Jaumann. Quecksilberbogenlampen. Vakuumgefäße für flüssige Luft. Vorlesungsapparate n. Hoffmann, Pyzarello. Vakuumröhren nach Geissler, Crookes, Puluj, Lenard, Hittorf usw. Spektralröhren. Braunsche Röhren.

Einrichtung vollständiger Laboratorien für Schulen und Universitäten.

Kataloge auf Verlangen. Kostenanschläge gratis.

1920. № 12.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Über die Dispersion von Wasser und Äthylalkohol zwischen 7 und 35 mm Wellenlänge und Vorversuche zur Verwendung noch kürzerer elektrischer Wellen;*

von Willy Möbius.

(Leipziger Habilitationsschrift.)

Inhaltsübersicht: 1. Einleitung. — 2. Versuchsanordnung. — 3. Sendereinrichtung. — 4. Empfängereinrichtung. — 5. Wellenlänge. — 6. Die übergelagerten kleinen Wellen. — 7. Absorption. — 8. Reflexion. — 9. Brechung. — 10. Ergebnisse der Dispersionsuntersuchung. — 11. Zusammenfassung.

1. *Einleitung.* Die vorliegenden Untersuchungen wurden noch vor dem Kriege durchgeführt, Ende 1914 aber infolge Eintritts ins Heer abgebrochen. Sie wurden begonnen in der Absicht, elektrische Schwingungen von sehr kleiner Wellenlänge, zwischen 4 mm und 0,3 mm, zu erzeugen und die Dispersion des Wassers und Äthylalkohols in diesem Gebiete zu untersuchen. 0,3 mm war die obere Grenze des von Rubens[1]) erforschten ultraroten Spektrums, 4 mm die untere Grenze der Lampaschen Messungen[2]), der kürzesten damals bekannten elektrischen Wellen. Auch Lebedew[3]) berichtet über Erzeugung kleiner Wellen von 6 mm Länge, hat aber Wasser und Alkohol nicht untersucht. Nach Angabe Liebreichs[4]) hat O. von Baeyer Wellen von 2 mm Länge hergestellt. Außer dieser Bemerkung war aber in der Literatur nichts hierüber zu finden.

Das Brechungsverhältnis des Wassers war im Rubensschen Gebiete noch nicht viel größer als im sichtbaren Spek-

1) H. Rubens und O. von Baeyer, Sitzungsber. d. preuß. Akademie. 1911. S. 339 u. 666.

2) Anton Lampa, Wiener Ber. 105. S. 587 u. 1040. 1896.

3) Peter Lebedew, Wied. Ann. 56. S. 1. 1895.

4) Erik Liebreich, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 12. S. 205. 1915.

trum. Lampa fand Werte in der Nähe der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante. Der gesuchte Absorptionsstreifen des Wassers im Gebiete kurzer elektrischer Wellen war also zunächst zwischen $\lambda = 4$ mm und $\lambda = 0{,}3$ mm zu erwarten. Später ist noch eine Arbeit von Eckert[1]) erschienen, der die Dispersion von Wasser und Alkoholen für die Wellenlängen 88, 57, 37 und 17,5 mm untersuchte. Er fand in der Richtung von großen nach kleinen Wellen für Wasser zunehmende Absorption und abnehmendes Brechungsverhältnis und nimmt an[2]), daß sich in der Nähe seiner kleinsten Welle ein Absorptionsstreifen befindet und jenseits davon das Brechungsverhältnis wieder ansteigt zu den hohen Lampaschen Werten.

Schon die ersten Versuche, unter Anlehnung an Lebedew[3]) und Lampa mit so kleinen Wellen zu arbeiten, zeigten, daß dies erhebliche Schwierigkeiten bietet. Mit abnehmender Größe der Sender nimmt die Stärke der erzeugten Schwingungen rasch ab. Ferner sind sehr kleine Sender schwer herzustellen und nutzen sich rasch ab. Auch die Notwendigkeit, sie zu einem großen Teile ihrer Länge in ein Dielektrikum als Träger einzubetten, ist der Erreichung kleiner Wellenlängen hinderlich. Wird dieses zu dünn gewählt, so wird es oft glatt durchschlagen. Dazu kam, daß die ersten, nach Lebedews Angaben hergestellten Sender nicht die von diesem gefundene kleine Wellenlänge ergaben, sondern eine erheblich größere, der berechneten (vgl. S. 301) Grundschwingung entsprechende.

Es wurde daher allmählich zu immer größeren Wellenlängen übergegangen, um so mehr, als das Erscheinen der erwähnten Eckertschen Arbeit auf die Wahrscheinlichkeit eines Absorptionsstreifens zwischen 4 und 37 mm Wellenlänge hindeutete. So ist das bisher vorliegende Ergebnis im wesentlichen eine Untersuchung der Dispersion von Wasser und Äthylalkohol für Wellen von 7 bis 35 mm Länge geworden. Zwischen diesen Grenzen wurden so viele Wellenlängen untersucht, daß ein vorhandener Absorptionsstreifen nicht mehr entgehen konnte. Bei dem allmählichen Übergang zu größeren

1) Fritz Eckert, Über anomale Dispersion im Gebiete kurzer elektrischer Wellen. Berliner Dissertation 1913. Die Arbeit enthält auch einschlägige Literaturangaben.

2) Fritz Eckert, a. a. O. S. 27.

3) Peter Lebedew, a. a. O.

Wellen wurde die optische Einrichtung, die für sehr kleine Wellenlängen gebaut war und daher auch nur kleine Spiegel und Gefäße für Absorption und Reflexion und kleine Entfernungen zwischen den einzelnen Apparaten vorgesehen hatte, beibehalten. Es ist daher beabsichtigt, die Versuche noch einmal mit einer, den größeren Wellen mehr angemessenen Anordnung zu wiederholen.

Da es wenig aussichtsvoll erschien, die Erzeugung noch kleinerer Wellen auf die Verwendung der Grundschwingung kleiner Sender aufzubauen, mußten andere Wege dafür gesucht werden. Eine Anzahl von Interferenzkurven, die zur Bestimmung der Wellenlänge dienten, zeigten übergelagerte Schwingungen bis herab zu einigen Zehntel Millimetern. In einigen Fällen konnten die größeren von ihnen auch schon isoliert werden. Aber die Energie war so gering, daß mit den vorhandenen Mitteln an zuverlässige Dispersionsmessungen nicht gedacht werden konnte.

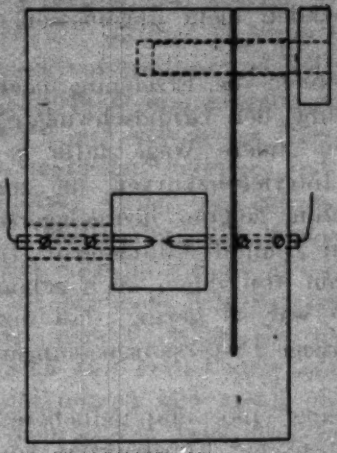
Daher wurde zwecks Herstellung eines empfindlicheren Meßgeräts ein Galvanometer Paschenscher Konstruktion von höchster Empfindlichkeit in Auftrag gegeben. Dieses ist infolge Ausbruchs des Krieges nicht fertig geworden und harrt auch heute noch der Vollendung. Deshalb sollen die bisher vorliegenden Ergebnisse trotz der ihnen noch anhaftenden Unvollkommenheiten veröffentlicht werden, unter Vorbehalt späterer Nachprüfung und weiterer Ausarbeitung.

2. *Versuchsanordnung.* Es wurde mit Luftwellen die Dispersion von destilliertem Wasser und wasserfreiem Äthylalkohol untersucht, und zwar einerseits aus der an den Flüssigkeitsoberflächen reflektierten Menge, andererseits aus der Ablenkung durch Prismen, unter Berücksichtigung der Absorption. Die Sender waren horizontal gelagert, die Sendereinrichtung wurde fest aufgestellt. Die übrigen Apparate (außer den Flüssigkeitsträgern) wurden auf einer aus einem hochkant gestellten Glasstreifen bestehenden optischen Bank angebracht, die an einem Teilkreis mit horizontaler Achse befestigt war. Daher war die Schwingungsrichtung der Wellen stets senkrecht zur Einfallsebene.

3. *Sendereinrichtung.* Die Sender bestanden aus je zwei Platinstäbchen, die, wie bei Lebedew[1]), in Glasröhrchen ein-

1) Peter Lebedew, a. a. O. S. 2.

geschmolzen waren. Das eine der beiden Röhrchen war zwecks genauerer Justierung mit Siegellack in zwei Hartgummibacken befestigt. Beide Stäbchen waren in einem Vulkanfiberblock festgeschraubt (Fig. 1, vgl. auch Fig. 6, S. 308). Dieser war in der Längsrichtung geschlitzt, und die beiden Hälften konnten zwecks Regulierung des wirksamen Funkens mikrometrisch gegeneinander verstellt werden. In einem Durchbruch des Blockes saß hinter den freien Enden der Glasröhrchen ein Parabelspiegel. Der Block wurde in einen Trog getaucht, der auf der Vorderseite durch eine Glimmermembran verschlossen und mit Petroleum gefüllt war. Außer der Länge und Dicke der Platinstäbchen wurde zwecks Berechnung der Wellenlänge auch die Dicke der Einschmelzstelle bestimmt. Die Stromzuführung geschah beiderseits durch Luftfunken von 1 bis 2 mm Länge. Als Stromerzeuger diente ein mit 6 Volt betriebenes Induktorium für 4 cm Funkenlänge unter Vorschaltung einer kleinen Leidener Flasche und eines Wasserwiderstandes.



Senderträger $^1/_6$ natürl. Gr.

Fig. 1.

Zur Fernhaltung der Induktoriumsschwingungen vom Empfänger wurde die ganze Sendereinrichtung samt den Akkumulatoren in einen Metallkasten eingeschlossen, dessen Deckel mit Quecksilber abgedichtet war. Es war nämlich festgestellt worden, daß die störenden Wellen selbst durch eine schmale Spalte am Deckel oder sogar entlang der Zuleitung des Gleichstromes bei Benutzung einer Institutsbatterie herausgelangen konnten. Eine Öffnung von 3×8 cm gestattete den Austritt der zu untersuchenden Wellen. Von den störenden großen Wellen ließ sie nur wenig durch und dieser Rest konnte noch durch ein Gitter aus Kupferdrähten von 4 mm Maschenweite abgeschirmt werden. Wellen von etwa 12 mm Wellenlänge wurden von dem Gitter nur wenig geschwächt. Ein Gitter von 2 mm Maschenweite hingegen ließ auch von

diesen nicht mehr viel durch. Es wurde daher bei den meisten Messungen das 4 mm-Gitter vorgeschaltet.

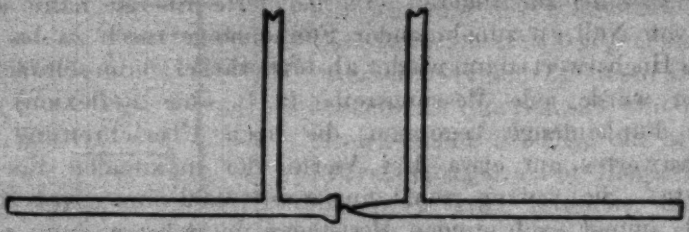
Die Platinstäbchen der Sender nutzten sich stark ab, bis zu einigen Zehntel Millimetern bei einer vollständigen Messungsreihe (Absorption, Reflexion, Brechung, Wellenlänge). Dadurch vergrößerte sich die Länge des Hauptfunkens von einer Messung zur anderen. Die gelieferte Energie nahm aber mit von Null an zunehmender Funkenlänge rasch zu bis auf einen Höchstwert, dann wieder ab, erst stärker, dann schwächer. Daher wurde jede Messungsreihe (z. B. eine Reflexion) mit einer Funkenlänge begonnen, die nach Überschreitung des Höchstwertes nur etwa drei Viertel der maximalen Energie lieferte. Sie betrug schätzungsweise 0,02 mm. Außerdem wurde immer nach einigen Messungen die Ausgangslage, z. B. Abstand Null der Boltzmannschen Spiegel bei der Wellenlängenmessung, wiederhergestellt, aus diesen Bezugspunkten eine Kurve gezeichnet und jede Messung auf diese Kurve bezogen. Die Anwendung der Bezugskurven ist aus S. 309 ff. zu ersehen. Wenn gelegentlich die Platinstäbchen der Sender so weit abgenutzt waren, daß die Planflächen an den Enden ausgefressen waren und kein kleiner Funke mehr zustande kam, wurden die Flächen wieder plan geschliffen. Dadurch wurde natürlich die Wellenlänge im Verlaufe einer vollständigen Messungsreihe um einige Prozente kleiner.

4. *Empfängereinrichtung.* Um nicht für jede gewünschte Wellenlänge einen neuen Empfänger bauen zu müssen — was erheblich schwieriger war als der Bau neuer Sender — und doch die Wellenlänge wenigstens annäherungsweise vorausbestimmen zu können, wurde mit sehr langem und stark gedämpftem Empfänger gearbeitet, wie dies schon von anderer Seite mehrfach geschehen ist.[1]) Dadurch verringert sich allerdings die im Empfänger auftretende Energie. Aber für größere Wellen, wie sie hier verwendet wurden, reicht sie auch so noch aus und für kleinere würde der Bau resonierender Empfänger immer schwieriger werden. Außerdem hat man

1) Karl F. Lindman, Ann. d. Phys. **38**. S. 523. 1912. — W. L. Severinghaus und W. S. Nelms, Phys. Rev. (II) **1**. S. 411 u. 429. 1913. — James E. Ives, Phys. Rev. **30**. S. 199. 1910 und **31**. S. 185. 1910 arbeiteten ebenfalls mit nicht resonierendem Empfänger.

noch den Vorteil, leicht Oberschwingungen des Senders zu bekommen, was für weitere Verkleinerung der Wellenlänge von großer Bedeutung werden dürfte (vgl. S. 305).

Bei den in Tab. 4 (S. 316) eingetragenen Messungen wurden zwei Empfänger verwendet, ein linearer von 14 mm Länge und 0,3 mm Dicke (Fig. 2) und ein kreisförmiger,



Linearer Empfänger, 6fache natürl. Gr.
Fig. 2.

hinten offener, von 170 mm Länge (Kreisdurchmesser 54 mm) und 0,5 mm Dicke, zu den Vorversuchen auch Empfänger von 4,6 und 9 mm Länge. In der angegebenen Länge ist der Raum für das Thermoelement, etwa 0,3 mm, mit einbegriffen. Bei dem linearen Sender bestand die eine Hälfte aus Platin mit Tellurkuppe, die andere aus einem ebenso dicken Wollastondraht, der vorn das Platindrähtchen von 0,0075 mm Dicke und etwa 0,5 mm Länge freiließ.[1]) Dieses war mittels Funkens am Tellur festgeschweißt. Bei dem kreisförmigen Empfänger waren Platin- und Wollastondrahtstück an Kupferdrähten festgelötet. Der lineare Empfänger befand sich in der Brennlinie eines Parabelspiegels von 1,4 mm Brennweite, 22 mm Länge und 14 mm Öffnung, der zum Schutze gegen Luftströmungen durch eine Glimmermembran verschlossen war. Ein ebensolcher Spiegel befand sich an dem kreisförmigen Empfänger in der Nähe des Thermoelementes. Im Vakuum zeigten die Empfänger keine erhöhte Empfindlichkeit. Ihre Widerstände lagen zwischen 250 und 400 Ω. Da die Platindrähtchen sich bei der geringsten Erschütterung lösten, mußten sie oft neu geschweißt werden.

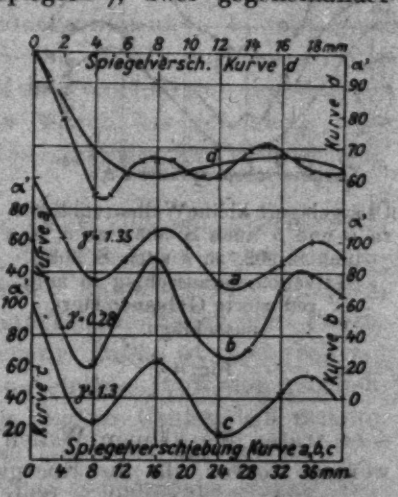
An Galvanometern wurden benutzt ein Drehspulinstrument von Siemens & Halske mit 40 Ω Spulenwiderstand von der

1) Ähnlich L. W. Austin, Physik. Zeitschr. 12. S. 1226. 1911.

Empfindlichkeit 1×10^{-9} Amp/mm bei 6 m Skalenabstand, ein Galvanometer nach Paschen[1]) mit 120 Ω Spulenwiderstand (hintereinander) von der Empfindlichkeit 2×10^{-10} Amp/mm bei 2 m Skalenabstand und 8 Sek. ganzer Schwingungsdauer und ein Panzergalvanometer nach du Bois und Rubens mit 1100 Ω Spulenwiderstand (parallel) von der Empfindlichkeit $0{,}2 \times 10^{-10}$ Amp/mm bei 3 m Skalenabstand und 10 Sek. ganzer Schwingungsdauer. Die in Tab. 4 (S. 316) enthaltenen Messungen sind fast sämtlich mit dem Paschengalvanometer ausgeführt. Bei dem Drehspulinstrument konnten bei sehr kleinen Ausschlägen noch halbe Zehntel Millimeter abgelesen werden.

Außer dem Thermoelement wurde auch der Kohärer eingehend geprüft. Er zeigte sich aber nicht zuverlässig genug.

5. *Wellenlänge.* Die Messung der Wellenlänge geschah teils mit Boltzmannschen Spiegeln[2]), zwei gegeneinander mikrometrisch verstellbaren polierten Messingplatten von je 43 × 55 mm Fläche, an denen die Wellen reflektiert wurden, teils mit einem Interferometer aus zwei gegeneinander mikrometrisch verschiebbaren Quarzplatten von 37 mm Durchmesser und 3,2 mm Dicke, ähnlich dem von Rubens und Hollnagel[3]) benutzten. Dieses war besonders für die kleineren Wellen gedacht.



Wellenlängenkurven *a*, *b* und *c* zu Sender Nr. 1 (vgl. S. 301 u. 302), *d* zu Sender Nr. 2 (vgl. S. 302), Tabelle 4 S. 316.
a' reduzierte Galvanometerausschläge.

Fig. 8.

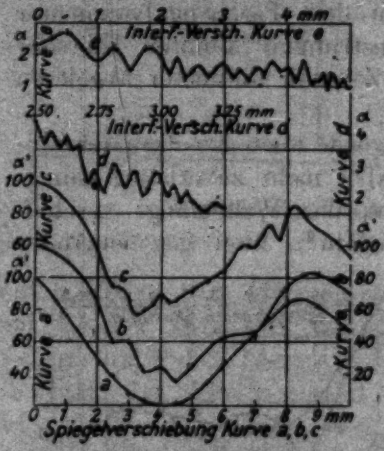
Die mit den Interferenzapparaten aufgenommenen Kurven zeigten zum Teil den glatten Verlauf einer gedämpften Schwingung (Fig. 8). Einzelne Kurven hatten Zacken, die auf das Vorhanden-

1) Dieses wurde mir vom Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Leipzig gütigst zur Mitbenutzung überlassen.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. 40. S. 399. 1890.

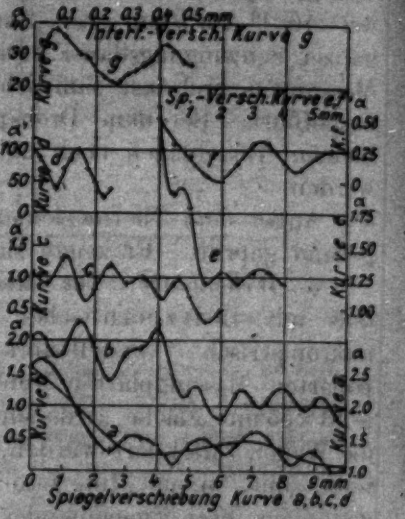
3) H. Rubens und H. Hollnagel, Berl. Ber. 1910. S. 26.

sein zweier Schwingungen von verschiedener Wellenlänge deuteten. Andere zeigten übergelagerte Wellenzüge von viel kleinerer Wellenlänge, als es der Grundschwingung des Senders entsprechen würde (Figg. 4 u. 5), und endlich gab es einige Kurven, bei denen eine solche kleine Welle nahezu rein entwickelt war (Fig. 5, Kurven *d* und *f*). Bei den längeren Sendern traten die kleinen Wellen weniger hervor, da ihr Energieanteil prozentisch sehr klein war. Daher wurden diese Wellenlängenkurven auch nicht mit so kleinen Intervallen aufgenommen wie bei den Sendern, bei welchen ausdrücklich auf die Feststellung der kleinen Wellen hingearbeitet wurde.



Übergelagert. kleine Wellen (vgl. S. 303, zu *a* und *b* auch S. 303, zu *c*, *d*, *e* auch S. 303, zu *e* auch S. 303).
a Galvanometerausschlag in mm, *a'* reduzierte Galvanometerausschläge.

Fig. 4.



Übergelagerte kleine Wellen, ziemlich rein (vgl. S. 303, zu Kurve *d* und *f* auch S. 310, zu *a* auch S. 305, zu *b* auch S. 305, zu *d* auch S. 307, zu *f* auch S. 307, zu *e* auch S. 307, zu *g* auch S. 319).
a Galvanometerausschlag in mm, *a'* reduzierte Galvanometerausschläge.

Fig. 5.

Aus allen Kurven, außer denen der letzten Art, konnte man die Länge derjenigen Welle wenigstens annäherungsweise bestimmen, welche der Grundschwingung des Senders entspricht, vorausgesetzt, daß sie klein gegen diejenige des Empfängers war. Zur Bestimmung der Wellenlänge wurde,

um alle Maxima und Minima auszunutzen, so verfahren, daß aus den beiden ersten Maxima, den beiden ersten Minima und dem ersten und dritten Maximum je ein Wert bestimmt und daraus das Mittel genommen wurde. Dieses Verfahren setzte voraus, daß nur vier Extremwerte gemessen waren, es wurde aber sinngemäß auf alle Wellenlängenbestimmungen angewendet. Aus der Kurve *a* (Fig. 3) z. B. ergab sich so $\lambda = 34{,}0$, 34,8, 36,6, im Mittel 35,2 mm, aus Kurve *b* 31,2, 36,0, 34,6, im Mittel 33,9 mm, aus Kurve *c* 32,0, 34,0, 35,2, im Mittel 33,7 mm. Daß λ nach Kurve *a* etwas größer ist als nach Kurve *b* und *c*, dürfte darauf zurückzuführen sein, daß zwischen Kurve *a* und *b* eine Anzahl anderer Messungen liegt, die Platinstäbchen sich also abgenutzt hatten. Die Kurven *b* und *c* dagegen sind unmittelbar nacheinander aufgenommen. Die Absorption ist erst nach Aufnahme der Kurve *c* bestimmt, daher ist der kleinste Wert, $\lambda = 33{,}7$ mm, zur Berechnung des Absorptionskoeffizienten k verwendet worden. In Tab. 4, S. 316 (Sender Nr. 1) dagegen ist der mittlere Wert aus Kurve *a* und *b*, $\lambda = 34{,}6$ mm, eingetragen. Zur Bestimmung von n und $\varkappa$ wurde das gefundene k in Anbetracht des nur kleinen Unterschieds der Wellenlängen ohne weiteres verwendet.

Die Wellenlängen konnten nicht alle mit gleicher Genauigkeit bestimmt werden, da die Messungen meist nur einmal und meist nur bis zum zweiten Maximum oder Minimum durchgeführt wurden, um zu starke Abnutzung der Platinstäbchen der Sender zu vermeiden. Daher ist auch bei den besten Messungen ein Fehler von einigen Prozenten möglich. Wo die Messung den Eindruck geringerer Genauigkeit machte, wurde λ in Tab. 4 nur auf ganze Millimeter angegeben.

Um die Grundschwingung des Senders aus seinen Ausmaßen zu berechnen, werde angenommen, er sei s mm lang. Davon seien g mm in Glas eingeschmolzen und $s - g$ mm in Petroleum gelagert. Die Dielektrizitätskonstante des Petroleums werde zu 2,06 angenommen. Dies ist das Mittel aus den in den Tafeln von Landolt-Börnstein angegebenen Werten. Für Glas wurde der Wert 6,78 eingesetzt, das Mittel aus den von Rubens[1]) für ein Glas photographischer Platten

1) H. Rubens, Berl. Ber. 1917. S. 556.

mit elektrischen Wellen von $\lambda = 57{,}2$ mm und für die langwellige Quecksilberdampfstrahlung von $\lambda = 0{,}3$ mm gefundenen Werten 6,86 und 6,60. Es wurde dann

$$\lambda = 2\left[\sqrt{2{,}06}\,(s-g) + \sqrt{6{,}73}\,g\right] \tag{1}$$

gesetzt. Der Wert 6,73 ist also ziemlich willkürlich gewählt. Aber seine Änderung um eine ganze Einheit macht für $\sqrt{6{,}73}$ noch keine 10 Proz. aus und für λ noch viel weniger.

Die nach Formel (1) erhaltenen Werte sind in Zeile 3 der Tab. 4 (S. 316) eingetragen, die gemessenen Werte in Zeile 2, die Gesamtlänge und Dicke beider Platinstäbchen in Zeile 5 und 6, die Dicke der Einschmelzstelle in Zeile 7, Länge und Dicke des zur Messung verwendeten Empfängers in Zeile 8 und 9. Wie man sieht, stimmen die meisten berechneten und gemessenen Werte befriedigend überein. Wo größere Abweichungen bestehen, läßt sich dafür als Grund die ungenügende Größe des Empfängers angeben. Der Sender Nr. 2 zeigt die Einwirkung des Empfängers besonders deutlich (Kurve *d*, Fig. 3). Die vorherrschende Schwingung hat eine Wellenlänge von 14,7 mm. Die Grundschwingung des Senders, berechnet zu 34,3 mm, ist schwach übergelagert. Der Sender Nr. 3 zeigt dieselbe Erscheinung wie Nr. 2, aber ohne übergelagerte Grundschwingung des Senders. Bei Nr. 4 hingegen, dessen berechnete Grundschwingung nahezu gleich derjenigen von Nr. 2 und 3 ist, wurde der kreisförmige Empfänger verwendet, und die Wellenlängenmessung zeigt rein die berechnete Grundschwingung des Senders.[1]) Bei sehr kleinen Sendern können die berechneten Werte von λ infolge Einflusses der Dicke etwas zu klein sein.

Die Dämpfung der Wellen änderte sich mit der Länge des Hauptfunkens. In Fig. 3, S. 299 sind drei Kurven gezeichnet, die mit Sender Nr. 1 (Tab. 4) und dem kreisförmigen Empfänger aufgenommen wurden. Kurve *a* entspricht sehr kleinem Funken und größter Energie. Bei Kurve *b* ist der Funke immer noch klein, aber soweit vergrößert, daß die Anfangsenergie die Hälfte derjenigen der Kurve *a* ist. Bei Kurve *c* endlich ist der Funke groß, die Energie ein Viertel derjenigen der Kurve *a*. An jeder Kurve ist der Wert für

1) Über diese Erscheinungen vgl. Karl F. Lindman, a. a. O.

das logarithmische Dekrement γ angeschrieben, berechnet nach der Formel[1])

$$\gamma = 2 \log \text{nat} \left[(\alpha_1 - \alpha_2) : (\alpha_2 - \alpha_3)\right], \tag{2}$$

wo α_1, α_2 und α_3 die Ausschläge des Galvanometers beim ersten und zweiten Maximum und ersten Minimum bedeuten. Kurve *b* zeigt erheblich geringere Dämpfung als *a* und *c*. Bei Berechnung von γ nach Formel (2) ist noch zu berücksichtigen, daß in dem so erhaltenen Werte noch ein Betrag steckt, der durch die Verschiebung der einen der beiden Spiegelhälften vorgetäuscht wird.

6. *Die übergelagerten kleinen Wellen.* Eine große Zahl der λ-Kurven zeigte außer der Grundschwingung des Senders oder der durch zu kleinen Empfänger bedingten ebenfalls großen Welle noch übergelagerte kleine Wellen von $\lambda = 5$ mm bis herab zu 0,10 mm. Es kamen vor die Größen $\lambda = 0{,}10$, 0,11, 0,17, 0,25, 0,30, 0,50, 0,70, 1,0, 1,1, 1,2, 1,7, 1,8, 2,0, 2,5, 3,0, 3,8, 4,0, 5,0 mm, am häufigsten 2,0, 2,5 und 3,0 mm. Ihr Anteil an der Gesamtenergie wechselte zwischen einigen und 100 Proz. Sie traten besonders bei großen Hauptfunken auf. Die Zuleitungsfunken waren ohne merklichen Einfluß. Besonders gern erschienen sie bei Sendern, die schon länger im Gebrauch, also abgenutzt waren. Bei diesen waren die Platinflächen, zwischen denen der Funke übersprang, unregelmäßig geformt. In Fig. 4 ist Kurve *a* mit kurzem, *b* mit langem Funken unmittelbar nacheinander aufgenommen. In Tab. 1 sind verschiedene Unterlagen für die Kurven der Fig. 4 zusammengestellt.

Charakteristisch war, daß die kleinen Wellen oft nur in einzelnen Abschnitten der λ-Kurven auftraten, und zwar kamen oft mehrere verschiedene Wellenlängen auf derselben Kurve unmittelbar hintereinander vor (Kurven *c*, *d*, *e* in Fig. 4), ohne daß die erste Schwingung abgedämpft war oder eine Schwebung auftrat. Fig. 5 zeigt Kurven, die ganz oder zum größten Teil aus kleinen Wellen bestehen. Tab. 2 gibt die nötigen Unterlagen dafür. Kurve *e* (Fig. 4) zerfällt dadurch in mehrere Teile, daß im ersten Abschnitt die Interferometerverschiebung von Punkt zu Punkt $^1/_4$ mm beträgt, im zweiten

1) Nach J. Klemenčič und P. Czermak, Wied. Ann. 50. S. 175. 1893.

Tabelle 1 (zu Fig. 4).

Kurve	a	b	c	d	e
Senderlänge mm	2,92	2,92	6,3	3,6	3,6
Einschmelzstellen zusammen mm	1,47	1,47	1,32	1,02	1,02
Empfängerlänge mm	14	14	14	14	14
Grundschwingung λ = mm					
gemessen	16,8	16,8	17	—	—
berechnet	11,8	11,8	21,1	12,7	12,7
Spiegel oder Interferometer	Sp.	Sp.	Sp.	Int.	Int.
Kleine Wellen λ = mm	—	2,0	1,7	0,10	1,1
	—	—	2,5	0,17	0,7
	—	—	—	—	0,5
	—	—	—	—	0,3
Funken kurz oder lang	kz.	lg.	kz.	lg.	lg.
Paschen- oder Drehspulgalvanom.	P.	P.	D.	D.	D.
Größter Ausschlag des Galvanometers in mm					
gemessen	392	25	98	4,4	2,7
reduziert	100	100	—	—	—

Tabelle 2 (zu Fig. 5).

Kurve	a	b	c	d	e	f	g
Senderlänge mm	3,44	3,68	3,6	5,5	3,3	3,3	5,5
Einschmelzstellen zusammen mm	1,93	1,93	1,02	1,32	1,93	1,93	1,32
Empfängerlänge mm	14	9	14	14	14	14	14
Grundschwingung λ = mm							
gemessen	14	—	12	—	—	—	—
berechnet	14,4	15,0	12,7	18,8	13,9	13,9	18,8
Spiegel oder Interferometer	Sp.	Sp.	Int.	Sp.	Sp.	Sp.	Int.
Kleine Wellen λ = mm	3,8	2,6	2,5	3,0	2,5	—	—
Funken lang oder kurz	lg.	lg.	lg.	lg.	lg.	lg.	lg.
Paschen- oder Drehspulgalv.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	P.
Größter Ausschlag des Galvanometers in mm							
gemessen	2,7	2,3	1,3	1,1	2,6	0,5	38
reduziert	—	—	—	100	—	—	—

$^1/_8$ mm und im dritten $^1/_{16}$ mm. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß im ersten und zweiten Abschnitt die Welle trotz der vorhandenen Regelmäßigkeit der Kurve noch nicht völlig aufgelöst ist.

Es erheben sich nun die folgenden Fragen: Wie kommen die kleinen Wellen zustande? Sind sie reproduzierbar? Lassen sie sich im voraus berechnen? Lassen sie sich isolieren? Sind sie überhaupt real? Zur Beantwortung dieser Fragen ist folgendes zu sagen. Für die Erzeugung der kleinen Wellen könnten entweder Oberschwingungen des Senders oder

des Empfängers in Frage kommen oder der Hauptfunke. Daß Oberschwingungen des Senders einwandfrei gemessen werden können, hat Lindman[1]) gezeigt, indem er ebenfalls für Luftwellen mit einem stark gedämpften (etwa 80 Ω) Empfänger von 38,5 cm Länge die Schwingung eines Senders von $\lambda = 48{,}4$ cm Grundschwingung untersuchte. Die Interferenzkurve zeigte die schwach ausgeprägte Grundschwingung des Senders und darüber gelagert seine stark hervortretende zweite Oberschwingung $\lambda = 16{,}0$ cm von geringer Dämpfung. Ein ähnliches Bild gibt Kurve *a* (Fig. 5). Die berechnete Grundschwingung des Senders ist $\lambda = 14{,}4$ mm, durch die Linie ohne eingetragene Punkte angedeutet. Die übergelagerte Welle hat $\lambda = 3{,}8$ mm, der Empfänger ist 14 mm lang. Auch Kurve *b* (Fig. 5) gibt ähnliche kurze Wellen von $\lambda = 2{,}63$ mm bei einer Grundschwingung von $\lambda = 15{,}0$ mm und einer Empfängerlänge von 9 mm.

Wenn man so auch in der Lage wäre, einfach alle übergelagerten kleinen Wellen als Oberschwingungen des Senders anzusprechen, so ist doch noch die große Inkonstanz, das häufige Überspringen von einer zur anderen Wellenlänge auf derselben Interferenzkurve und die Wiederkehr bestimmter Wellenlängen bei den verschiedensten Kombinationen von Sendern und Empfängern aufzuklären. Da ein Einfluß der Länge des Hauptfunkens auf die Erzeugung der kleinen Wellen, wie erwähnt, festgestellt wurde, so erhebt sich die Frage, ob dieser Einfluß nur ein sekundärer ist oder ob vielleicht auch im Funken Erzeuger kleiner Wellen anzutreffen sind. Da während des Funkenüberganges Platinteilchen von den Senderhälften losgerissen werden, so könnte man sich denken, daß diese Teilchen auch Schwingungen ausführen und daß wenigstens die kleinsten der gemessenen Wellen mit ihrer Hilfe zustande kommen.

Rubens und von Baeyer[2]) haben für die von ihnen isolierte langwellige Quecksilberdampfstrahlung von etwa 0,3 mm Wellenlänge einen Weg angegeben, auf dem die zugehörigen Wellenlängen vielleicht annäherungsweise berechnet werden können. Sie nehmen an, daß „die positiven und

1) Karl F. Lindman, a. a. O.
2) H. Rubens und O. von Baeyer, a. a. O.

negativen Atomionen, soweit sie sich nach erfolgter Annäherung nicht wieder auf hyperbolischer Bahn entfernen oder beim Zusammenstoß sofort neutralisieren, wie Doppelsterne einander umkreisen in einem Abstande von annähernd derselben Größe wie die Moleküle des festen und flüssigen Quecksilbers" und setzen für einfach geladene Atomionen

$$(3) \qquad m v^2 : r = e^2 : (4 r^2),$$

wo m die Masse des Ions, v seine Geschwindigkeit, r der Halbmesser der Bahn und e das Elementarquantum in elektrostatischen Einheiten ist. Wird hier $v = 2\pi r \nu$, $\nu\lambda = 3 \times 10^{10}$ cm, $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ [1]) und die Anzahl $d : m$ der Teilchen im Kubikzentimeter, wo d die Dichte der festen oder flüssigen Substanz ist, unter Annahme tetraedrischen Aufbaues der Substanz gleich $\sqrt{2} : (2r)^3$ gesetzt und endlich m aus dem Atomgewicht a und der Anzahl der Teilchen im Kubikzentimeter eines Gases unter Normalbedingungen, $2 \cdot 70 \times 10^{19}$ [2]), berechnet, so ergibt sich

$$(4) \qquad \lambda = 0{,}005472\, a : \sqrt{d} \text{ Millimeter.}$$

Hat ein Teil des Doppelsternes mehrere Ladungen, so muß die Formel (4) dementsprechend abgeändert werden.

Für Platin würde sich aus Formel (4) ergeben $\lambda = 0{,}282$ mm. Kleinere Wellen ergeben sich, wie bei Rubens und v. Baeyer, wenn mehrfache Ladungen zugelassen werden. Zur Erklärung der größeren Wellen müßte man dann annehmen, daß größere Platinteilchen losgerissen werden und Schwingungen nach einem ähnlichen Gesetz ausführen.

Wenn überhaupt der Funke für die Erzeugung der kleinen Wellen mit in Frage kommt, so wäre zu erwarten, daß dieselben Wellen auch durch den Funken eines sehr viel größeren Senders erzeugt würden. Auch müßten Sender aus verschiedenem Material verschiedene kleine Wellenlängen ergeben. Dies wurde bisher noch nicht untersucht.

Die genauere Untersuchung der Reproduzierbarkeit und Isolierung der kleinen Wellen wurde bis zur Fertigstellung einer empfindlicheren Meßanordnung zurückgestellt. Von Vorversuchen über Isolierung mögen zwei erwähnt werden.

1) Erich Regener, Berl. Ber. 1909, S. 948.
2) Erich Regener, a. a. O.

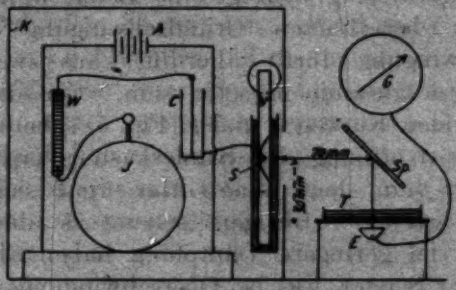
Bei einem Sender von der berechneten Grundschwingung $\lambda = 18{,}8$ mm, der schon längere Zeit benutzt war und Neigung zur Ausbildung kleiner Wellen zeigte, wurde der Parabelspiegel ersetzt durch ein ebenfalls parabolisch gekrümmtes Gitter aus 0,8 mm langen, 0,2 mm breiten Stanniolstreifchen[1]), die in Abständen von 0,2 mm in der Längs- und 0,8 mm in der Querrichtung auf Karton geklebt waren. Das Ergebnis der Wellenlängenmessung mit Boltzmannschen Spiegeln war Kurve *d* (Fig. 5) mit $\lambda = 3{,}0$ mm, welche eine ziemlich reine Welle darstellt. Auch Kurve *f* (Fig. 5) zeigt eine kleine Welle eines Senders von der berechneten Grundschwingung $\lambda = 13{,}9$ mm. Diese Schwingung dürfte allerdings aus zwei verschiedenen Wellenlängen zusammengesetzt sein. Für die reine Erzeugung dieser beiden Kurven *d* und *f* (Fig. 5) scheint das Gitter vor der Austrittsöffnung des Senderkastens (vgl. S. 296) von Wichtigkeit zu sein, denn ohne Gitter ergab sich z. B. statt Kurve *f* die Kurve *e*. Übrigens scheint es, daß die kleinen Wellen eine viel geringere Dämpfung haben als die Grundschwingungen der Sender, was bei Oberschwingungen selbstverständlich wäre. Durch Wiedergabe dieser Voruntersuchungen sollte nur gezeigt werden, daß die Möglichkeit besteht, die kleinen Wellen zu isolieren.

Für Abschnitt 10 ist noch zu berücksichtigen, daß Absorption, Reflexion und Brechung durch die übergelagerten kleinen Wellen ungenau werden können.

7. *Absorption.* Die Absorption wurde untersucht teils in dem auf S. 299 erwähnten Quarzinterferometer, teils (u. a. alle in Tab. 4, S. 316 enthaltenen Werte) in einem horizontalen Trog mit 1,5 mm dicker Glasplatte als Unterseite und aufgekittetem Metallring von 77 mm Durchmesser und 23 mm Höhe. Der Empfänger befand sich dicht unter der Glasplatte. Die Schichtdicke wurde so lange vergrößert, bis die durchgehende Intensität der Wellen sehr klein geworden war. Da dies möglich war, konnte man annehmen, daß keine merkliche Energie um den Trog herum zum Empfänger gelangte. Fig. 6 zeigt schematisch die Anordnung bei einer Absorptionsmessung

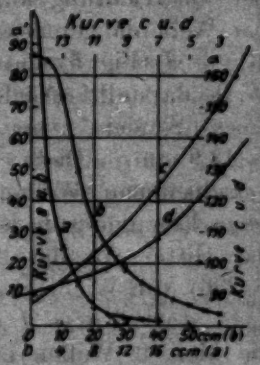
1) Auch A. Garbasso und E. Aschkinaß, Wied. Ann. 53. S. 534. 1894 und A. D. Cole, Wied. Ann. 57. S. 290. 1896 benutzten diese Einrichtung.

mit Trog. Die Schichtdicken wurden aus den eingefüllten Flüssigkeitsmengen bestimmt. Bei Wasser wurde zu Beginn ein Blatt Fließpapier eingelegt, um eine gleichmäßige Benetzung zu erzielen. Die erhaltene Kurve durchgehender Intensität als Funktion der Schichtdicke zeigte meist übergelagerte Wellen. Die „mittlere Kurve", zwischen den Maxima und Minima der Wellen liegend, wurde als „Absorptionskurve" angesehen. Die Schicht muß mindestens eine halbe



Schema der Absorptionsmessung mit Trog (vgl. S. 296 u. 307). *V* ist der Vulkanfiberblock, in Petroleumbad, welcher den Sender *S* trägt, mit Induktorium *J*, Wasserwiderstand *W*, Kapazität *C* und Akkumulatorenbatterie *A* im Kasten K eingeschlossen, *E* der Empfänger, *T* der Absorptionstrog, *Sp* der Metallspiegel, *G* das Galvanometer.

Fig. 6.



Absorptionskurven des Senders Nr. 8 (Tab. 4, S. 316), *a* für Wasser, *b* für Alkohol, *c* und *d* zugehörige Bezugskurven (vgl. S. 309). *a* Galvanometerausschläge in mm, *a'* reduzierte Galvanometerausschläge. 1 ccm Flüssigkeit entspricht 0,2155 mm Schichtdicke.

Fig. 7.

Wellenlänge (in Flüssigkeit gemessen) dick sein, sonst könnte unter Umständen die Absorption etwas zu groß bestimmt werden, da die „mittlere Kurve" nicht sicher gezeichnet werden kann.

Aus den Absorptionskurven wurde

$$k = n\varkappa = (\lambda : 4\pi d) \log \text{nat} \; (i : i') \tag{5}$$

bestimmt, wo k der Absorptionskoeffizient, n das Brechungsverhältnis, $\varkappa$ der Absorptionsindex, λ die Wellenlänge in Luft, $i : i'$ das Verhältnis der bei verschiedenen Schichtdicken durchgelassenen Intensitäten und d der Unterschied der zugehörigen Schichtdicken ist. In Fig. 7, Kurven *a* und *b*, sind Absorptionskurven für Wasser und Alkohol des Senders Nr. 8 (Tab. 4,

S. 317) als Beispiele wiedergegeben. Die Kurven c und d sind die zugehörigen Bezugskurven (vgl. S. 297). Für die Absorptionskurven sind die Abszissen Kubikzentimeter Wasser, wobei 1 ccm einer Schichtdicke von 0,2155 mm entspricht, für die Bezugskurven sind es Nummern der Messung. Die Ordinaten sind bei den Bezugskurven Galvanometerausschläge a in Millimetern, bei den Absorptionskurven reduzierte Galvanometerausschläge a'. Tab. 3 zeigt das Schema einer Absorptionsmessung für Wasser. Die 3. Zeile gibt die abgelesenen Galvanometerausschläge wieder, in Abhängigkeit von der Schichtdicke. Wo in der 2. Zeile keine Schichtdicke angegeben ist (—),

Tabelle 3.

Schema einer Absorptionsmessung für Sender Nr. 8, Tab. 4 und Wasser. 1 ccm entspricht 0,2155 mm Schichtdicke.

Nummer der Messung	1	2	3	4	5	6	7	8
Wasserschicht ccm	—	—	0	2	4	6	—	6
Galvanometerausschlag mm	171	160	280	136	58	26	124	50
Bezugsausschlag mm	—	—	152	144	137	130	—	118
Reduz. Ausschlag	—	—	100	52,7	25,3	13,8	—	13,8

Nummer der Messung	9	10	11	12	13	14	15
Wasserschicht ccm	8	10	12,2	14	16	18	—
Galvanometerausschlag mm	17,5	6,2	2,0	0	−1,8	—	—
Bezugsausschlag mm	113	108	103	98	94	—	—
Reduz. Ausschlag	6,4	3,8	2,8	2,4	1,9	—	—

wurde ohne Trog gemessen. So ergaben sich die vier Punkte, aus denen die Bezugskurve c (Fig. 7) gezeichnet ist. Für die zwischenliegenden Messungen mit Trog wurden die ihrer Ordnungszahl entsprechenden Werte aus der Bezugskurve entnommen und in Zeile 4 eingetragen. Da das Induktorium allein bei geöffnetem Galvanometerkreise einen Ausschlag von 8,5 mm nach der anderen Seite verursachte, waren alle Ausschläge in Zeile 3 und 4 um 8,5 mm zu vergrößern. Nunmehr wurde der Ausschlag für Messung Nr. 3 (0 ccm Wasser) gleich 100 gesetzt und alle übrigen darauf bezogen (Zeile 5). Dies ergab z. B. für Messung Nr. 4 die Umrechnung:

$$[(1360 + 85)\,(1515 + 85)] : [(2800 + 85)\,(1440 + 85)] = 52{,}7.$$

Bei den meisten Sendern wurde nur eine Absorptionskurve aufgenommen. Beim Sender Nr. 2 (Tab. 4) wurde mit kurzem Hauptfunken $b = 1{,}21$ erhalten, mit sehr langem

$k = 1{,}47$. Da alle Messungen der Tab. 5 mit kurzem Funken gemacht sind (vgl. S. 297), wurde $k = 1{,}21$ in Tab. 4 eingetragen, obwohl der Wert 1,47 besser zur Kurve k (Fig. 10) gepaßt hätte. Beim Sender Nr. 4 wurden vier Absorptionskurven aufgenommen, auch mit geringer Änderung der Funkenlänge, eine sogar mit einem anderen Sender von gleicher berechneter Grundschwingung, und diese zeigten Abweichungen von nur wenigen Prozenten voneinander. Dies dürfte daher die Genauigkeit der einzelnen Absorptionsmessung an sich sein und größere Abweichungen könnten durch wechselnde Zusammensetzung der Schwingung, z. B. Überlagerung kleiner Wellen, zustande kommen.

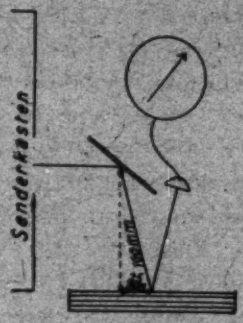
Für $d = 0{,}2155$ mm, entsprechend 1 ccm, folgen aus Kurve a (Fig. 7) der Reihe nach, wenn Anfang und Ende der Kurve als unsicher weggelassen werden, bei 4 und 5, 5 und 6 usw. ccm die Werte $i : i' = 1{,}38,\ 1{,}42,\ 1{,}42,\ 1{,}38,\ 1{,}34,\ 1{,}34,\ 1{,}34$, im Mittel 1,37. Nach Tab. 4 (S. 317), Spalte 8 ist $\lambda = 17{,}5$ mm. Diese Werte ergeben nach Formel (5) $k = 2{,}04$.

Tab. 4 (S. 316) enthält in den Zeilen 11, 12, 14, 16, 17, 19 für k, n und $\varkappa$ eingeklammerte und nicht eingeklammerte Werte. Die eingeklammerten Werte entstammen Vorversuchen, für welche $\varkappa$ nicht einwandfrei bestimmt wurde und welche daher erst in zweiter Linie zur Beurteilung der Dispersionsverhältnisse herangezogen werden sollen. Aus den nicht eingeklammerten Werten von k wurden die Kurven k in Fig. 10 und 11 gezeichnet. Aus ihr wurden die eingeklammerten k entnommen und zur Berechnung der eingeklammerten n und $\varkappa$ verwendet.

8. *Reflexion.* Zur Bestimmung des Verhältnisses R der an Flüssigkeit und Metall reflektierten Intensitäten wurde eine Kristallisationsschale von 133 mm Durchmesser im Lichten und eine 96×67 mm große Platte aus Spiegelmetall verwendet. In der Schale stand die Flüssigkeit mehrere Zentimeter hoch, so daß nach den Ergebnissen der Absorptionsmessung keine störende Reflexion am Boden mehr stattfinden konnte. Dies wurde auch durch eingelegte Metallplatten bestätigt. Fig. 8 zeigt die Anordnung der Apparate.

Für kleine Wellen war die Größe der Spiegelmetallplatte ausreichend, da sie gegenüber auf Wasser schwimmendem

Stanniol keine merklichen Abweichungen außerhalb der Versuchsfehler ergab. Für größere Wellen mußte man auf Abweichungen gefaßt sein, da die Platte nicht die Form der reflektierenden Flüssigkeitsoberflächen hatte. Am korrektesten wäre es gewesen, das Flüssigkeitsgefäß mindestens so groß zu machen, daß auf dem Wasser (in seiner ganzen Ausdehnung) schwimmendes Stanniol oder Quecksilber die gleiche Reflexion ergab wie eine genau gleichgroße und gleichgeformte Metallplatte. Denn dann ist eine Randwirkung ausgeschlossen. Dann kann man bei den Reflexionsmessungen entweder das Stanniol oder die Metallplatte verwenden. Bei den nachträglich angestellten Messungen Nr. 3 und 4 (Tab. 4) war diese Übereinstimmung bei einem Flüssigkeitsgefäß von 283 mm Durchmesser festgestellt worden. Bei diesen Sendern wurde das große Flüssigkeitsgefäß und Stanniol sowie gleichgroße Metallplatte benutzt, und daher sind auch bei ihnen die für das Reflexionsvermögen gefundenen Werte am zuverlässigsten.



Schema einer Reflexionsmessung.

Fig. 8.

Bei dem für die übrigen Messungen verwendeten kleineren Gefäß von 133 mm Durchmesser war eine Randwirkung vorhanden. Denn wenn das Reflexionsvermögen der Spiegelmetallplatte gleich 100 gesetzt wird, so gab Stanniol, im kleinen Gefäß auf Wasser schwimmend, bei Sender Nr. 4 ($\lambda = 33{,}0$ mm) statt 100 den Wert 107,1, Quecksilber im kleinen Gefäß 95,5, und beim Sender Nr. 8 ($\lambda = 14{,}0$ mm) gab Stanniol 103,0. Selbstverständlich waren alle reflektierenden Flächen gleich hoch und horizontal.

Es ist nun die Frage, ob durch diesen Fehler etwa sämtliche Messungen unbrauchbar werden, denn eine Änderung des Reflexionsvermögens um 3 Proz. macht bei Sender Nr. 3 das Brechungsverhältnis um 10 Proz. kleiner, eine Änderung um 7,1 Proz. beim Sender Nr. 4 um 17 Proz. Wenn nun die Abweichungen sich unregelmäßig mit der Wellenlänge änderten, so wäre zu erwarten, daß sich in den

Figg. 10 und 11 keine so regelmäßigen Kurven durch die Punkte legen ließen, wie es tatsächlich der Fall ist. Auch wäre es dann ein sonderbarer Zufall, daß die Sender 2 und 3, die nahezu gleiche Wellenlänge haben, so nahe gleiches n für Wasser ergeben haben und sogar für Wasser wie Alkohol Abweichungen im richtigen Sinne zeigen. Ähnliches gilt von den Sendern Nr. 1 und 4. Und das wichtigste Ergebnis, das offenkundige Vorhandensein eines Absorptionsstreifens und seine Lage beim Wasser und keines Streifens beim Alkohol in dem untersuchten Gebiete, ist ja auch durch die von Reflexionsmessungen ganz unabhängigen Absorptionsmessungen bedingt. Man kann also annehmen, daß in Wirklichkeit die durch Verwendung der Spiegelmetallplatte bewirkten Fehler nicht so groß sind, wie es bei der erwähnten nachträglich ausgeführten Prüfung scheinen müßte, und daß sie zum mindesten sich nur langsam mit der Wellenlänge verändern. Man kann daher das Ergebnis der vorliegenden Messungen als vorläufiges Ergebnis mit gutem Gewissen vertreten.

Eine weitere wichtige Frage ist die, ob das Reflexionsvermögen und dann auch Absorption und Brechung von der Dämpfung der Wellen abhängig sind. Die Auffassung einer gedämpften Schwingung als Spektrum würde eine solche Abhängigkeit in der Nähe eines Absorptionsstreifens zulassen, da ein schmales Spektrum dort prozentisch stärker absorbiert werden müßte als ein breites. Es wurden einige Versuche zur Klärung dieser Frage angestellt — die auf S. 302 erwähnten Versuche über Abhängigkeit der Dämpfung von der Länge des Hauptfunkens sind ein Teil davon —, aber die Meßgenauigkeit war noch nicht groß genug, um von einem bestimmten Ergebnis sprechen zu können.

Auch ohne die erwähnten Fehlerquellen und die etwaige Überlagerung kleiner Wellen war die Genauigkeit einer einzelnen Reflexionsmessung gering. Nur durch Häufung der Beobachtungen konnten zuverlässigere Werte erhalten werden. Bei Sender Nr. 1 (Tab. 4, S. 316) z. B. ist der endgültige Wert 61,4 Proz., für die reflektierte Menge das Mittel aus 53,0, 58,7, 68,9, 64,7, 60,5, 62,8, 60,0, 62,2. Daß die Mittelwerte erheblich genauer sind, zeigt die Möglichkeit, die für n gefundenen Werte zwanglos in Kurven zusammenzufassen in den Figg. 10 und 11.

Zur Berechnung von n und $\varkappa$ aus k und R wurden die Formeln[1])

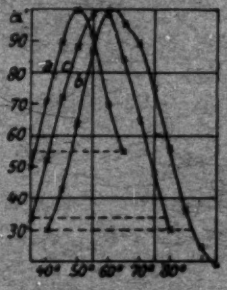
$$n = b\cos\varphi + \sqrt{(b^2 - 1)\cos^2\varphi - k^2}, \tag{6}$$

$$b = (1 + R) : (1 - R), \tag{7}$$

$$k = n\varkappa \tag{8}$$

verwendet, wo φ den Einfallswinkel bezeichnet. Bei den vorliegenden Messungen war $\varphi = 15^0$.

9. *Brechung.* Es wurden Hartgummi-Hohlprismen mit 2 mm dicken Hartgummidecken verwendet. Der Prismenwinkel war für Wasser 2° 33′, für Äthylalkohol 7° 03′. Eine Prismenfläche war auf der Austrittsöffnung des Senderkastens befestigt, die einfallenden Wellen waren also nahezu senkrecht zu dieser Fläche. Fig. 9 gibt ein Beispiel für Prismenmessungen. Die Abszissen sind Ablesungen am Teilkreis, die Ordinaten reduzierte Ausschläge des Paschengalvanometers in Millimetern. Kurve *a* ist ohne Prisma, Kurve *b* mit Prisma aufgenommen für Wasser, Kurve *c* für Äthylalkohol. Kurve *a* gehört zum Sender Nr. 12 (Tab. 4, S. 317), *b* und *c* zu Nr. 8. Die „gerade Durchsicht" wurde nämlich nicht mit jedem Sender besonders aufgenommen, da sie nahezu konstante Lage hatte, und um die Abnutzung des Senders zu vermindern.



Prismenkurven, *b* und *c* des Senders Nr. 8 (Tab. 4, S. 317) für Wasser und Alkohol, *a* Kurve ohne Prisma („gerade Durchsicht") des Senders Nr. 12.

Fig. 9.

Als maßgebend für den Ablenkungswinkel wurde nicht die Lage der Spitze der Kurve angesehen, da bei einigen Kurven kleine Nebenmaxima oder unsymmetrischer Abfall auftraten, sondern die Lage des Schwerpunktes der durch die gezeichnete Kurve und die gestrichelte Linie umfaßten Fläche, der ja auch für Absorption und Reflexion maßgebend ist. So ergab sich für die Kurven *a*, *b* und *c* 50° 00′, 64° 00′ und 57° 00′. Es wurden nur halbe Grade noch abgelesen.

1) Abgeleitet aus der Formel für R in Winkelmanns Handbuch der Physik. 2. Aufl. Bd. VI. S. 1300, Formel (45), wenn $J_p^s : J_p^s = R$ gesetzt wird.

Der Prismenwinkel w war für Wasser 2° 33′, für Alkohol 7° 03′. Die Normale zur Austrittsfläche des Prismas lag für Wasser bei 46° 28′, für Alkohol bei 42° 38′. Aus diesen Werten ergibt sich für Wasser (Alkohol) ein Einfallswinkel φ von $-0°\,59'$ $(-0°\,19')$ und ein Austrittswinkel ψ von $-17°\,32'$ $(14°\,22')$ und n nach der Formel[1])

$$(9) \qquad n = \frac{(\sin\varphi\cos w - \sin\psi)\cos\varphi}{\sin w}\left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{2(k^2+n^2)}\right),$$

die sich für kleine φ, wie sie hier vorliegen, auf

$$(10) \qquad n = \sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,w - \sin\psi : \sin w$$

reduziert, zu $n = 6{,}4$ für Wasser, $n = 2{,}0$ für Alkohol.

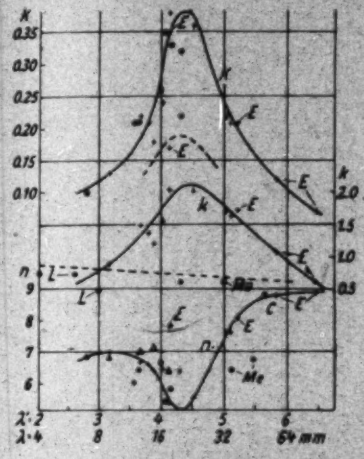
Jede Prismenkurve wurde nur einmal aufgenommen. Die Bestimmung der Winkel daraus läßt sich durchschnittlich bis auf etwa $^1/_2{}^0$ ausführen. Dies gibt für n eine Genauigkeit von etwa 3 Proz. Daher hatte es keinen Zweck, in Tab. 4 noch eine zweite Stelle nach dem Komma anzugeben.

10. *Ergebnisse der Dispersionsuntersuchung.* Sie sind in Tab. 4 eingetragen, zusammen mit denjenigen einiger anderen Beobachter. Cole[2]), Eckert[3]), Lampa[4]) und Merczyng[5]) arbeiteten mit Luftwellen, Marx[6]) mit Drahtwellen. Marx bestimmt demgemäß n aus dem Verhältnis der Wellenlängen in Luft und in Flüssigkeit, Lampa mit Prisma, Cole, Eckert und Merczyng nach der Reflexionsmethode, Cole und Merczyng ohne Berücksichtigung der Absorption. Ferner sind diese Ergebnisse dargestellt in Fig. 10 für Wasser, in Fig. 11 für Äthylalkohol, und zwar mit gleichabständigen Oktaven, so daß die Werte λ' (Tab. 4, Zeile 4) die Abszissen sind.

Zu diesem Zweck wurden zunächst aus den nicht eingeklammerten Werten, die eine zusammenhängende Beobachtungsreihe darstellen, unter Weglassung der mit Prisma

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. **46**. S. 253. 1892.
2) A. D. Cole, a. a. O.
3) Fr. Eckert, a. a. O.
4) Anton Lampa, a. a. O.
5) H. Merczyng, Ann. d. Phys. **34**. S. 1015. 1911.
6) Erich Marx, Wied. Ann. **66**. S. 411. 1898.

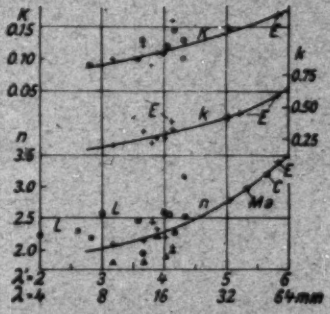
bestimmten und unter Hinzunahme der Eckertschen Beobachtungen Kurven für k, n und $\varkappa$ gezeichnet. Einige weiter abliegende Punkte wurden dabei mit geringerem Gewicht belastet. Nach Fertigstellung der Kurven wurden auch die mit Prisma bestimmten Werte und die der übrigen Beobachter eingetragen.



Ergebnisse der Dispersionsmessungen für Wasser (vgl. S. 314 ff.) nach Tab. 4 (S. 316), k Absorptionskoeffizient, $\varkappa$ Absorptionsindex, n Brechungsverhältnis, λ Wellenlänge, λ' auf gleichabständige Oktaven gebrachte Wellenlänge, C = Cole, E = Eckert, L = Lampa, Ma = Marx, Me = Merczyng. Die gestrichelten Linien grenzen die zur darunter liegenden Kurve gehörigen Punkte ab.

\+ Punkte, aus denen die Kurven gezeichnet wurden,
△ Prismenwerte,
⊙ alle übrigen Punkte.

Fig. 10.



Ergebnisse der Dispersionsmessungen für Alkohol (vgl. S. 314 ff.) nach Tab. 4 (S. 316). k Absorptionskoeffizient, $\varkappa$ Absorptionsindex, n Brechungsverhältnis, λ Wellenlänge, λ' auf gleichabständige Oktaven gebrachte Wellenlänge, C = Cole, E = Eckert, L = Lampa, Ma = Marx.

\+ Punkte, aus denen die Kurven gezeichnet wurden,
△ Prismenwerte,
⊙ alle übrigen Punkte.

Fig. 11.

Die Spalten mit eingeklammerten Werten in Tab. 4 stammen von Vorversuchen. Bei diesen war k nicht mit dem Trog, sondern nach anderen Methoden bestimmt worden, welche keine zuverlässigen Werte ergeben hatten. Daher wurden für diese Spalten Werte von k aus den bereits gezeichneten Kurven entnommen und damit n und $\varkappa$ berechnet. Diese wurden dann ebenfalls in die Zeichnungen eingetragen. Beim Alkohol sind die Eckertschen Werte von n und $\varkappa$ für $\lambda = 17{,}5$ und 37 mm weggelassen, da für sie n ohne Messung gleich dem für $\lambda = 57$ mm gefundenen Werte gesetzt ist.

Tabelle 4.

Zeile 1 Nummer des Senders oder Name des Beobachters (C = Cole, E = Eckert, L = Lampa, Ma = Marx, Me = Merczyng). Zeilen 2 b's 4 Wellenlänge λ gemessen, λ berechnet, $\lambda' = 3{,}322 \log \lambda$ (bei Nr. 13 nach λ ber., sonst nach λ gem.). Zeilen 5, 6, 8, 9 Länge l und Dicke d des Senders (S) und Empfängers (E). Zeile 7 Glasdicke beider Einschmelzstellen des Senders zusammen. Zeile 10 Apparat für λ-Messung, Boltzmannscher Spiegel (Sp) oder Quarzinterferometer (Int.). Zeilen 11 bis 15 Absorptionskoeffizient k, Absorptionsindex $\varkappa$, reflektierte Intensität R in Prozenten der Metallreflexion, für 15° Einfallswinkel, Brechungsverhältnis n (R) aus dem Reflexionsvermögen und n (Pr) mit dem Prisma bestimmt, alles für Wasser. Zeilen 16 bis 20 dasselbe für Äthylalkohol. Wegen der eingeklammerten Zahlen vgl. S. 315 und Fr. Eckert, a. a. O. S. 30. Alle Längen sind Millimeter. Temperatur bei Nr. 3 und 4 17°, bei anderen Nummern etwa 21°.

1	Nr. (Na.)	E	E	C	Me	Ma	E	Me	1	2	3	4	Ma	5	6	7
2	λ gem.	88	57	50	45	40	37	35	34,6	14,7	14,0	33,0	32	20	22,8	17
3	λ ber.	—	—	—	—	—	—	—	35,4	34,3	34,4	34,2	—	22,7	22,4	21,1
4	λ'	6,46	5,83	5,65	5,49	5,32	5,21	5,13	5,11	3,88	3,80	5,04	5,00	4,32	4,51	4,08
5	l (S)	36,0	27,0	—	—	—	17,6	—	11,00	10,66	10,65	10,51	—	6,78	6,63	6,3
6	d (S)	3	2	—	—	—	2	—	0,5	0,5	0,5	0,5	—	0,5	0,5	0,5
7	Glas	—	—	—	—	—	—	—	1,67	1,6	1,68	1,74	—	1,42	1,45	1,32
8	l (E)	34	22	—	—	—	12	—	170	14	14	170	—	14	170	14
9	d (E)	1	2	—	—	—	0,5	—	0,5	0,3	0,3	0,5	—	0,3	0,5	0,3
10	App.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Draht	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Draht	Sp.	Sp.	Int.
11	k	0,60	1,08	—	—	—	1,72	—	1,63	1,21	1,36	1,70	—	(2,07)	2,02	(1,85)
12	$\varkappa$	0,07	0,12	—	—	—	0,21	—	0,21	0,18	0,21	0,22	—	(0,32)	0,36	(0,35)
13	R	—	—	—	—	—	—	—	61,4	55,7	56,7	61,4	—	60	54	52,2
14	n (R)	8,89	8,79	8,80	6,79	—	8,10	6,44	7,63	6,41	6,59	7,64	9.22	(6,41)	5,57	(5,35)
15	n (Pr)	—	—	—	—	—	—	—	—	7,1	—	—	—	—	—	—
16	k	—	0,60	—	—	—	0,45	—	—	0,26	0,22	0,43	—	(0,32)	—	(0,30)
17	$\varkappa$	—	0,17	—	—	—	(0,13)	—	—	0,11	0,09	0,15	—	(0,10)	—	(0,12)
18	R	—	—	—	—	—	—	—	—	17,6	19,2	24,6	—	28,5	—	21
19	n (R)	—	3,4	3,2	2,25	2,97	(3,4)	—	—	2,33	2,45	2,80	—	(3,16)	—	(2,56)
20	n (Pr)	—	—	—	—	—	—	—	—	2,2	—	—	—	—	—	—

Tabelle 4 (Fortsetzung).

Die Dicken der „Einschmelzstellen" bei den Lampaschen Sendern wurden auf Grund der bei Lampa, a. a. O. gemachten Angaben angenommen. Die Wellenlängen sind bei Lampa mit Gitter (Gi.) bestimmt.

1	Nr. (Na.)	8	9	10	E	11	12	L	13	14	L	15	16	L	17
2	λ gem.	17,5	20	18	17,5	16	16,2	8	—	12,8	6,1	12	9,0	4	7
3	λ ber.	21,5	19,0	18,6	—	16,3	16,0	14,4	12,6	12,2	10,8	11,4	11,2	7,2	—
4	λ'	4,13	4,32	4,17	4,13	4,00	4,02	3,00	3,65	3,67	2,61	3,58	3,17	2,00	2,81
5	$l\,(S)$	5,82	5,42	5,3	7,6	4,62	4,5	4,0	3,21	3,00	3,00	2,58	2,5	2,0	1,98
6	$d\,(S)$	0,5	0,5	0,5	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
7	Glas	2,06	1,48	1,48	—	1,33	1,33	2	1,44	1,47	1,5	1,73	1,73	1	—
8	$l\,(E)$	14	14	14	4,0	14	14	—	14	14	—	14	14	—	14
9	$d\,(E)$	0,3	0,3	0,3	0,5	0,3	0,3	—	0,3	0,3	—	0,3	0,3	—	0,3
10	App.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Gi.	—	Sp.	Gi.	Sp.	Sp.	Gi.	Sp.
11	k	2,04	(2,07)	(1,95)	2,7	(1,73)	1,56	—	(1,32)	1,49	—	(1,24)	0,90	—	(0,69)
12	$\varkappa$	0,38	(0,22)	(0,33)	0,35	(0,26)	0,24	—	(0,21)	0,22	—	(0,21)	0,13	—	(0,10)
13	R	53,3	67	55	—	58	56,8	—	56	57,4	—	54	61	—	57
14	$n\,(R)$	5,41	(9,23)	(5,86)	7,82	(6,67)	6,48	—	(6,43)	6,67	—	(6,05)	6,99	—	(6,85)
15	$n\,(Pr)$	6,4	—	—	—	—	—	8,972	—	7,0	9,450	—	6,8	9,499	—
16	k	0,33	(0,32)	(0,31)	0,39	(0,29)	0,26	—	(0,25)	0,31	—	(0,25)	0,20	—	(0,17)
17	$\varkappa$	0,16	(0,13)	(0,14)	(0,11)	(0,11)	0,12	—	(0,13)	0,12	—	(0,10)	0,10	—	(0,08)
18	R	13,9	20,6	16,8	—	21,3	15,8	—	12,2	15,0	—	19,3	22,0	—	15,6
19	$n\,(R)$	2,06	(2,53)	(2,26)	(3,4)	(2,59)	2,20	—	(1,95)	2,15	—	(2,45)	2,10	—	(2,20)
20	$n\,(Pr)$	2,0	—	—	—	—	1,9	2,568	—	1,8	2,292	—	1,8	2,24	—

Beim Sender Nr. 13 war keine Wellenlänge gemessen worden, da er vorher aufgebraucht war. Es wurde daher die berechnete Grundschwingung verwendet. Die Temperaturen der Flüssigkeiten bei Reflexion und Absorption betrugen bei Nr. 3 und 4 17°, bei den übrigen Sendern etwa 21°. Die Abhängigkeit der Werte von der Temperatur wurde bisher nicht untersucht.[1]) Bei den zur Zeichnung der Kurven verwendeten Sendern zeigten die Wellenlängenkurven keine übergelagerten kleinen Wellen, bei den Sendern mit eingeklammerten Werten hingegen war meist ein kleiner Prozentsatz davon vorhanden, bis etwa 10 Proz. des größten Ausschlages. Durch Nichtberücksichtigung dieser kleinen Wellen, für welche anscheinend ein kleineres n und k in Frage kommt, könnte n etwas zu klein ausgefallen sein. Bei den Sendern Nr. 3 und 4 waren die Reflexionsmessungen, bei Nr. 4 auch die Absorptionsmessungen besonders oft und sorgfältig wiederholt worden (vgl. S. 310 und 311), so daß diese Werte als besonders zuverlässig gelten können. Über die Genauigkeit der einzelnen Messungen vgl. S. 301, 310, 312, 314.

Wie man sieht, war die Zeichnung der Kurven ohne Schwierigkeit möglich. Die Eckertschen Messungen passen gut zu den übrigen bis auf n und k für $\lambda = 17{,}5$ mm, wo eine zurzeit noch nicht erklärbare Abweichung vorliegt. Auch die von Marx für Alkohol und die von Cole für Wasser und Alkohol gefundenen Werte fügen sich den Kurven ein. Die übrigen Werte anderer Beobachter liegen allerdings weiter ab, besonders diejenigen Lampas für Wasser wie für Alkohol. Für Sender Nr. 8, $\lambda' = 4{,}13$, ist n zu klein und $\varkappa$ zu groß ausgefallen. Auch die entsprechenden Punkte für Wasser würden eine Verschiebung im gleichen Sinne vertragen. Es scheint also bei diesem Sender aus einem jetzt nicht mehr sicher feststellbaren Grunde, vielleicht durch übergelagerte kleine Wellen, das Reflexionsvermögen etwas zu klein bestimmt zu sein. In der Tat ergibt das Beobachtungstagebuch, daß λ zuerst und R ganz am Schlusse bestimmt war, wo die Sender abgenutzt waren und erfahrungsgemäß Neigung zur Ausbildung kleiner Wellen zeigten. Von den Prismenwerten liegen beim Alkohol die meisten etwas tiefer als die Kurve,

1) Vgl. hierüber Fr. Eckert, a. a. O. S. 22.

beim Wasser passen sie besser. Die eingeklammerten Werte der Tab. 4 liegen meist auch nicht in allzu großer Entfernung von den Kurven. Nur die Werte für Wasser beim Sender Nr. 9 fallen ganz heraus. Die Kurve n (Fig. 10) hätte man auch durch Lampas Punkte legen können, aber es ist doch fraglich, ob n jenseits des Absorptionsstreifens noch einmal so hohe Werte annimmt. Daher ist es vorläufig unterlassen worden.

Auch aus den Absorptionskurven kann, wenn die Dämpfung nicht gar zu groß ist, n bestimmt werden. Die Genauigkeit ist allerdings keine große, da wegen des starken Abfalls die Lage der Maxima und Minima nur annäherungsweise bestimmt werden kann. Mitunter traten übergelagerte kleine Wellen auf, die bei der Aufnahme der Wellenlängenkurve in Luft nicht bemerkt worden waren und daher auch eine Bestimmung von n nicht zuließen. Bei systematischer Untersuchung müßte sich aber auch aus den Absorptionskurven mehr herausholen lassen, insbesondere für die übergelagerten kleinen Wellen, wenn die Grundschwingung des Senders in das Gebiet stärkster Absorption verlegt wird und damit eine gute Isolierung der weniger stark absorbierten kleinen Wellen erzielt wird. Für einige große Wellen wurden annehmbare Werte erzielt, z. B. bei Sender Nr. 4 $n = 7{,}5$ für Wasser und $n = 2{,}6$ für Alkohol, bei einem anderen Sender von derselben berechneten Grundschwingung $n = 7{,}0$ für Wasser. Weniger gut stimmen die Werte beim Sender Nr. 3, $n = 7{,}4$ für Wasser und 1,7 für Alkohol.

Noch eine andere Messung möge hier Platz finden. Der auf S. 307 erwähnte, mit Parabelgitter versehene Sender, der eine einigermaßen reine Welle von $\lambda = 3{,}0$ mm geliefert hatte, wurde mit einem der empfindlichen Galvanometer hinsichtlich der Brechung, Reflexion und Absorption untersucht. Die Absorptionskurve (g in Fig. 5), in dem mit Wasser beschickten Quarzinterferometer, ohne Bezugskurve, aber von rechts nach links aufgenommen, ergab $\lambda = 0{,}7$ mm in Wasser, also zusammen mit $\lambda = 3{,}0$ mm in Luft, $n = 4{,}3$, ein durchaus möglicher Wert.

Bei dieser Kurve g (Fig. 5) war vergessen worden, Bezugspunkte zu messen, so daß zwar λ, aber nicht k bestimmt werden konnte. Die Wiederholung der Absorptions-

messung nach zwei Tagen ergab $\lambda = 0{,}16$ mm in Wasser, für die Absorption aber einen solchen Wert, daß die Einsetzung der Grundschwingung des Senders, $\lambda = 18{,}8$ mm, in Formel (5) (S. 808) ein komplexes n ergeben hätte. Mit $\lambda = 3{,}0$ mm aber ergab sich $k = 1{,}98$ und ein reelles $n = 6{,}0$. Den gleichen Wert ergab das Prisma. Daß dieser Wert größer ist als der aus der ersten Absorptionskurve unmittelbar bestimmte $n = 4{,}3$, kann nicht überraschen, da die kleine Welle nicht ganz rein war. Der Wert $\lambda = 0{,}16$ mm im Wasser, der aus der Absorptionskurve g folgt, würde wieder mit $\lambda = 3{,}0$ mm in Luft ein viel zu großes n ergeben. Es waren aber mit demselben Sender auch λ-Kurven aufgenommen worden, die $\lambda = 1{,}2$ und $\lambda = 1{,}0$ mm in Luft ergaben, denn die kleinen Wellen ließen sich bisher nicht beliebig reproduzieren. Dies würde $n = 7{,}5$ und $n = 6{,}3$ ergeben. Wenn man übrigens $\lambda = 1{,}2$ oder 1,0 mm als die zur zweiten Absorptionskurve g gehörige Luftwelle ansieht (statt 3,0 mm, welche $k = 1{,}98$ ergab), so folgt auch für k ein Wert, der einigermaßen zu der Kurve k in Fig. 10 paßt, wenn man sie weiter nach kleinen Wellen verlängert denkt. Dazu kommt noch, daß auch das Reflexionsvermögen des Äthylalkohols kleiner gefunden wurde als bei allen anderen Sendern, nämlich 9,2 Proz. Berechnet man daraus n ohne Berücksichtigung der Absorption, die ja in diesem Gebiete schon fast ohne Einfluß ist, so ergibt sich $n = 1{,}8$, ein Wert, der ganz gut zur verlängerten n-Kurve in Fig. 10 paßt.

Durch Wiedergabe dieser Vorversuche, die als solche vorläufig noch nicht in die Kurven von Figg. 10 und 11 eingetragen werden mögen, sollte nur gezeigt werden, daß die Möglichkeit zu bestehen scheint, auch mit den gefundenen kleinen Wellen Dispersionsuntersuchungen anzustellen. Allerdings erfordert dies ein empfindlicheres Galvanometer, als es bisher zur Verfügung stand, wenn zuverlässige Ergebnisse erzielt werden sollen.

Lindman[1]) legt bei seinen auf S. 805 erwähnten Versuchen Wert darauf, objektiv im Luftraum vorkommende stehende elektrische Wellen nachgewiesen zu haben. Man kann hier eine ähnliche Frage stellen. Wenn ein Sender eine bestimmte Grundschwingung hat und die Interferenzkurve,

1) Karl F. Lindman, a. a. O. S. 551.

mit einem Empfänger von einer gleichen oder anderen Grundschwingung aufgenommen, eine von der Grundschwingung des Senders erheblich abweichende Wellenlänge ergibt, welche Wellenlänge ist dann für die mit demselben Sender und Empfänger bestimmte Absorption, Reflexion und Brechung maßgebend?

Die Messungen Nr. 3 und 4 (Tab. 4) geben hierauf eine Antwort. Sie sind mit Sendern von nahezu derselben Grundschwingung, aber verschiedenen Empfängern aufgenommen und zeigen ganz verschiedene Wellenlänge, Absorption und Reflexion, die aber alle gut zu den Kurven in Figg. 10 und 11 passen, wenn man die gemessene Wellenlänge auch für Absorption und Reflexion als maßgebend ansieht. Wollte man hingegen z. B. bei Nr. 3 die Wellenlänge der Grundschwingung des Senders zur Berechnung von k verwenden, so würden diese Werte, sowie diejenigen für n und $\varkappa$, nicht mehr zu den Kurven stimmen.

Wenn auch diese eine Beobachtung noch nicht quantitativ völlig entscheidend ist, so kann man doch schon daraus schließen, daß bei Absorption, Reflexion und Brechung im wesentlichen dieselbe Schwingung maßgebend ist, die bei der Wellenlängenbestimmung in der Interferenzkurve auftritt, gleichviel welche Grundschwingung Sender und Empfänger haben. Man kann daher die gedämpfte Grundschwingung des Senders nebst Oberschwingungen auch objektiv als Spektrum ansehen, dieses Spektrum in schmale Streifen zerlegt denken und annehmen, daß der Empfänger auf jeden dieser schmalen Streifen in einem seinem eigenen Spektrum entsprechenden Maße anspricht, und daß ferner jeder solcher schmale Streifen die seiner Wellenlänge zukommende Absorption und Reflexion besitzt. Das gleiche Ergebnis würde dann wohl auch ohne besondere Messungen für die Brechung auszusprechen sein. Die vorstehenden Ausführungen sind im Einklang mit der zuerst von Sarasin und de la Rive[1]) ausgesprochenen Erklärung der „multiplen Resonanz" und den Untersuchungen von Garbasso und Aschkinaß[2]) über Brechung elektrischer Wellen in einem prismatisch angeordneten Resonatorensystem.

1) Eduard Sarasin und Lucien de la Rive, Compt. rend. 110. S. 72. 1890.

2) A. Garbasso und E. Aschkinass, a. a. O.

11. *Zusammenfassung.* Es wurde die Dispersion von Wasser und Äthylalkohol zwischen 7 und 35 mm Wellenlänge untersucht mit einer Versuchsanordnung, die für die größeren Wellen zwar optisch nicht mehr ganz einwandfrei war, aber noch befriedigende Ergebnisse gezeitigt hat. Die hauptsächlichste Beobachtungsreihe, zusammen mit den von Fr. Eckert angestellten Versuchen, ergab für Absorptionskoeffizient k, Absorptionsindex $\varkappa$ und Brechungsverhältnis n ziemlich glatte Kurven, und zwar für Wasser (Fig. 10, S. 315) einen Absorptionsstreifen bei $\lambda = 22$ mm, für Alkohol (Fig. 11, S. 315) allmählichen Abfall der Kurven nach kleineren Wellen hin. Die mit Prisma bestimmten sowie weniger zuverlässige, von Vorversuchen stammende Werte lagen meist auch noch in der Nähe der Kurven. Von den von anderen Beobachtern stammenden Werten stimmen einige sehr gut zu den Kurven, andere liegen weit ab.

Ferner wurden auf vielen zur Bestimmung der Wellenlänge aufgenommenen Interferenzkurven kleine Wellen von $\lambda = 5$ mm bis hinab zu 0,1 mm übergelagert gefunden, die, wenigstens teilweise, als Oberschwingungen des Senders anzusprechen sind. Es wurden einige Vorversuche angestellt, um solche kleine Wellen zu isolieren und zu Dispersionsuntersuchungen zu verwenden. Für die Isolierung erscheint neben den auf S. 305 besprochenen Versuchen aussichtsvoll die Verwendung von Oberschwingungen, deren Grundschwingung im Gebiete stärkster Absorption des Wassers liegt und durch eine dünne Wasserschicht völlig absorbiert werden kann, sowie die Verwendung von Resonatorengittern, ähnlich wie bei den Rubensschen Reststrahlenversuchen. Die Fortsetzung dieser Versuche erfordert eine empfindlichere Meßanordnung.

Zum Schlusse möchte ich mir erlauben, meinem hochverehrten Chef, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. O. Wiener, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das der Arbeit entgegengebrachte rege Interesse und die Bewilligung aller erforderlichen Hilfsmittel.

Leipzig, Phys. Inst. d. Universität, im Juni 1919.

(Eingegangen 4. Dezember 1919.)

2. *Die Trägheit der Elektrizität*[1]) *(eine Kritik); von Richard Gans.*

De Heen[2]) gibt ein Experiment an, mittels dessen er die Trägheit der Elektrizität, welche in einem metallischen Drahte fließt, erwiesen zu haben glaubt.

Wegen der Wichtigkeit des Problems wollen wir die fragliche Erscheinung theoretisch etwas eingehender erörtern. Wir halten uns dabei an de Heens eigene Darstellung.

Nehmen wir an, daß in einem spiralförmigen Rohre (Fig. 1), welches in seiner eigenen Ebene um die Achse o drehbar ist, eine Flüssigkeit sich bewege. Dann wird eine

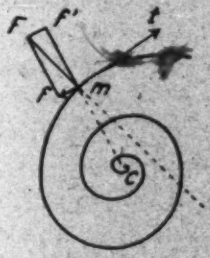


Fig. 1.

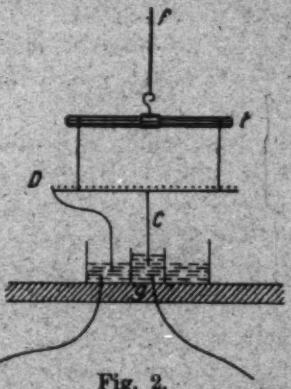


Fig. 2.

Zentrifugalkraft F entstehen, welche in zwei zueinander senkrechte Komponenten f und f' zerlegt werden kann, von denen letztere die Richtung cm hat, während erstere das als starr gedachte System zu drehen sucht. Diese Kraft ist von der Strömungsrichtung unabhängig.

Diese Überlegungen wendet de Heen auf die Elektrizität an, welche durch eine aus Kupferdraht gebildete Spirale D fließt (Fig. 2). Diese ist an einem Faden f aufgehängt und

1) Vgl. R. Gans, Contribucion al estudio de las ciencias. Serie matemático-física 2. S. 223. 1918.

2) P. de Heen, La matière, sa naissance, sa vie, sa fin. Bruxelles 1905, S. 24; vgl. auch Mémoires de la Soc. royale des Sciences de Liège (3) 6. 1905.

hat ihre Stromzuleitungen durch das zylindrische, mit Quecksilber gefüllte Gefäß G und die ringförmige, ebenfalls Quecksilber enthaltende Rinne, welche G umgibt.

Er beobachtet nun tatsächlich eine Ablenkung, und zwar mit einer ganz rohen und unempfindlichen Anordnung, die er in einer Photographie wiedergibt; doch muß es befremden, daß er dieselbe ohne weiteres als den erwarteten Effekt deutet, der doch vielfach vergeblich gesucht worden ist und doch höchstens mit sehr empfindlichen Apparaten entdeckt werden könnte.

Er hat den Versuch ganz oberflächlich und ohne irgendwelche Kritik angestellt; er hat sich nicht überlegt, welche Folgerungen man aus der quantitativ gemessenen Ablenkung ziehen könnte, welches die günstigste Form der Stromkurve wäre, und welche Fehlerquellen ihm die Erscheinung etwa vorgetäuscht haben könnten.

Alle diese Punkte sollen im folgenden diskutiert werden.

Ein Elektron der Masse m bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kurve s, der wir aus Gründen der Allgemeinheit doppelte Krümmung zuschreiben wollen. Dadurch entsteht die Zentrifugalkraft $f = \frac{m v^2}{\varrho}$ in Richtung des Krümmungsradius ϱ.

Enthält die Volumeneinheit N Elektronen, habe der Draht den Querschnitt q, so daß auf der Länge ds des Drahtes sich $N q ds$ Elektronen befinden, so ergibt sich als Kraft auf das Längenelement ds der Wert $dF = N m v^2 q \frac{ds}{\varrho}$ in Richtung des Krümmungsradius, so daß die Komponenten die Werte haben:

$$(1) \qquad dF_x = N m v^2 q \frac{\cos(\varrho, x)}{\varrho} ds$$

und zwei entsprechende Gleichungen.

Das Drehmoment um die z-Achse ist also:

$$(2) \quad C_z = \int (x\, dF_y - y\, dF_x) = N m v^2 q \int \frac{x \cos(\varrho, y) - y \cos(\varrho, x)}{\varrho} ds.$$

Um die Abhängigkeit dieses Ausdrucks von der Stromstärke i zu übersehen, führen wir die Ladung e des Elektrons ein und haben:

$$(3) \qquad i = N e v q,$$

so daß

$$(4) \qquad N m v^2 q = \frac{m i^2}{N e^2 q}$$

wird.

Definieren wir die Beweglichkeit u des Elektrons durch die Beziehung:

$$v = u e E, \tag{5}$$

wenn E die Feldstärke ist (vielfach wird auch v/E als Beweglichkeit bezeichnet), so folgt:

$$i = N e^2 u q E, \tag{6}$$

d. h.

$$\lambda = N e^2 u \tag{7}$$

ist die elektrische Leitfähigkeit. Mit dieser Beziehung nimmt (4) die Form an:

$$N m v^2 q = m u \frac{i^2}{\lambda q}. \tag{8}$$

Mißt man also das Drehmoment, welches eine Folge des Strömens der Elektrizität durch eine Drahtkurve bekannter Form ist, so kann man nach (2) und (4) $m/N e^2$ oder nach (8) $m u$ berechnen.

Da man den Wert von e/m[1]) sowie den der Elementarladung e kennt, könnte man also durch eine derartige Messung die Anzahl Elektronen in der Volumeneinheit N und ihre Beweglichkeit u, zwei für unsere Kenntnis der Konstitution der Metalle wichtige Konstanten, ermitteln.

Alles das scheint de Heen völlig entgangen zu sein. Sonst müßte er zweifellos versucht haben, das von ihm beobachtete Drehmoment quantitativ zu messen.

Auch hat er sich nicht bestrebt, seinem Draht die günstigste Form zu geben, was durch folgende Überlegung leicht möglich ist.

Nach (2) und (8) gilt:

$$C_z = m u \frac{J}{e} W, \tag{9}$$

wo l die ganze Drahtlänge, $J = i^2 l/\lambda q$ die Joulesche Wärme, W das nur von der Kurvenform abhängige Integral:

$$W = \int \frac{x \cos(\varrho, y) - y \cos(\varrho, x)}{\varrho} ds \tag{10}$$

bedeutet.

1) R. C. Tolman und F. Dale Stewart, Phys. Rev. (2) 8. S. 97. 1916 haben das umgekehrte Experiment des hier beschriebenen ausgeführt, indem sie den Strom beobachtet haben, der durch Beschleunigung des Leiters hervorgerufen wird, und haben auf diese Weise e/m bestimmt. Es ergab sich, daß die spezifische Ladung ungefähr gleich ist dem für langsam bewegte freie Elektronen geltenden Wert.

Im Bestreben, W zu einem Maximum zu machen, formen wir (10) um mittels der Beziehungen:

$$(11)\quad \cos(\varrho, x) = -\varrho\frac{d^2x}{ds^2};\quad \cos(\varrho, y) = -\varrho\frac{d^2y}{ds^2};\quad \cos(\varrho, z) = -\varrho\frac{d^2z}{ds^2}$$

und erhalten:

$$(12)\quad \begin{aligned} W &= \int\left(y\frac{d^2x}{ds^2} - x\frac{d^2y}{ds^2}\right)ds \\ &= \int\frac{d}{ds}\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right)ds = \left|y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right|_1^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also das überraschende Resultat, daß W überhaupt nicht von der Kurvenform, sondern nur von der Lage und Richtung seiner Endpunkte abhängt. W wird demnach möglichst groß, wenn der Draht geradlinig ist und zwei kleine, zu seiner Längserstreckung senkrechte horizontale Spitzen hat (vgl. Fig. 3). Diesen Draht müßte man in seinem Mittelpunkte O horizontal aufhängen, dann hätte W den Wert l.

Fig. 3.

Wir brauchen wohl nicht zu bemerken, daß es praktisch kaum möglich sein würde, den Strom einem Drahte der Form, wie sie Fig. 3 aufweist, zuzuführen.

Des weiteren sehen wir, daß de Heen überhaupt keine Ablenkung hätte beobachten dürfen, da bei seiner Versuchsanordnung (Fig. 2) die Enden des Drahtes vertikal waren $\left(\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = 0\right)$.

Der ganze von ihm festgestellte Effekt war also Versuchsfehler.

Es fragt sich schließlich, welche Fehlerquelle es wohl war, die de Heen die Trägheit der Elektrizität vorgetäuscht hat. Sicherlich wohl die elektromagnetischen Kräfte zwischen dem festen und dem beweglichen Teile der Strombahn, die die Tendenz haben, die Selbstinduktion möglichst zu vergrößern, und die auch von der Stromrichtung unabhängig sind.

Er hätte nachweisen müssen, daß diese trivialen Kräfte nicht ins Spiel kamen. Doch wenn er sie eliminiert hätte, würde sicherlich kein Drehmoment mehr übrig geblieben sein.

La Plata, Instituto de Fisica, 8. Mai 1918.

(Eingegangen 22. November 1919.)

3. *Ein Ultrafiltrierapparat;* *von Richard Gans.*

Bechhold[1]) hat ein Verfahren der Ultrafiltration mittels Kollodium- und Gelatinefilter beschrieben und vor allem den Einfluß der Gallertekonzentration auf die Durchlässigkeit der Filter entdeckt. Nach seinem Verfahren ist es möglich, ultramikroskopische Teilchen auf dem Filter zurückzuhalten, während Kristalloide ohne weiteres durchs Filter laufen, so daß man eine Methode hat, die unvergleichlich viel schneller arbeitet als die der Dialyse. Man kann aber auch, je nach der Gelatinekonzentration, kleine Ultrateilchen durchs Filter gehen lassen und größere zurückhalten, auf diese Weise also eine Trennung nach der Teilchengröße vollziehen.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist die Beschreibung einer Anordnung und der Herstellungsart von Ultrafiltern, die im Prinzip dem Bechholdschen Verfahren ähnlich, aber wesentlich einfacher sind, um die Methode dem allgemeinen Laboratoriumsgebrauch zugänglicher zu machen.

Dieses Verfahren hat sich im hiesigen Institut erprobt bei der Ultrafiltration von kolloidalen Metallösungen zwecks Bestimmung ihrer geometrischen Form[2]) und Trennung derselben nach ihrer Größe. Es wurden auch von Frl. Villegas[3]) Hämoglobinlösungen, Suspensionen von Eiweiß, Seren, Milch usw. filtriert und auf diese Weise Flüssigkeiten ohne Teilchen erhalten. Ferner konnte sie in einigen Minuten quantitativ Kristalloide, wie Arsenverbindungen, Alkaloide usw. von organischen Substanzen, wie Serum, Milch, Eiweiß usw., trennen.

---

1) H. Bechhold, Zeitschr. f. Elektrochemie **12**. S. 777. 1906; Kolloid-Zeitschr. **1**. S. 107. 1906; **2**. S. 3. 1907; Zeitschr. f. phys. Chem. **60**. S. 257. 1907; **64**. S. 328. 1908.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **47**. S. 270. 1915; R. Gans und R. Calatroni. Ann. d. Phys. **61**. S. 465. 1920.

3) L. Sarlo Villegas, Doktordiss. d. Univ. La Plata 1919.

Der in der Photographie (Fig. 1) wiedergegebene Apparat (Schema Fig. 2) besteht aus folgenden Stücken. Ein Glaszylinder C (für viele Zwecke genügt auch ein innen vergoldeter Messingzylinder) von 9 cm Länge und 7 cm Durchmesser ist zwecks Dichtung mit gut eben geschliffenen Rändern von 1 cm Breite versehen. An den unteren Rand wird unter Zwischenschaltung des Gummiringes g_2 der Messingring A angedrückt, an den oberen Rand die Messingscheibe D, auch unter Zwischenschaltung eines Gummirings g_1. Das Ganze wird zusammengehalten durch vier Messingstangen (in der

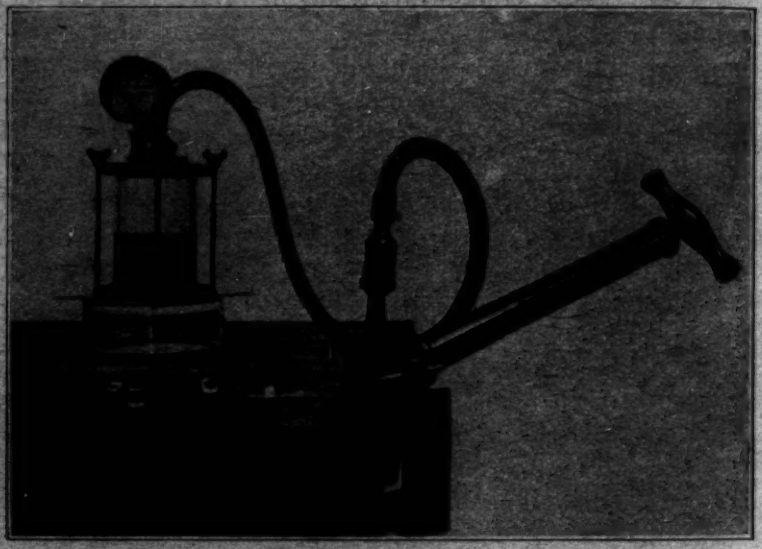


Fig. 1.

Figur sind nur zwei B_1 und B_2 sichtbar), die unten eine Sechskantmutter, oben eine Flügelmutter zum Anziehen tragen.

Die Scheibe D hat in der Mitte ein kreisförmiges Loch, das durch die Scheibe E mittels Gummidichtung und dreier Flügelschrauben geschlossen ist. Diese hat einen Rohransatz T zwecks Verbindung mit der Luftpumpe. Da es sich um geringe Überdrucke von 1—3 Atmosphären handelt, genügt als solche eine Fahrradpumpe. Ferner hat D noch einen Rohransatz zur Anbringung des Manometers M.

Zwischen der Gummidichtung g_2 und dem Bronzering A befindet sich ein Metallblech K von 9 cm Durchmesser, um

das auf ein Blatt Filtrierpapier gelegte Ultrafilter zu tragen. Am besten ist dieses Blech aus Platin, doch kann, je nach den Zwecken, auch Nickel, Aluminium oder vergoldetes Messing in Betracht kommen. Es hat siebartig 1 mm große Löcher, um die ultrafiltrierte Flüssigkeit hindurchzulassen.

Ein äußerst einfaches Verfahren, um die Kollodiumfilter herzustellen, ist das folgende. 12,5 g Schießbaumwolle werden mit einer Menge absoluten Alkohol versetzt, die genügt, jene zu durchtränken und dann Äther hinzugegossen, bis das Ganze 500 ccm ausmacht.[1]) Von dieser Lösung gießt man ein wenig auf eine Glasplatte, läßt den Überschuß ablaufen, und taucht sie, wenn der Äther verdampft ist, zum Gelatinieren mitsamt der Glasplatte in ein Gefäß mit Wasser, in dem sich das Filter durch Hin- und Herbewegen der Glasplatte von ihr ablöst.

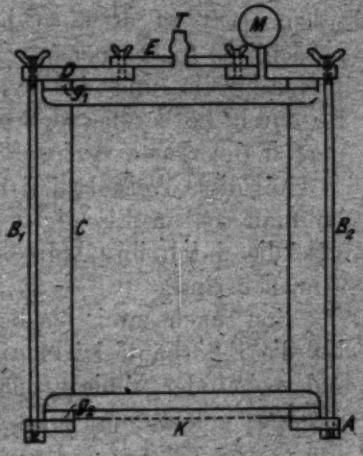


Fig. 2.

Solche Filter sind undurchlässig für Kolloide. Sollen kleine Teilchen hindurchgehen, so setzt man der Lösung Eisessig (z. B. $^1/_2$ Proz.) hinzu. Die Durchlässigkeit hängt von der Essigsäuremenge ab.

Die Filter müssen in fließendem Wasser gut gewaschen werden, und dann kann man sie in Wasser aufbewahren, dem man ein wenig Chloroform oder Formol zusetzt, um Pilzbildung zu vermeiden.

Anstatt der oben angegebenen Verhältnisse von Alkohol und Äther lassen sich auch nach Frl. Villegas gleiche Teile derselben benutzen, wodurch man erreicht, daß die Filtration rascher vor sich geht.

Es ist wichtig, daß die Schießbaumwolle rein und trocken ist.

Ich füge noch folgende Erfahrungen hinzu, die Herr Dr. Teófilo Isnardi am hiesigen Institut gemacht hat.

Die Durchlässigkeit der Kollodium-Essigsäurefilter hängt nicht nur von der Menge Eisessig ab, sondern auch vom Alter

1) G. E. Malfitano, Compt. rend. 189. S 1221. 1904.

der Mischung, oder besser gesagt von der Zeit, die nach dem Zusetzen des Eisessigs verstrichen ist. So ist z. B. eine frische Mischung vollkommen undurchlässig.

Manchmal haben die Filter sehr kleine Löcher, die zwar Flüssigkeit nur unter Druck hindurchlassen, aber doch nicht als Poren angesehen werden können. Diese Löcher lassen Lösung hindurch, die häufig völlig den Eindruck macht, als ob sie ultrafiltriert wäre (wenigstens wenn die Filter Eisessig enthalten, denn sonst muß das Filtrat ja ganz farblos sein), besonders wenn man schon Lösung durchs Filter getrieben hat, deren größere Teilchen die Löcher zum Teil verstopft haben. Oft ist es möglich, ein Löcher enthaltendes Filter tatsächlich zu brauchen, indem man zunächst Flüssigkeit hindurchtreibt und das erste Filtrat weggießt. Man kann die durch Löcher hervorgerufenen Irrtümer vermeiden durch Übereinanderlegen zweier Filter.

Auf diese Weise läßt sich feststellen, daß Kollodiumlösung, der man soeben Eisessig zugesetzt hat, undurchlässige Filter gibt, die durch ihre vollkommene Durchsichtigkeit leicht erkenntlich sind.

Erst nach zwei Wochen ist die Lösung so beschaffen, daß die Filterhäute leicht opaleszierend, vollkommen homogen und mehr oder weniger durchlässig sind, je nach der Menge Eisessig, welche man zugesetzt hat.

La Plata, Instituto de Fisica, 2. Juli 1919.

(Eingegangen 22. November 1919.)

4. *Ultramikroskopische Studien.* (*Methoden zur Formbestimmung subultramikroskopischer Teilchen*); *von Richard Gans.*

§ 1. Die elektromagnetischen Hauptachsen.

Wir nennen ein Teilchen subultramikroskopisch, wenn seine Dimensionen klein gegen die Wellenlänge des Lichts sind, und zwar genauer gesagt, klein gegen die Wellenlänge in dem Medium, welches das Teilchen umgibt.

Nehmen wir an, daß auf ein solches Teilchen eine ebene, linear polarisierte Lichtwelle fällt, so wird dasselbe das optische Feld stören. Im Innern der Partikel kann man das elektrische Feld als quasistatisch auffassen, und kennt man die Dielektrizitätskonstante des Teilchens und seines umgebenden Mediums, so läßt sich prinzipiell das neue Feld berechnen. Praktisch wird eine solche Berechnung nur in ganz speziellen Fällen einfacher Teilchenform (z. B. Ellipsoide) möglich sein.

Bei ganz beliebiger Form der Partikel können wir jedoch auch einige wichtige Schlüsse ziehen.

Das freie elektrische Moment $\mathfrak{p}$ des Teilchens, welches definiert ist durch die Formel:

$$\mathfrak{p} = \int \varrho\, \mathfrak{r}\, dS, \tag{1}$$

unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor von einem festen Punkt an, unter dS ein Volumelement des Teilchens, unter ϱ die Dichte seiner freien Ladungen verstanden, ist wegen der Linearität der elektromagnetischen Grundgleichungen eine lineare Vektorfunktion der ursprünglichen Feldstärke $\mathfrak{E}$, so daß

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p}_x &= g_{11}\mathfrak{E}_x + g_{12}\mathfrak{E}_y + g_{13}\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{p}_y &= g_{21}\mathfrak{E}_x + g_{22}\mathfrak{E}_y + g_{23}\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{p}_z &= g_{31}\mathfrak{E}_x + g_{32}\mathfrak{E}_y + g_{33}\mathfrak{E}_z \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ist, wo die g von der Form des Teilchens und der Richtung der Koordinatenachsen abhängige Konstanten sind.

Im allgemeinen fallen also die Richtungen des Moments und der Feldstärke nicht zusammen.

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den $\mathfrak{E}$ ergibt sich:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = h_{11}\,\mathfrak{p}_x + h_{12}\,\mathfrak{p}_y + h_{13}\,\mathfrak{p}_z \\ \mathfrak{E}_y = h_{21}\,\mathfrak{p}_x + h_{22}\,\mathfrak{p}_y + h_{23}\,\mathfrak{p}_z \\ \mathfrak{E}_z = h_{31}\,\mathfrak{p}_x + h_{32}\,\mathfrak{p}_y + h_{33}\,\mathfrak{p}_z . \end{cases}$$

Die elektrische Energie, welche dem Vorhandensein dieses Moments entspricht, sei W. Dann gilt:

$$(4)\quad dW = \mathfrak{E}_x\,d\,\mathfrak{p}_x + \mathfrak{E}_y\,d\,\mathfrak{p}_y + \mathfrak{E}_z\,d\,\mathfrak{p}_z .$$

Da W nur vom augenblicklichen Zustand abhängt, muß (4) ein vollständiges Differential sein, d. h. es bestehen die Beziehungen:

$$(5)\quad \mathfrak{E}_x = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_x}; \qquad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_y}; \qquad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_z},$$

woraus:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial \mathfrak{p}_x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \mathfrak{p}_y} \text{ usw.}$$

oder:

$$(5')\quad h_{ik} = h_{ki}$$

und nach einem bekannten Satze der Algebra:

$$(6)\quad g_{ik} = g_{ki}$$

folgt, so daß sich durch Integration von (4) ergibt:

$$(7)\quad W = \tfrac{1}{2}\,(h_{11}\,\mathfrak{p}_x^2 + h_{22}\,\mathfrak{p}_y^2 + h_{33}\,\mathfrak{p}_z^2 + 2\,h_{23}\,\mathfrak{p}_y\,\mathfrak{p}_z + \ldots) .$$

Nach dem Hauptachsenproblem der Oberflächen zweiter Ordnung muß es also drei aufeinander senkrechte Richtungen ξ, η, ζ geben, für die

$$(8)\quad W = \tfrac{1}{2}\,(h_1\,\mathfrak{p}_\xi^2 + h_2\,\mathfrak{p}_\eta^2 + h_3\,\mathfrak{p}_\zeta^2)$$

ist, d. h. für die nach (5):

$$(9)\quad \mathfrak{E}_x = h_1\,\mathfrak{p}_x; \quad \mathfrak{E}_y = h_2\,\mathfrak{p}_y; \quad \mathfrak{E}_z = h_3\,\mathfrak{p}_z$$

oder, wenn wir $h_1 = 1/g_1$; $h_2 = 1/g_2$; $h_3 = 1/g_3$ setzen:

$$(10)\quad \mathfrak{p}_\xi = g_1\,\mathfrak{E}_\xi; \quad \mathfrak{p}_\eta = g_2\,\mathfrak{E}_\eta; \quad \mathfrak{p}_\zeta = g_3\,\mathfrak{E}_\zeta$$

ist.

Diese drei Richtungen, die gekennzeichnet sind durch das Zusammenfallen der elektrischen Feldstärke mit dem

von ihr erregten Moment, mögen die elektromagnetischen Hauptachsen des Teilchens heißen.

Das ganze optische Verhalten eines subultramikroskopischen Teilchens ist durch die drei Koeffizienten g_1, g_2, g_3 bestimmt. Diese sind durch die Teilchenform vollständig gegeben, aber umgekehrt kann man aus ihnen nicht eindeutig auf die Form schließen. Deshalb kann man durch optische Untersuchungen zunächst nur diese Koeffizienten, und nicht die geometrische Form des Teilchens eindeutig ermitteln.

Der spezielle Fall $g_1 = g_2 = g_3$ z. B. gilt ebenso für die Kugel wie für den Würfel. Es ist deshalb unmöglich, in der subultramikroskopischen Optik zwischen diesen beiden Formen zu entscheiden.

Es gibt einen ähnlichen Fall in der Mechanik des starren Körpers. Alle Rotationsbewegungen um den Schwerpunkt hängen einzig und allein von dem Trägheitsellipsoid ab, welches auch nicht eindeutig die Form bestimmt.

Es ist aber zu berücksichtigen, daß die drei Koeffizienten g_1, g_2, g_3 auch die einzigen Größen sind, welche für uns bezüglich des optischen Verhaltens von Interesse sind.

Im allgemeinsten Falle sind die drei Koeffizienten komplex und haben für jede Wellenlänge einen bestimmten Wert.

Sind die Teilchen so groß, daß man überhaupt von der geometrischen Form sprechen kann (bei der Vereinigung einiger weniger Atome kann man das nicht), und kann man diesen Teilchen Brechungskoeffizient und Absorptionsindex des makroskopischen Materials zuschreiben, so käme die Frage, ob die Teilchen etwa die Form von Rotationsellipsoiden haben, darauf hinaus[1]), ob die Koeffizienten sich für alle Wellenlängen mittels desselben P in der Form darstellen lassen.

$$(11)\quad \begin{cases} g_1 = m_0^2 \dfrac{m'^2 - 1}{4\pi + (m'^2 - 1)P} V, \\ g_2 = g_3 = m_0^2 \dfrac{m'^2 - 1}{4\pi + (m'^2 - 1)P'} V, \end{cases}$$

wo m_0 den Brechungsexponenten der Umgebung, m' den (eventuell komplexen) Brechungsexponenten des Teilchens, V sein Volumen und P und P' zwei nur von den Achsenverhältnissen abhängige Größen bedeuten, die der Beziehung:

1) Vgl. R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 884. 1912.

(12) $$P + 2P' = 4\pi$$

genügen und durch die Formel:

(13) $$P = 4\pi \frac{1-e^2}{e^3}\left(\frac{1}{2e}\log\frac{1+e}{1-e} - 1\right),$$

bzw.

(14) $$P = \frac{4\pi}{e^2}\left(1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\arcsin e\right),$$

gegeben sind, je nachdem das Ellipsoid verlängert oder abgeplattet ist, unter:

(15) $$e = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}},$$

die numerische Exzentrizität der Meridianellipse mit den Halbachsen A und B verstanden.

Es ist möglich, daß Lord Rayleigh bereits den oben abgeleiteten Satz der elektromagnetischen Hauptachsen besessen hat. Leider ist es mir nicht möglich, das festzustellen, da mir die dazu nötige Literatur fehlt.

§ 2. Depolarisation des durch nichtmetallische Teilchen erzeugten Tyndallichtes.

Das von einer trüben Lösung seitlich ausgestrahlte Licht ist [illegible] polarisiert, wenn die Teilchen kugelförmig sind, es ist zum Teil depolarisiert, wenn die Form eine andere ist, und zwar ist der Depolarisationsgrad um so größer, je mehr die Form von der Kugel abweicht. Deshalb ist die Messung des Polarisationsgrades ein Mittel, um die Teilchenform zu bestimmen. Auf diese Methode wies ich bereits früher[1]) hin und entwickelte die entsprechenden Formeln, und zwar in dem komplizierteren Falle, daß die Teilchen metallisch sind.

Lord Rayleigh[2]) hat in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit die Formeln für den Depolarisationsgrad abgeleitet, die nichtmetallischen Teilchen entsprechen. Er scheint meine frühere Veröffentlichung nicht gekannt zu haben, da er sie nicht zitiert. Übrigens beschränkt er sich auf unendlich verdünnte Lösungen, denn nur für solche gilt der oben ausgesprochene Satz, daß kugelförmige Teilchen linear polarisiertes Licht abbeugen. Ich werde beweisen, daß die Depolarisation

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 896. 1912.
2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) 35. S. 373. 1918.

keineswegs ein sicheres Kriterium für Abweichung von der Kugelgestalt ist, und in der Tat stützen dementsprechende Beobachtungen, die Hr. Dr. Teófilo Isnardi auf meine Anregung hin an Gummiguttlösungen angestellt hat, meine Formeln.

Ich will deshalb im folgenden die Theorie der Depolarisation nichtmetallischer trüber Lösungen unter Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung der Teilchen ableiten.

Um diese gegenseitige Beeinflussung bestimmen zu können, haben wir das sogenannte molekulare Feld zu berechnen, welches ein System von Dipolen am Orte eines derselben erzeugt. Mit diesem Problem haben wir uns bereits in unserer Theorie des Paramagnetismus[1]) beschäftigt; wir brauchen also die entsprechenden Formeln mutatis mutandis nur anzuwenden.

Nach jener Arbeit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das molekulare Feld A Komponenten hat, die zwischen A_x und $A_x + dA_x$, A_y und $A_y + dA_y$, A_z und $A_z + dA_z$ liegen:

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} W\, dA_x \cdot dA_y \cdot dA_z \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3 a_{11} a_{22} a_{33}}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{A_x^2}{a_{11}} + \frac{A_y^2}{a_{22}} + \frac{A_z^2}{a_{33}}\right)} dA_x\, dA_y\, dA_z, \end{array} \right.$$

wo

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = C \iint q^2 \left(1 + \dfrac{\sin^2\varepsilon \cos^2\psi}{3}\right) F(\varepsilon, \psi)\, d\varepsilon\, d\psi, \\ a_{22} = C \iint q^2 \left(1 + \dfrac{\sin^2\varepsilon \sin^2\psi}{3}\right) F(\varepsilon, \psi)\, d\varepsilon\, d\psi, \\ a_{33} = C \iint q^2 \left(1 + \dfrac{\cos^2\varepsilon}{3}\right) F(\varepsilon, \psi)\, d\varepsilon\, d\psi. \end{array} \right.$$

ist. In diesen Formeln bedeutet:

$$(18)\qquad C = \frac{4\pi N}{5 s^3 m_0^4},$$

unter N die Anzahl Teilchen in der Volumeneinheit, unter m_0 den Brechungsindex des sie umgebenden Mediums, unter s den kleinsten Abstand verstanden, bis auf den die Mittelpunkte zweier Teilchen sich nähern können.

Ferner ist q der absolute Wert des Moments eines Dipols, $F(\varepsilon, \psi)$ die Verteilungsfunktion der Achsenrichtungen in Kugelkoordinaten ε, ψ.

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **49**. S. 149. 1916; **50**. S. 163. 1916.

Die in unserer magnetischen Arbeit angegebenen Werte für die Koeffizienten lauteten etwas anders, weil wir damals den absoluten Wert des Moments $q = \mu$ als konstant anzusehen hatten, und weil damals die Verteilung um die z-Achse herum symmetrisch war, also die Verteilungsfunktion von vornherein unabhängig von ψ war. Schließlich lag damals die Momentanachse fest im Teilchen, während das jetzt nicht der Fall ist; wir müssen jetzt also zwischen der Verteilungsfunktion der Achsen der Dipole $F(\varepsilon, \psi)$ und der der Figurenachsen der Teilchen $F'(\varepsilon', \psi')$ unterscheiden. (Von Figurenachse des Teilchens werden wir reden, weil wir es der Einfachheit halber als Rotationskörper auffassen wollen.)

Für die Orientierung der Teilchen sei keine Richtung ausgezeichnet, dieselbe sei gleichmäßig nach allen Seiten, so daß:

$$F'(\varepsilon_1', \psi')\, d\varepsilon'\, d\psi' = \frac{\sin\varepsilon'}{2\pi}\, d\varepsilon'\, d\psi' \tag{19}$$

gilt, eine Gleichung, in der ε' zwischen 0 und $\pi/2$, ψ' zwischen 0 und 2π liegen muß.

Da jeder Richtung der Figurenachse eine Richtung der Momentachse entspricht, gilt:

$$F'(\varepsilon', \psi')\, d\varepsilon'\, d\psi' = F(\varepsilon, \psi)\, d\varepsilon\, d\psi \tag{20}$$

für einander entsprechende Werte der Argumentenpaare.

Führen wir diese Beziehung in (17) ein und bezeichnen Mittelwerte über alle Teilchen in einer kleinen Kugel, welche den Dipol zum Mittelpunkt hat, durch eckige Klammern, so folgt:

$$(21)\begin{cases} a_{11} = C\left\{[q^2] + \frac{[q_z^2]}{3}\right\}; \quad a_{22} = C\left\{[q^2] + \frac{q_z^2}{3}\right\}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33} = C\left\{[q^2] + \frac{[q_z^2]}{3}\right\}. \end{cases}$$

Andererseits ergibt sich aus (16):

$$[A_x] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_x W\, d A_x\, d A_y\, d A_z = 0 \text{ usw.}$$

$$[A_y A_z] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_y A_z W\, d A_x\, d A_y\, d A_z = 0 \text{ usw.,}$$

während:

$$[A_x^2] = a_{11}; \quad [A_y^2] = a_{22}; \quad [A_z^2] = a_{33} \tag{22}$$

ist.

Wir behandeln nach dieser Vorbereitung zwei Fälle.

1. *Das einfallende Licht ist linear polarisiert.*

Die ein Teilchen erregende Kraft habe die Komponenten $K_x = 0$; $K_y = 0$; $K_z = K$.

Wir führen ein Koordinatensystem ξ, η, ζ ein, dessen ξ-Achse mit der Figurenachse des Teilchens zusammenfällt. Dann gelten für die Richtungskosinus der beiden Bezugssysteme die durch das Schema:

(23)

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

gegebenen Beziehungen, und es gilt, wenn wir die drei Konstanten g_1, g_2, g_3 der Gleichungen (10) jetzt mit g und g' bezeichnen ($g_1 = g$; $g_2 = g_3 = g'$):

$$K_\xi = K\alpha_3; \quad K_\eta = K\beta_3; \quad K_\zeta = K\gamma_3, \tag{24}$$

so daß das von K hervorgerufene Moment f die Komponenten hat

(25)

$f_\xi = g\ K_\xi = g\ K\alpha_3$	α_1	α_2	α_3
$f_\eta = g'\ K_\eta = g'\ K\beta_3$	β_1	β_2	β_3
$f_\zeta = g'\ K_\zeta = g'\ K\gamma_3$	γ_1	γ_2	γ_3

Multiplizieren wir diese Gleichungen nacheinander mit den nebenstehenden Koeffizienten, addieren sie dann, und berücksichtigen wir die zwischen den Richtungskosinus bestehenden Beziehungen, so folgt:

$$\begin{aligned} f_x &= K(g - g')\,\alpha_1\alpha_3 \\ f_y &= K(g - g')\,\alpha_2\alpha_3 \\ f_z &= K(g - g')\,\alpha_3^2 + Kg', \end{aligned} \tag{26}$$

so daß sich

$$f^2 = K^2[g'^2 + (g^2 - g'^2)\,\alpha_3^2] \tag{27}$$

ergibt.

Außer diesem Moment f, welches von der erregenden Kraft K hervorgerufen wird, existiert aber noch ein Moment p

welches von dem molekularen Felde A erzeugt wird, und das sich folgendermaßen berechnet:

$$(28)\quad \begin{cases} p_\xi = g\, A_\xi = g\,(a_1 A_x + a_2 A_y + a_3 A_z) & a_1 \mid a_2 \mid a_3 \\ p_\eta = g'\, A_\eta = g'\,(\beta_1 A_x + \beta_2 A_y + \beta_3 A_z) & \beta_1 \mid \beta_2 \mid \beta_3 \\ p_\zeta = g'\, A_\zeta = g'\,(\gamma_1 A_x + \gamma_2 A_y + \gamma_3 A_z). & \gamma_1 \mid \gamma_2 \mid \gamma_3 \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen nacheinander mit den nebenstehenden Koeffizienten der einzelnen Kolonnen und addiert sie dann, so folgt:

$$(29)\quad \begin{cases} p_x = A_x[(g-g')\,a_1^2 + g'] + A_y (g-g')\,a_1 a_2 \\ \qquad\qquad + A_z (g-g')\,a_1 a_3, \\ p_y = A_x (g-g')\,a_2 a_1 + A_y[(g-g')\,a_2^2 + g'] \\ \qquad\qquad + A_z (g-g')\,a_2 a_3, \\ p_z = A_x (g-g')\,a_3 a_1 + A_y (g-g')\,a_3 a_2 \\ \qquad\qquad + A_z[(g-g')\,a_3^2 + g']. \end{cases}$$

Das Gesamtmoment ist demnach:

$$(30)\qquad q = f + p.$$

Bei der Berechnung der Mittelwerte aus (26) und (29) berücksichtigen wir die Formeln:

$$[a_1^2] = [a_2^2] = [a_3^2] = \frac{1}{3};\quad [a_1^4] = [a_2^4] = [a_3^4] = \frac{1}{5};$$

$$[a_2^2 a_3^2] = [a_3^2 a_1^2] = [a_1^2 a_2^2] = \frac{1}{15}$$

und erhalten aus (26):

$$(31)\quad \begin{cases} [f_x^2] = \frac{K^2 (g-g')^2}{15};\quad [f_y^2] = \frac{K^2 (g-g')^2}{15}; \\ \qquad\qquad [f_z^2] = K^2 \left\{ \frac{(g-g')^2}{15} + B \right\}, \end{cases}$$

also:

$$(32)\qquad [f^2] = K^2 \left\{ \frac{(g-g')^2}{5} + B \right\},$$

wo B eine Abkürzung für:

$$(33)\qquad B = g'^2 + \frac{2}{3} g' (g-g') + \frac{2}{15} (g-g')^2$$

ist.

Aus (29) ergibt sich mit Berücksichtigung von (22):

$$(34)\quad \begin{cases} [p_x^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\dfrac{(g-g')^2}{15} + a_{11}B, \\ [p_y^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\dfrac{(g-g')^2}{15} + a_{22}B, \\ [p_z^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\dfrac{(g-g')^2}{15} + a_{33}B, \end{cases}$$

so daß

$$(35)\qquad [p^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\left\{\frac{(g-g')^2}{5} + B\right\}$$

folgt. Da ferner $[f_x p_x] = 0$ usw., erhalten wir aus (39), (32) und (35):

$$(36)\quad [q^2] = [f^2] + [p^2] = (K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33})\left\{\frac{(g-g')^2}{5} + B\right\}.$$

Aus den Gleichungen (21) ergibt sich somit:

$$(37)\quad \begin{cases} a_{11} = \dfrac{C}{3}\left\{\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right)\left(g^2 + 2g'^2 + \dfrac{(g-g')^2}{15}\right) + a_{11}B\right\} \\ a_{22} = \dfrac{C}{3}\left\{\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right)\left(g^2 + 2g'^2 + \dfrac{(g-g')^2}{15}\right) + a_{22}B\right\} \\ a_{33} = \dfrac{C}{3}\left\{\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right)\left(g^2 + 2g'^2 + \dfrac{(g-g')^2}{15}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + a_{33}B + K^2 B\right\}. \end{cases}$$

Da wir die Werte $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ sowie $a_{33} - a_{11}$ brauchen werden, addieren wir die Gleichungen (37) und subtrahieren ferner die erste von der dritten.

Auf diese Weise erhalten wir:

$$(38)\qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = \frac{\frac{10}{9}C(g^2 + 2g'^2)K^2}{1 - \frac{10}{9}C(g^2 + 2g'^2)}$$

und

$$(39)\qquad a_{33} - a_{11} = \frac{\frac{CB}{3}K^2}{1 - \frac{CB}{3}}.$$

Bevor wir weitergehen, müssen wir die Depolarisation definieren. Beobachten wir einen Lichtstrahl, der aus linear polarisiertem und natürlichem Licht gemischt ist und sich in Richtung der y-Achse fortpflanzt, mittels eines Nikols, dessen

Schwingungsebene den Winkel δ (vgl. Fig. 1) mit der z-Achse bildet, so wird die Intensität sich in der Form:

$$J = C_1 + C_2 \cos^2 \delta \tag{40}$$

darstellen lassen. C_1 rührt dabei von dem natürlichen Licht her, während C_2 die Intensität des parallel z schwingenden polarisierten Lichtes ist.

Der Messung direkt zugänglich ist, wie wir sehen werden, das Verhältnis der Intensitäten des horizontal und vertikal schwingenden Lichtes. Dementsprechend könnte man dies Verhältnis:

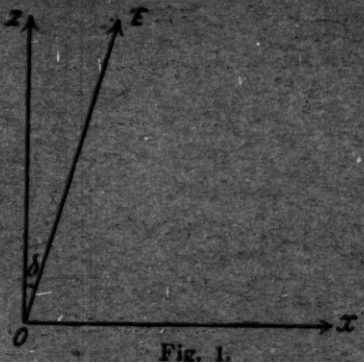


Fig. 1.

$$\Delta = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \tag{41}$$

als Depolarisation bezeichnen. Wir ziehen es aber vor, die Depolarisation durch die Größe:

$$\Theta = \frac{C_1}{C_2} \tag{42}$$

zu definieren. Es besteht dann die einfache Beziehung:

$$\Theta = \frac{\Delta}{1 - \Delta} \tag{43}$$

oder

$$\Delta = \frac{\Theta}{1 - \Theta}. \tag{43'}$$

Da C_1 die Intensität des horizontal schwingenden Lichtes, C_2 die Differenz zwischen der Intensität des vertikal und des horizontal schwingenden Lichtes ist, und da diese Intensitäten direkt proportional den Quadraten der in die entsprechenden Richtungen fallenden Momentkomponenten sind, so folgt:

$$\Theta = \frac{[q_z^2]}{[q_x^2] - [q_z^2]}. \tag{44}$$

Summieren wir, um Θ zu berechnen, die Gleichungen (21), so ergibt sich:

$$[q^2] = \frac{3}{10} \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{C}. \tag{45}$$

Führen wir diesen Wert in die erste und dritte Gleichung (21) ein, so folgt:

$$(46)\quad \begin{cases} [g_x^2] = \frac{3}{C}\left\{a_{11} - \frac{3}{10}(a_{11}+a_{22}+a_{33})\right\}, \\ [g_z^2] = \frac{3}{C}\left\{a_{33} - \frac{3}{10}(a_{11}+a_{22}+a_{33})\right\}, \end{cases}$$

so daß

$$(47)\quad \Theta = \frac{a_{11} - \frac{3}{10}(a_{11}+a_{22}+a_{33})}{a_{33} - a_{11}}.$$

Mittels der Gleichungen (37), (38) und (39) ergibt sich somit

$$(48)\quad \Theta = \frac{\frac{(g-g')^2}{15} + \frac{BC}{3}(g^2+2g'^2)}{B\left\{1 - \frac{10}{9}C(g^2+2g'^2)\right\}},$$

Führt man diese Formel in die Depolarisation Θ_0 für unendlich kleine Konzentration ($C=0$) ein, d. h.:

$$(49)\quad \Theta_0 = \frac{(g-g')^2}{15B},$$

so folgt:

$$(50)\quad \frac{\Theta - \Theta_0}{1 + \frac{10}{3}\Theta} = \frac{g^2 - 2g'^2}{3} C.$$

Dieser Ausdruck ist also der Konzentration direkt proportional.

Sind die Teilchen kugelförmig ($g = g'$), so ergibt sich aus (48)

$$(51)\quad \Theta = \frac{g^2 C}{1 - \frac{10}{3} g^2 C},$$

d. h. es existiert auch eine Depolarisation, die aber mit abnehmender Konzentration verschwindet. Demnach ist eine beobachtete Depolarisation noch kein Beweis für nichtkugelförmige Gestalt, sondern man muß die Beobachtungen auf unendliche Verdünnung extrapolieren.

Andererseits ergibt sich aus der Depolarisation für unendlich kleine Konzentration [nach (49) und (33)]:

$$(52)\quad \Theta_0 = \frac{(g-g')^2}{15g'^2 + 10(g-g') + 2(g-g')^2},$$

das Verhältnis g/g' und somit nach (11), (12), (13) und (14) die Form des z. B. als Rotationsellipsoid aufgefaßten Teilchens.

2. *Das einfallende Licht ist natürliches Licht.*

In ähnlicher Weise lassen sich die Formeln für natürliches einfallendes Licht entwickeln. Wir begnügen uns damit, die Resultate anzugeben.

Es ist:

$$(53)\quad [f_x^2] = K^2\frac{(g-g')^2}{15};\quad [f_y^2] = [f_z^2] = K^2\left\{\frac{(g-g')^2}{15} + \frac{B}{2}\right\}$$

und folglich:

$$(54)\quad [f^2] = K^2\left\{\frac{(g-g')^2}{5} + B\right\}.$$

Die Beziehungen für die Koeffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33} werden:

$$(55)\quad \begin{cases} a_{11} = C\left\{\left(\frac{2}{9}(g-g')^2 + B\right)\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) + \frac{a_{11}B}{3}\right\}, \\ a_{22} = C\left\{\left(\frac{2}{9}(g-g')^2 + B\right)\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{a_{22}B}{3} + \frac{B}{6}\right\}, \\ a_{33} = C\left\{\left(\frac{2}{9}(g-g')^2 + B\right)\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{a_{33}B}{3} + \frac{B}{6}\right\}, \end{cases}$$

so daß folgt:

$$(56)\quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = \frac{10}{9}C(g^2 + 2g'^2)K^2,$$

$$(57)\quad a_{33} - a_{11} = \frac{\frac{CB}{6}K^2}{1 - \frac{CB}{3}}.$$

Somit wird in diesem Falle die Depolarisation:

$$(58)\quad \Theta' = \frac{a_{11} - \frac{3}{10}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}{a_{22} - a_{11}}.$$

Setzt man in diese Gleichung die soeben gefundenen Werte ein und vergleicht Θ' mit dem für linear polarisiertes einfallendes Licht geltenden Resultat [Formel (48)], so ergibt sich:

$$(59)\quad \Theta' = 2\Theta$$

oder:

$$\frac{\Theta' - \Theta_0'}{1 + \frac{1}{3}\Theta'} = 2\,\frac{g^3 + 2g'^3}{3}\,C, \tag{60}$$

wo

$$\Theta_0' = \frac{2(g - g')^2}{15\,B}, \tag{61}$$

die Depolarisation für unendlich verdünnte Lösungen bedeutet.

Die Depolarisation bei natürlichem einfallenden Lichte ist also doppelt so groß, wie die bei linear polarisiertem einfallenden Lichte.

Die Formeln (50) und (60) gelten für jede beliebige Konzentration, so lange der mittlere gegenseitige Abstand der Teilchen groß gegen ihre Linear-dimensionen ist.

Eine kleine numerische Rechnung möge uns über die Zahlenwerte aufklären, welche bei der Depolarisation des Lichtes durch nichtmetallische Teilchen in unendlich verdünnten Lösungen zu erwarten sind.

Es sei z. B. $m = 1{,}62$ der Brechungsexponent der Teilchen (Gummigutt), $m_0 = 1{,}33$ der des Wassers, so daß $m' = \frac{1{,}62}{1{,}33} = 1{,}218$ wird. Dann gilt für einige spezielle Formen der Teilchen nach den Gleichungen (11) bis (15), (43'), (49) und (33) die folgende Tabelle.

Tabelle 1.

Form	P	P'	g/g'	Δ	ϱ
Stäbchen . .	0	2π	1,242	0,00333	3° 18'
Kugeln . . .	$4\pi/3$	$4\pi/3$	1,000	0,00000	0 00
Scheiben . .	4π	0	0,6742	0,00880	5 22

Der gemäß der Gleichung:

$$\operatorname{tg}^2\varrho = \Delta \tag{62}$$

berechnete Winkel ϱ der letzten Kolonne wird uns erst später interessieren, wenn wir über einen Apparat zur Messung der Depolarisation sprechen.

Wir sehen, daß bei nicht metallischen Teilchen die Depolarisation stets sehr klein bleibt, selbst im Falle extremer Formen, wie Stäbchen und Scheiben. Ist $m' = \infty$, d. h. bestehen die Teilchen aus unendlich gut leitendem Material, so gilt die folgende Tabelle.

Tabelle 2.

Form	P	P'	g/g'	Δ	ϱ
Stäbchen . .	0	2π	∞	0,3333	30° 00′
Kugeln . . .	$4\pi/3$	$4\pi/3$	1	0,0000	0 00
Scheiben . . .	4π	0	0	0,1250	19 28

Hr. Dr. Teófilo Isnardi hat bei den experimentellen Untersuchungen über nicht metallische Kolloide, die er auf meine Veranlassung hin angestellt hat, viel größere Depolarisationen beobachtet, als die Tabelle 1, ja sogar als die Tab. 2 angibt, und zwar Depolarisationen, die von der Konzentration abhängen. Daraufhin habe ich die vorstehende Theorie entwickelt, die, wie wir sehen werden, die experimentellen Befunde ohne Schwierigkeit erklärt.

§ 3. Ein Apparat zur Messung der Dipolarisation.

Um die Depolarisation zu messen, habe ich mir einen einfachen Apparat konstruiert. Er ist die Vereinigung einer Haidingerschen Lupe mit einem Nikol als Analysator, der mit einer Kreisteilung versehen ist.

Fig. 2.

Die Haidingersche Lupe besteht aus einer Bodenplatte mit quadratischer Öffnung D (Fig. 2), einem Kalkspatrhomboeder E und einer Lupe M, die auf D eingestellt ist.

Durch die Doppelbrechung des Kalkspates sieht man beim Beobachten durch die Lupe zwei quadratische Öffnungen D_1 und D_2 in linear polarisiertem Licht leuchten, und zwar sendet etwa D_1 Licht aus, das horizontal schwingt, während D_2 vertikal schwingendes Licht emittiert.

Gibt man dem Nikol N eine geeignete Stellung, so sind die Intensitäten von D_1 und D_2, die J_1 bzw. J_2 heißen mögen, einander gleich (Halbschatten), und bildet dann die Schwingungsebene des Nikols mit der Horizontalen den Winkel ϱ, so gilt:

$$\operatorname{tg}^2 \varrho = \frac{J_1}{J_2}. \tag{63}$$

Nun ist nach (40):

$$J_1 = C_1; \quad J_2 = C_1 + C_2, \tag{64}$$

so daß gemäß (41):

$$\text{(65)} \qquad \operatorname{tg}^2 \varrho = \frac{C_1}{C_1 + C_3} = \Delta$$

folgt. Aus dem Winkel ϱ ergibt sich also ohne weiteres der Wert von Δ oder nach (43):

$$\text{(66)} \qquad \Theta = \frac{\operatorname{tg}^2 \varrho}{1 - \operatorname{tg}^2 \varrho} .$$

Dieser Winkel ist es, den wir in der letzten Kolonne der Tabb. 1 und 2 angegeben haben.

§ 4. Depolarisation des durch metallische Teilchen erzeugten Tyndallichtes.

In früheren Arbeiten[1]) hatte ich über eine Methode berichtet, mittels der Absorptionskurve die Teilchenform von Amikronen zu bestimmen und diese Methode auf Gold-, Silber- und Platinkolloide angewandt.

Schon damals hatte ich darauf hingewiesen[2]), daß die Depolarisation auch ein gutes Kriterium für die Teilchenform abgibt, und die entsprechenden Formeln für fast kugelförmige Körper entwickelt.

Jetzt möchte ich dieses Problem noch einmal eingehender für beliebige Abweichung von der Kugelform behandeln und die Ergebnisse für die Gestalt von Silberamikronen, die nach der Absorptionsmethode sowie nach der Depolarisationsmethode ermittelt worden ist, mit einander vergleichen.

Bei Lösungen, die aus metallischen Teilchen bestehen, beobachtet man weder eine Farben- noch eine Depolarisationsänderung bei Erhöhung der Konzentration. Deshalb können wir uns auf das theoretische Studium unendlich verdünnter Lösungen beschränken.

In eine kolloidale Lösung falle eine ebene, linear polarisierte Welle der Amplitude 1 ein, die in der x-Richtung fortschreite, und deren elektrischer Vektor mit der y-Achse den Winkel δ bilde.

Diese Welle induziert in einer Partikel ein elektrisches

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 881. 1912; **47**. S. 270. 1915; R. Gans und R. Calatroni, Ann. d. Phys. **61**. S. 465. 1920.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 896. 1912.

Moment f, welches sich ähnlich wie in § 1 berechnet. Es ergibt sich:

$$(67)\quad \begin{cases} f_x = e^{2\pi i n t}(g-g')\,\alpha_1(\alpha_2\cos\delta+\alpha_3\sin\delta), \\ f_y = e^{2\pi i n t}(g-g')\,\alpha_2(\alpha_2\cos\delta+\alpha_3\sin\delta)+e^{2\pi i n t}g'\cos\delta, \\ f_z = e^{2\pi i n t}(g-g')\,\alpha_3(\alpha_2\cos\delta+\alpha_3\sin\delta)+e^{2\pi i n t}g'\sin\delta. \end{cases}$$

Der Depolarisationsgrad bestimmt sich durch die Beziehung:

$$(68)\qquad \Delta = \operatorname{tg}^2\varrho = \frac{[f_z^2]}{[f_x^2]}.$$

In diesen Gleichungen bedeutet [vgl. Gleichung (11)]:

$$(69)\quad \begin{cases} g = m_0^2\,\frac{3}{4\pi}\,V\,\dfrac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\frac{3P}{4\pi}}; \\ g' = m_0^2\,\frac{3}{4\pi}\,V\,\dfrac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\frac{3P}{4\pi}}. \end{cases}$$

Da aber m' für Metalle komplexe Werte hat, sind die numerischen Rechnungen verwickelter als im Falle nichtmetallischer Kolloide.

Wir wollen setzen:

$$(70)\qquad \frac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\frac{3P}{4\pi}} = l\,e^{i\psi}; \qquad \frac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\frac{3P'}{4\pi}} = l'\,e^{i\psi'}$$

und:

$$(71)\qquad l\,e^{i\psi} - l'\,e^{i\psi'} = h\,e^{i\varkappa}.$$

So erhalten wir:

$$(72)\quad \begin{cases} f_x = m_0^2\,\frac{3}{4\pi}\,V\,k\,\alpha_1(\alpha_2\cos\delta+\alpha_3\sin\delta)\cos(2\pi n t+\varkappa), \\ f_z = m_0^2\,\frac{3}{4\pi}\,V\{k\,\alpha_3(\alpha_2\cos\delta+\alpha_3\sin\delta)\cos(2\pi n t+\varkappa) \\ \qquad\qquad +l'\sin\delta\cos(2\pi n t+\psi')\}, \end{cases}$$

so daß für natürliches einfallendes Licht durch Mittelwertbildung über alle Werte von δ zwischen 0 und 2π folgt:

$$(73)\quad \begin{cases} [f_x^2] = \left(m_0^2\,\frac{3}{4\pi}\,V\right)^2\frac{k^2}{30}, \\ [f_z^2] = \left(m_0^2\,\frac{3}{4\pi}\,V\right)^2\left\{\frac{k^2}{15}+\frac{l'^2}{4}+\frac{kl'}{6}\cos(\varkappa-\psi')\right\}. \end{cases}$$

Mittels dieser Werte nimmt Gleichung (68) die Form an:

$$\Delta = \frac{k^2}{2k^2 + \frac{15}{2}l'^2 + 5kl'\cos(\varkappa - \varphi')} \cdot \tag{74}$$

Setzen wir:

$$l e^{i\varphi} = p + iq\,; \quad l' e^{i\varphi} = p' + iq'\,, \tag{75}$$

so daß

$$k e^{i\varkappa} = p - p' + i(q - q')\,, \tag{76}$$

so transformiert sich Δ in:

$$\operatorname{tg}^2\varrho = \Delta = \frac{(p^2 + q^2) + (p'^2 + q'^2) - 2(pp' + qq')}{2(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}(p'^2 + q'^2) + pp' + qq'} \cdot \tag{77}$$

Um p und q zu berechnen, müssen wir:

$$m'^2 - 1 = -a - bi \tag{78}$$

als Funktion der Wellenlänge kennen. Nach den Messungen von Hagen und Rubens[1]) ergibt sich die folgende Tabelle, in der λ die Wellenlänge in Luft, λ' die in Wasser bedeutet.

Tabelle 3.

λ	λ'	a	b
420	313,2	3,863	0,532
450	336,0	4,888	0,653
500	374,3	6,801	0,918
525	393,2	7,821	1,087
650	488,3	14,34	2,162
750	564,3	20,45	2,927

Führen wir als Abkürzungen:

$$\gamma = \frac{3P}{4\pi}\,; \quad \gamma' = \frac{3P'}{4\pi} \tag{79}$$

ein, so ergibt sich aus den Gleichungen (70) und (75):

$$p + qi = \frac{(a^2 + b^2)\gamma - 3a - 3bi}{9 - 6a\gamma + (a^2 + b^2)\gamma^2} \cdot \tag{80}$$

Mittels dieser Beziehung und der Zahlenwerte der Tab. 3 folgen die Tabb. 4, 5 und 6.

---

1) E. Hagen und H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. S. 1 u. 432. 1902.

Tabelle 4.

λ	$\gamma = 0{,}0$		$\gamma = 0{,}2$		$\gamma = 0{,}4$	
	p	q	p	q	p	q
420	− 1,288	− 0,177	− 1,720	− 0,3210	− 2,551	− 0,7389
450	− 1,629	− 0,218	− 2,385	− 0,4771	− 4,253	− 1,690
500	− 2,267	− 0,306	− 4,033	− 1,012	− 7,359	− 12,99
525	− 2,607	− 0,362	− 5,213	− 1,546	+ 7,256	− 15,99
650	− 4,78	− 0,721	− 4,707	− 31,80	4,992	− 0,7879
750	− 6,82	− 0,976	+ 15,70	− 5,738	3,879	− 0,3113

λ	$\gamma = 0{,}5$		$\gamma = 0{,}6$		$\gamma = 0{,}8$	
	p	q	p	q	p	q
420	− 3,298	− 1,319	− 4,379	− 2,830	3,098	− 8,676
450	− 6,025	− 4,722	− 0,4459	− 12,48	4,355	− 1,779
500	+ 8,513	− 7,442	+ 5,347	− 1,874	2,661	− 0,4240
525	6,873	− 2,906	4,243	− 0,9017	2,324	− 0,2868
650	3,349	− 0,3496	2,514	− 0,1961	1,675	− 0,0868
750	2,796	− 0,1614	2,187	− 0,0986	1,523	− 0,0477

λ	$\gamma = 1{,}0$		$\gamma = 1{,}1$		$\gamma = 1{,}2$	
	p	q	p	q	p	q
420	3,539	− 1,565	2,714	− 0,8445	2,166	− 0,5200
450	2,421	− 0,4910	1,960	− 0,3176	1,646	− 0,2221
500	1,746	− 0,1801	1,488	− 0,1305	1,297	− 0,09888
525	1,592	− 0,1336	1,375	− 0,09933	1,210	− 0,07679
650	1,255	− 0,0486	1,115	− 0,03842	1,003	− 0,03109
750	1,168	− 0,0280	1,046	− 0,02249	0,9462	− 0,01843

λ	$\gamma = 1{,}25$		$\gamma = 1{,}3$		$\gamma = 1{,}4$	
	p	q	p	q	p	q
420	1,965	− 0,4234	1,792	− 0,3500	1,529	− 0,2518
450	1,523	− 0,1895	1,416	− 0,1635	1,243	− 0,1255
500	1,218	− 0,08720	1,149	− 0,07747	1,030	− 0,06232
525	1,140	− 0,06826	0,9441	− 0,05345	0,9743	− 0,04977
650	0,9561	− 0,02820	0,9120	− 0,02568	0,8362	− 0,02158
750	0,9036	− 0,01681	0,8648	− 0,01538	0,7960	− 0,01303

λ	$\gamma = 1{,}5$		$\gamma = 1{,}8$		$\gamma = 2{,}0$	
	p	q	p	q	p	q
420	1,329	− 0,1893	0,9541	− 0,09657	0,8026	− 0,06811
450	1,107	− 0,09936	0,8318	− 0,05597	0,7136	− 0,04114
500	0,9344	− 0,05121	0,7306	− 0,03125	0,6374	− 0,02378
525	0,8878	− 0,04131	0,7012	− 0,02577	0,6152	− 0,01983
650	0,7716	− 0,01838	0,6265	− 0,01212	0,5568	− 0,00957
750	0,7369	− 0,01118	0,6037	− 0,00748	0,5386	− 0,00597

Tabelle 4 (Fortsetzung).

λ	$\gamma = 2{,}2$		$\gamma = 2{,}6$		$\gamma = 3{,}0$	
	p	q	p	q	p	q
420	0,6921	− 0,05656	0,5425	− 0,03100	0,4458	− 0,02092
450	0,6244	− 0,03150	0,5001	− 0,02018	0,4168	− 0,01401
500	0,5657	− 0,01872	0,4613	− 0,01245	0,3894	− 0,00887
525	0,5476	− 0,01570	0,4492	− 0,01057	0,3811	− 0,00759
650	0,5008	− 0,00860	0,4174	− 0,00537	0,3576	− 0,00395
750	0,4862	− 0,00486	0,4070	− 0,00341	0,3501	− 0,00252

Tabelle 5.

λ	$\gamma = 0{,}0$; $\gamma' = 1{,}5$			$\gamma = 0{,}2$; $\gamma' = 1{,}4$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	1,691	1,803	− 1,678	3,061	2,400	− 2,540
450	2,702	1,236	− 1,781	5,917	1,561	− 2,904
500	5,234	0,8756	− 2,102	17,29	1,064	− 4,091
650	23,36	0,5957	− 3,675	1033,0	0,6997	− 3,250
750	47,46	0,5431	− 5,014	279,4	0,6338	+ 12,56
λ	$\gamma = 0{,}4$; $\gamma' = 1{,}3$			$\gamma = 0{,}6$; $\gamma' = 1{,}2$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	7,053	3,335	− 4,313	2,719	4,962	− 8,014
450	20,95	2,031	− 5,746	155,9	2,758	+ 2,038
500	223,0	1,326	− 7,448	32,10	1,693	7,121
650	25,54	0,8325	+ 4,573	6,360	1,007	2,528
750	15,14	0,7480	3,360	4,794	0,8957	2,072
λ	$\gamma = 0{,}8$; $\gamma' = 1{,}1$			$\gamma = 1{,}4$; $\gamma' = 0{,}8$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	84,86	8,078	15,74	2,400	84,81	6,922
450	22,13	3,943	9,102	1,561	22,13	5,636
500	7,262	2,232	4,016	1,064	7,262	2,767
650	2,813	1,244	1,870	0,700	2,813	1,403
750	2,320	1,095	1,593	0,6338	2,320	1,213
λ	$\gamma = 1{,}8$; $\gamma' = 0{,}6$			$\gamma = 2{,}2$; $\gamma' = 0{,}4$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	0,9192	27,19	− 3,904	0,4816	7,053	− 1,729
450	0,6949	155,9	+ 0,3277	0,3909	20,95	− 2,603
500	0,5348	32,10	3,965	0,3203	223,0	− 3,919
650	0,3925	6,360	1,577	0,2509	25,54	+ 2,507
750	0,3645	4,794	1,321	0,2363	15,14	1,888

Tabelle 5 (Fortsetzung).

λ	$\gamma = 2{,}6;\ \gamma' = 0{,}2$			$\gamma = 3{,}0;\ \gamma' = 0{,}0$		
	p^2+q^2	$p'^2+q'^2$	$pp'+qq'$	p^2+q^2	$p'^2+q'^2$	$pp'+qq'$
420	0,2953	3,061	−0,9231	0,1992	1,691	− 0,5707
450	0,2505	5,917	−1,183	0,1739	2,702	− 0,6758
500	0,2130	17,29	−1,848	0,1518	5,234	− 0,8558
650	0,1742	1033,0	−1,793	0,1278	23,36	− 1,706
750	0,1657	279,4	+6,410	0,1226	47,46	− 2,386

Tabelle 6.

Depolarisationswinkel ϱ.

	Verlängerte Ellipsoide					Kugel	Abgeplattete Ellipsoide				
	$\gamma=0{,}0$ $\gamma'=1{,}5$	$\gamma=0{,}2$ $\gamma'=1{,}4$	$\gamma=0{,}4$ $\gamma'=1{,}3$	$\gamma=0{,}6$ $\gamma'=1{,}2$	$\gamma=0{,}8$ $\gamma'=1{,}1$	$\gamma=1{,}0$ $\gamma'=1{,}0$	$\gamma=1{,}4$ $\gamma'=0{,}8$	$\gamma=1{,}8$ $\gamma'=0{,}6$	$\gamma=2{,}2$ $\gamma'=0{,}4$	$\gamma=2{,}6$ $\gamma'=0{,}2$	$\gamma=3{,}0$ $\gamma'=0{,}0$
420	39°52′	40°36′	41°12′	39°56′	27°46′	0°0′	23°21′	28°39′	30°47′	31°55′	32°38′
450	42 6	42 28	41 7	34 33	18 24	0 0	18 43	25 13	28 11	29 50	30 51
500	42 28	40 55	36 16	26 27	12 46	0 0	15 15	22 7	25 41	27 47	29 8
650	39 36	35 21	28 18	18 52	8 51	0 0	12 4	18 49	22 47	25 17	26 59
750	38 24	33 40	26 28	17 26	8 9	0 0	11 26	18 5	22 5	24 41	26 27

Diese Resultate sind in den Figg. 3 und 4 als Funktion von B/A für verschiedene Wellenlängen und in den Figg. 5 und 6 als Funktion der Wellenlänge für verschiedene Werte von γ dargestellt.

§ 5. Die Optik der Silberamikronen.

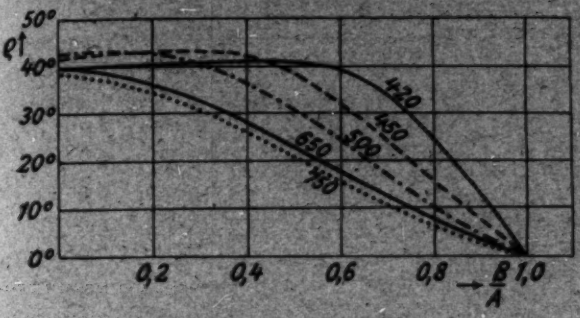
Wir haben die Zahlenwerte im vorigen Paragraphen in aller Ausführlichkeit mitgeteilt, weil die Tabb. 4, 5 und 6 die ganze Optik der Silberamikronen enthalten.

Nach einer früheren Arbeit[1]) ist nämlich die *Absorption* pro Längeneinheit der kolloidalen Lösung:

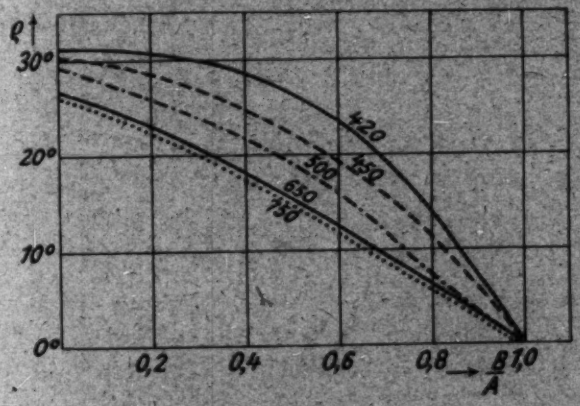
$$k = -\frac{2\pi}{\lambda'}(q + 2q')NV. \tag{81}$$

Die aus dieser Formel sich ergebenden Absorptionskurven unter der Annahme verschiedener Teilchenformen haben wir bereits an anderer Stelle berechnet und gezeichnet.[2])

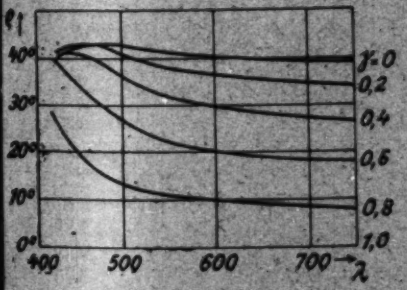
1) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 886. 1912.
2) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 270. 1915.



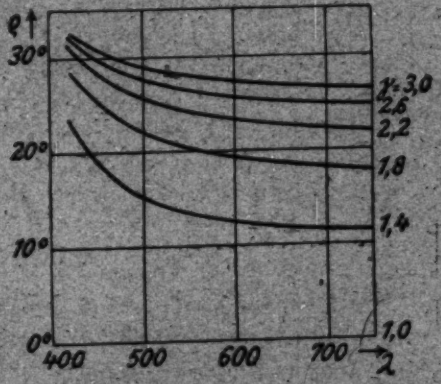
Verlängerte Rotationsellipsoide.
Fig. 3.



Abgeplattete Rotationsellipsoide.
Fig. 4.



Verlängerte Rotationsellipsoide.
Fig. 5.



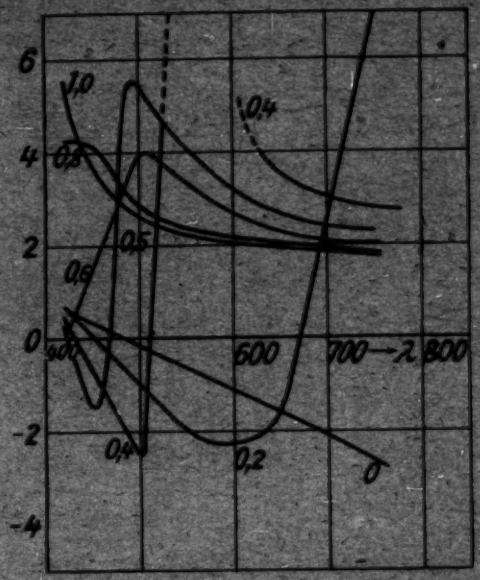
Abgeplattete Rotationsellipsoide.
Fig. 6.

Der *Brechungsexponent* ν der Lösung berechnet sich aus der Formel[1]):

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{p + 2}{2} N V, \tag{82}$$

in der ν den Brechungsexponenten des Lösungsmittels bedeutet.

In der folgenden Tabelle haben wir die Dispersion der Silberteilchen, d. h. $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0 N V}$ als Funktion der Wellenlänge für verschiedene Teilchenformen zusammengestellt.



Verlängerte Rotationsellipsoide.

Fig. 7.

Tabelle 7.

Verlängerte Ellipsoide.

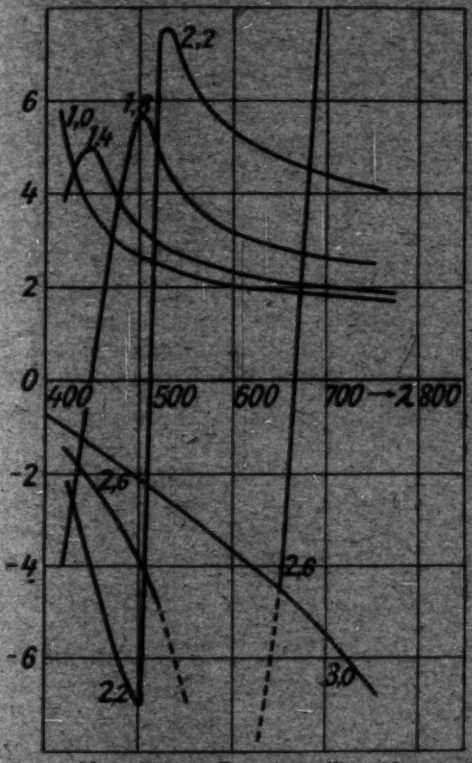
λ	$\gamma = 0$ $\gamma' = 1,5$	$\gamma = 0,2$ $\gamma' = 1,4$	$\gamma = 0,4$ $\gamma' = 1,3$	$\gamma = 0,6$ $\gamma' = 1,25$	$\gamma = 0,6$ $\gamma' = 1,2$	$\gamma = 0,8$ $\gamma' = 1,1$	$\gamma = 1$ $\gamma' = 1$
420	0,685	0,669	0,517	0,316	−0,023	4,263	5,306
450	0,292	0,051	−0,710	−1,489	1,423	4,137	3,631
500	−0,1991	−0,986	−2,530	5,474	3,970	2,818	2,619
525	−0,4157	−1,632	4,572	4,576	3,331	2,537	2,388
650	−1,62	−1,517	3,408	2,631	2,260	1,952	1,883
750	−2,67	+7,054	2,805	2,302	2,040	1,807	1,752

1) R. Gans und H. Happel, Ann. d. Phys. **29**. S. 294. 1909.

Tabelle 7 (Fortsetzung).

Abgeplattete Ellipsoide.

λ	$\gamma = 1{,}4$ $\gamma' = 0{,}8$	$\gamma = 1{,}8$ $\gamma' = 0{,}6$	$\gamma = 2{,}2$ $\gamma' = 0{,}4$	$\gamma = 2{,}6$ $\gamma' = 0{,}2$	$\gamma = 3{,}0$ $\gamma' = 0{,}0$
420	3,863	−3,902	−2,205	− 1,449	−1,065
450	4,977	−0,030	−3,941	− 2,135	−1,421
500	3,176	5,712	−7,076	− 3,802	−2,072
525	2,811	4,594	7,530	− 4,988	−2,416
650	2,093	2,827	5,242	− 4,498	−4,60
750	1,921	2,489	4,122	+15,90	−6,64



Abgeplattete Rotationsellipsoide.

Fig. 8.

Aus den Figg. 7 und 8 ersieht man, daß die Dispersion kugelförmiger Silberteilchen normal ist, während bei Verlängerung sowie bei Abplattung der Teilchen bald eine ausgesprochene anomale Dispersion auftritt, deren quantitative Bestimmung erlauben würde, die Teilchenform zu ermitteln.

Den *Depolarisationsgrad* haben wir bereits im vorigen Paragraphen [Formel (77)] berechnet. Es soll deshalb nur noch die *seitliche Ausstrahlung* ermittelt werden, weil sie für die Farbe des Tyndallichtes bestimmend ist.

Im Ursprunge des Koordinatensystems befinde sich ein Dipol vom Moment f; derselbe sei angeregt durch eine ebene Welle der Amplitude 1 [vgl. die Gleichungen (67)]. Dann ist das elektromagnetische Feld im Punkte $x=0; y=r; z=0$:

$$(83)\quad \begin{cases} E_x = -\frac{\ddot{f}_x}{r} & H_x = -\frac{1}{v r}\dot{f}_x, \\ E_y = 0 & H_y = 0, \\ E_z = -\frac{\ddot{f}_z}{r} & H_z = \frac{1}{v r}\dot{f}_z. \end{cases}$$

Aus diesen Werten ergibt sich die Strahlung in der y-Richtung:

$$(84)\quad \begin{cases} S_1 = \frac{1}{4\pi v r^2}[\dot{f}_x^2] = \frac{4\pi^2 n^4}{v r^2}[f_x^2], \\ S_2 = \frac{1}{4\pi v r^2}[\dot{f}_z^2] = \frac{4\pi^2 n^4}{v r^2}[f_z^2]. \end{cases}$$

In diesen Formeln bedeutet S_1 die Intensität des seitlich ausgestrahlten Lichts, welches horizontal (d. h. $\parallel x$) schwingt, während S_2 die des vertikal ($\parallel z$) schwingenden Lichts bezeichnet. Da wir aber die seitliche Ausstrahlung berechnen wollen unter der Annahme, daß die Intensität des einfallenden Lichts 1 ist, während die Formeln (84) die Amplitude 1 des einfallenden Strahls voraussetzen, haben wir die rechten Seiten der Gleichungen (84) durch $\frac{1}{8\pi v}$ zu dividieren. So ergibt sich:

$$(85)\quad S_1 = \frac{32\pi^4 n^4}{r^2}[f_x^2]; \quad S_2 = \frac{32\pi^4 n^4}{r^2}[f_z^2]$$

und mittels der Gleichungen (73), (75) und (78):

$$(86)\quad \begin{cases} S_1 = \frac{3\pi^2}{5}\frac{N V^2}{r^2 \lambda'^4}\{(p^2+q^2)+(p'^2+q'^2)-2(pp'+qq')\}, \\ S_2 = \frac{3\pi^2}{5}\frac{N V^2}{r^2 \lambda'^4}\{2(p^2+q^2)+\tfrac{6}{5}(p'^2+q'^2)+(pp'+qq')\}. \end{cases}$$

Die Gesamtstrahlung des Tyndallichts in der y-Richtung ist demnach:

$$(87)\quad S = S_1 + S_2 = \frac{3\pi^2 N V^2}{5 r^2 \lambda'^4}\left\{3(p^2+q^2)+\frac{11}{2}(p'^2+q'^2) - (pp'+qq')\right\}.$$

Man erkennt aus (86), daß im allgemeinen die Strahlungen S_1 und S_2 verschiedene Intensitäten haben. So erklärt es sich, daß wenn man mit weißem Licht beleuchtet und das Tyndallicht durch einen Nikol beobachtet, dieses seine Farbe je nach der Nikolstellung ändert.

Schließlich wird es noch erwünscht sein, für die in den Tabellen benutzten Werte γ die Achsenverhältnisse der entsprechenden Ellipsoide anzugeben. Da $\gamma = 3\,P/4\,\pi$ ist, so folgt aus (13), (14) und (15):

Tabelle 8.

Verlängerte Rotationsellipsoide		Abgeplattete Rotationsellipsoide	
γ	B/A	γ	B/A
0,0	0,000	1,0	1,000
0,2	0,228	1,4	0,620
0,4	0,399	1,8	0,383
0,5	0,482	2,0	0,294
0,6	0,573	2,2	0,219
0,8	0,769	2,6	0,095
1,0	1,000	3,0	0,000

§ 6. Experimentelle Bestimmung der Form von Silberamikronen.

Wir haben den Depolarisationsgrad einer kolloidalen Silberlösung (Kollargol) mittels des in § 3 beschriebenen Apparats gemessen, um die Teilchenform zu bestimmen.

Arbeitet man mit dem weißen Licht einer Bogenlampe, so ist die verschiedene Färbung der beiden quadratischen Felder, auf deren gleiche Intensität man einstellen soll, recht störend. Sie erklärt sich durch die Verschiedenheit der Werte S_1 und S_2, die wir im § 5 berechnet haben.

Um diesen Übelstand zu vermeiden, schalteten wir zwischen dem Bogen und dem Trog, der die Lösung enthielt, Strahlenfilter ein und erhielten so:

für grünes Licht der ungefähren Wellenlänge 500 $\mu\mu$ $\varrho = 25°$
„ rotes „ „ „ „ 650 „ $\varrho = 19°$.

Unter der Voraussetzung, daß die Teilchen verlängerte Ellipsoide sind, ergibt sich aus Fig. 3 B/A zwischen 0,57 und 0,60, und unter der Voraussetzung, daß sie abgeplattete Ellipsoide sind, B/A zwischen 0,25 und 0,37.

Vergleicht man diese Resultate mit den durch Absorptionsmessungen[1]) erhaltenen, so folgt aus den Tabb. 3 und 4 der zitierten Abhandlung, daß die Teilchen keine abgeplatteten Ellipsoide sein können, denn eine Lösung mit abgeplatteten Partikeln der durch Depolarisation bestimmten Form hätte ihr Absorptionsmaximum im Grünen, wäre also rot in der Durchsicht, während unsere Lösungen rein gelb waren.

Dagegen ist die Annahme verlängerter Rotationsellipsoide in Übereinstimmung mit den früheren Absorptionsmessungen, denn Lösungen mit Teilchen der durch Depolarisation bestimmten Form müßten ihr Absorptionsmaximum ungefähr bei 400 $\mu\mu$ haben, während wir mittels unserer photographischen Methode seine Lage ungefähr bei 412 $\mu\mu$ ermittelt hatten.

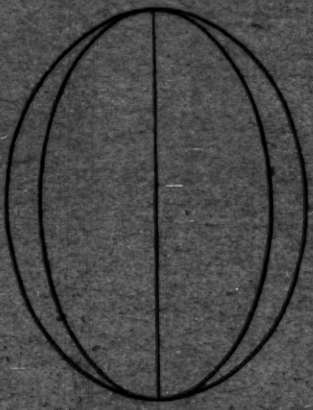


Fig. 9.

Diese Differenz erklärt sich leicht aus der Tatsache, daß wir beim Studium der Depolarisation die Lösungen nicht ultrafiltriert haben. Überhaupt bitten wir, die soeben beschriebenen Messungen der vorliegenden Arbeit nur als vorläufige Resultate zwecks einer ersten Orientierung anzusehen. Inzwischen hat Hr. Dr. Teófilo Isnardi auf meine Anregung hin sich mit dem Problem eingehender beschäftigt und an denselben Lösungen nach den beiden Methoden der Absorption und Depolarisation exaktere Formbestimmungen ausgeführt. Die Ergebnisse seiner Untersuchung werde ich baldigst mitteilen.

Damit man sich aber ein Bild der schon jetzt erreichten Genauigkeit der Formbestimmung ultramikroskopisch kleiner Teilchen machen kann, habe ich in Fig. 9 die beiden Meridianellipsen in natürlichen Längeverhältnissen gezeichnet, welche meinen Ergebnissen nach den beiden Methoden entsprechen. Das äußere Ellipsoid gilt gemäß den Absorptionsmessungen,

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 270. 1915.

das innere nach den Depolarisationsbeobachtungen. Bedenkt man, daß die Teilchen sicher nicht mehr als 10 $\mu\mu$ Durchmesser haben, daß ihr Volumen also nur $5 \cdot 10^{-18}$ cmm betrug, oder mit anderen Worten, daß das Gesamtvolumen von 2000 Billionen Teilchen nur ein Kubikmillimeter ausmacht, so ist unser Ergebnis wohl als befriedigend zu betrachten.

La Plata, Instituto de Fisica, 24. August 1918.

(Eingegangen 22. November 1919.)

5. *Kritik zur Wanderungsgeschwindigkeitsformel Herrn Langevins*[1]; *von Hans Ferd. Mayer.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

1. Über die Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in Gasen liegen mehrere theoretische Untersuchungen vor. Die erste Untersuchung, die sich auf Partikel beliebiger Kleinheit bezieht[2]), indem sie die Prinzipien der kinetischen Gastheorie zu Hilfe nimmt, findet sich in einer Arbeit Herrn Lenards aus dem Jahre 1900[3]), in der auf einfachem Wege eine allgemein brauchbare Wanderungsgeschwindigkeitsformel für Elektrizitätsträger in Gasen hergeleitet wurde.

Mit demselben Gegenstand beschäftigen sich — bei verfeinerter Berücksichtigung der Molekularbewegung — zwei weitere Arbeiten Herrn Lenards[4]) und zu einem gewissen Abschluß wird das Problem durch eine neuerdings erschienene Arbeit desselben Verfassers gebracht.[5])

Diesen Untersuchungen Herrn Lenards stehen Arbeiten Herrn Langevins aus den Jahren 1903 und 1905[6]) gegenüber, von denen die letztere besonders eingehend mit dem Gegenstand sich beschäftigt, und wohl deshalb, anscheinend mit Recht, viel Beachtung gefunden hat.[7]) Die Formel, die

1) Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Geh. Rat Lenard unternommen.

2) Für genügend große Partikel lag schon die Stokes-Kirchhoffsche hydrodynamische Lösung vor.

3) P. Lenard, Ann. d. Phys. 3. S. 313. 1900.

4) P. Lenard, Ann. d. Phys. 40. S. 393 u. 41. S. 53. 1913 (Teil I u. II).

5) P. Lenard, Ann. d. Phys. 60. S. 329. 1919 und 61. S. 665. 1920 (Teil III).

6) P. Langevin, Ann. d. Ch. et d. Phys. 28. S. 317. 1903 und 5. S. 245 u. f. 1905.

7) Über die sonstige hierher gehörige Literatur siehe P. Lenard a. a. O. Teil III, Abschnitt 7.

Herr Langevin dort ableitet, stimmt jedoch nicht mit derjenigen Herrn Lenards aus dem Jahre 1900, und noch viel weniger mit der endgültigen Formel von 1919 überein. Man hat nun — sehr zu Unrecht — versucht, die Formel Herrn Langevins als die allein richtige hinzustellen, ohne daß es bis heute jemand unternommen hätte, die Theorien Herrn Lenards und Herrn Langevins auf den Grad ihrer Genauigkeit zu vergleichen.

Zweck der vorliegenden Arbeit soll nun sein, die Quelle des Unterschiedes beider Theorien aufzudecken.

2. Das Problem der Wanderung kraftbewegter Partikel in Gasen ist bekanntlich folgendes: Ein Partikel der Masse m bewege sich in einem anderen Gase. Die Masse eines Gasmoleküls sei M, es mögen N Gasmoleküle in der Raumeinheit vorhanden sein. Wir denken uns das Partikel und die Gasmoleküle als glatte Kugeln von den Radien R bzw. r, die infolge der Wärmebewegung mit großer Geschwindigkeit hin und her fahren, und bei den gegenseitigen Zusammenstößen nach den Gesetzen des elastischen Stoßes reflektiert werden.[1])

Auf das Partikel wirke nun eine äußere Kraft K. Hierdurch wird die unregelmäßige Wärmebewegung des Partikels ein wenig abgeändert werden, derart, daß im Mittel Geschwindigkeiten in Richtung der äußeren Kraft überwiegen. Das Partikel erlangt also eine mittlere Geschwindigkeit w in Kraftrichtung; es entsteht die Aufgabe, die Größe dieser Geschwindigkeit zu berechnen.

Die Überlegung, die sowohl der Rechnung Herrn Lenards als auch derjenigen Herrn Langevins zugrunde liegt, ist folgende: Bewegt sich das Partikel mit seiner Geschwindigkeit durch die Gasmoleküle hindurch, so verliert es bei jedem Zusammenstoß mit einem Gasmolekül einen bestimmten Betrag

1) Herr Langevin nimmt im Falle elektrisch geladener Partikel neben elastischen Stößen auch noch Fernkräfte an, mit denen das Partikel auf die ungeladenen Gasmoleküle einwirken soll, da jedoch die experimentelle Untersuchung (siehe P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 714. 1903) gezeigt hat, daß solche Kräfte äußerst klein oder überhaupt nicht vorhanden sind, wird von ihnen hier abgesehen. Vgl. auch die eingehendere Erörterung hierüber P. Lenard a. a. O. Teil III. Abschnitt 5, Fall E.

seiner Geschwindigkeit. Im stationären Zustand wird dann dieser Geschwindigkeitsverlust gerade ausgeglichen durch den Geschwindigkeitszuwachs, den das Partikel während der Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen infolge der äußeren Kraft erhält. Diese äußere Kraft hat zur Folge, daß die Geschwindigkeit des Partikels auf der freien Weglänge keine gleichförmige ist; seine Bewegung ist vielmehr eine beschleunigte, ein Umstand, der für die mathematische Durchführung des Problems von großer Wichtigkeit sein wird.

Trotz der Gleichheit des Grundgedankens besteht ein Unterschied in den beiderseitigen Theorien insofern, als Herr Lenard das Problem der Wanderungsgeschwindigkeit direkt in Angriff nimmt, während Herr Langevin den Umweg über die Diffusion einschlägt.

3. Eng verwandt mit dem vorliegenden Problem ist das Problem der Diffusion, an das Herr Langevin (a. a. O. 1905) anknüpft. Es besteht nun aber doch ein wesentlicher Unterschied zwischen Diffusions- und Wanderungsgeschwindigkeit, und zwar der, daß im Falle der Diffusion die Bewegung des Partikels auf der freien Weglänge eine *gleichförmige*, im Falle der Wanderung aber eine *beschleunigte* ist. Dieser Umstand, den Herr Langevin nicht in Rechnung zieht, bildet, wie sich zeigen wird, eine der Quellen des Unterschiedes seiner Theorie der Wanderungsgeschwindigkeit und derjenigen Herrn Lenards.

4. Es handelt sich nun in erster Linie darum, den mittleren Geschwindigkeitsverlust des Partikels beim Zusammenstoß mit einem Gasmolekül zu finden.[1]) Wir nehmen der Einfachheit halber an, das Gasmolekül sei in Ruhe und das Partikel bewege sich mit der Geschwindigkeit u gegen das Gasmolekül. Der Ort, an dem das Partikel das Gasmolekül trifft, sei A. Wir zerlegen nun die Geschwindigkeit u des Partikels in eine

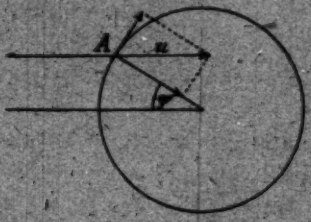


Fig. 1.

1) Der besseren Übersicht halber seien in diesem Absatz 4 schon bekannte Resultate aus Herrn Lenards Arbeiten eingeschaltet.

normale und in eine tangentiale Komponente. Die tangentiale Komponente $u \sin \varphi$ bleibt beim Stoße ungeändert. Ihr Beitrag zur Geschwindigkeit u' nach dem Stoß ist daher $u \sin^2 \varphi$. Die Normalkomponente von u ändert dagegen beim Stoß ihre Größe, man findet ihren Wert nach dem Stoß unter Anwendung der Sätze von der Erhaltung der Bewegungsgröße und der lebendigen Kraft zu

$$\frac{m - M}{m + M} u \cos \varphi .$$

Ihr Beitrag zur Geschwindigkeit u' nach dem Stoß ist

$$\frac{m - M}{m + M} u \cos^2 \varphi .$$

Die Geschwindigkeit nach dem Stoß ist daher in Stoßrichtung

$$u' = u \left(\sin^2 \varphi + \frac{m - M}{m + M} \cos^2 \varphi \right).$$

Nun beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß die Normalkomponente von u gerade einen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ mit der Stoßrichtung bildet,

$$\frac{2\pi \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\pi} .$$

Die mittlere Geschwindigkeit nach dem Stoß ist daher

$$u' = u \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 \varphi + \frac{m - M}{m + M} \cos^2 \varphi \right) 2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi .$$

Die Integration ergibt

$$u' = \frac{m}{m + M} u = \mu \cdot u , \tag{1}$$

während die Komponenten senkrecht zur Stoßrichtung verschwinden.[1]) Das Massenverhältnis

$$\mu = \frac{m}{m + M} ,$$

welches in unserem Problem fortdauernd eine Rolle spielt, wollen wir als Lenardsche Konstante bezeichnen.

Ist das Gasmolekül nicht in Ruhe, sondern besitzt die Geschwindigkeitskomponenten U, V, W, während die des Par-

1) Es ist dies die von Herrn Lenard (a. a. O. 1900) gegebene Formel, deren Ableitung dort nur kurz in Worten angegeben ist.

tikels u, v, w sein mögen, so hat man offenbar in Gleichung (1) u und u' durch $u - U$ und $u' - U$ zu ersetzen; man findet so die mittlere u-Komponente nach dem Stoß zu

$$u' = \frac{m u + M U}{m + M}$$

und ebenso gelten zwei analoge Formen für v' und w'. Der mittlere Geschwindigkeitsverlust, den das Partikel bei einem Zusammenstoß mit einem Gasmolekül erleidet, ist daher für die u-Richtung

$$u - u' = \frac{M}{m + M}(u - U). \tag{2}$$

5. Herr Langevin schließt nun so: Man denke sich für einen Augenblick, daß alle N-Gasmoleküle der Raumeinheit dieselben Geschwindigkeitskomponenten U, V, W besitzen, während sich das Partikel mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w gleichförmig durch das Gas hindurch bewegt. Das Partikel erfährt dann nach einem bekannten Satz der kinetischen Theorie der Gase in der Zeiteinheit die Anzahl $N s^2 \pi c$ Zusammenstöße, worin $s = r + R$ die Radiensumme von Partikel und Gasmolekül und c ihre Relativgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{(u - U)^2 + (v - V)^2 + (w - W)^2}$$

bedeutet.

Nun würde das Partikel bei jedem Zusammenstoß in u-Richtung den Betrag $u - u'$ an Geschwindigkeit verlieren, in der Zeiteinheit daher den Betrag $(u - u') N s^2 \pi c$.

Nun sind aber die Geschwindigkeitskomponenten der Gasmoleküle nicht alle gleich und auch die des Partikels ändern sich von Stoß zu Stoß. Bezeichnet man daher mit df die Wahrscheinlichkeit, daß die Geschwindigkeitskomponenten des Partikels zwischen den Grenzen u; v, w und $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ liegen und ebenso mit dF die Wahrscheinlichkeit, daß die Geschwindigkeitskomponenten eines Gasmoleküls zwischen den Grenzen U, V, W und $U + dU$, $V + dV$, $W + dW$ liegen, so ist der mittlere Verlust an Geschwindigkeit, den das Partikel auf seinem Wege durch das Gas in der Zeiteinheit erleidet, gegeben durch

$$\int\int (u - u') N s^2 \pi c \, df \, dF.$$

Andererseits erhält das Partikel in der Zeiteinheit infolge der äußeren Kraft K, die wir unbeschadet der Allgemeinheit der Betrachtung in die Richtung der u-Achse legen können, den Geschwindigkeitszuwachs $b = K/m$, man hat daher als Bedingung des stationären Zustandes

$$K = m \int\int (u - u') N s^2 \pi c \, df \, dF \quad [1])$$

oder nach Gleichung (2):

$$K = \frac{m M}{m + M} \int\int (u - U) N s^2 \pi c \, df \, dF. \tag{3}$$

Ist das Gas als Ganzes in Ruhe, so ist bei Annahme Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung

$$dF = \left(\frac{h M}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h M (U^2 + V^2 + W^2)} \, dU \, dV \, dW,$$

worin h die Boltzmannsche Konstante bezeichnet.

Ist ω die mittlere fortschreitende Geschwindigkeit des Partikels in Kraftrichtung, so ist

$$df = \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h m [(u - \omega)^2 + v^2 + w^2]} \, du \, dv \, dw.$$

Da ω sehr klein ist, wird bei Vernachlässigung höherer Potenzen von ω

$$df = \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h m (u^2 + v^2 + w^2)} (1 + 2 h m u \omega) \, du \, dv \, dw.$$

Setzt man diese Werte in (3) ein, so ergibt die Integration [2])

$$K = \frac{4 \omega}{3} N s^2 \pi \sqrt{\frac{4}{h \pi} \frac{m M}{m + M}}$$

---

1) Diese Gleichung stammt im Grunde von Boltzmann; siehe L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I. S. 196. 1895.

2) Die Integrationen lassen sich auf einfacherem Wege als bei Herrn Langevin durch Einführung neuer Veränderlicher

$$u = \mathfrak{U} + \frac{M}{m + M} \mathfrak{u}, \qquad U = \mathfrak{U} - \frac{m}{m + M} \mathfrak{u},$$

$$v = \mathfrak{V} + \frac{M}{m + M} \mathfrak{v}, \qquad V = \mathfrak{V} - \frac{m}{m + M} \mathfrak{v},$$

$$w = \mathfrak{W} + \frac{M}{m + M} \mathfrak{w}, \qquad W = \mathfrak{W} - \frac{m}{m + M} \mathfrak{w},$$

$$du \, dv \, dw \, dU \, dV \, dW = du \, dv \, dw \, d\mathfrak{U} \, d\mathfrak{V} \, d\mathfrak{W}$$

und nachheriger Einführung von Polarkoordinaten lösen.

und hieraus folgt für die Wanderungsgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{3}{4}\,\frac{K}{N s^2 \pi}\sqrt{\frac{h\pi}{4}\,\frac{m+M}{mM}}$$

oder bei Einführung der Lenardschen Konstanten

$$\mu = \frac{m}{m+M},$$

der Gasdichte $D = N \cdot M$ und der mittleren molekularen Geschwindigkeit

$$W = \sqrt{\frac{4}{\pi h M}}$$

der Gasmoleküle wird

$$\omega = \frac{3}{4}\,\frac{K}{D s^2 \pi W}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}}. \tag{4}$$

Dies wäre nach Herrn Langevin die gesuchte Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels.

6. Herr Lenard kommt in seiner erwähnten Arbeit (a. a. O. 1900) auf viel einfacherem Wege zu dem Resultat

$$\omega = \frac{K}{D s^2 \pi W}\,\frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}} \tag{5}$$

und die vervollständigte Wanderungsgeschwindigkeitsformel Herrn Lenards ist schließlich[1])

$$\omega = \frac{3}{3+\mu}\,\frac{K}{D s^2 \pi W}\,\frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}\,\Omega_\mu, \tag{6}$$

worin der Faktor Ω_μ durch

$$\Omega_\mu = \frac{8}{\pi}\,\frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu}$$

gegeben ist.[2])

Man sieht, die Formeln Herrn Lenards und Herrn Langevins sind verschieden, und sie unterscheiden sich nicht nur etwa durch den konstanten Faktor $^3/_4$, sondern sie hängen auch in verschiedener Weise vom Massenverhältnis μ ab. Dies zeigt an, daß mindestens eine der beiderseitigen Formeln unter einem prinzipiellen Mangel leidet, und zwar ist es die Formel Herrn Langevins, wie im folgenden gezeigt werden soll.

7. Man hat dazu folgendes zu bedenken: Bewegt sich das Partikel mit der mittleren Geschwindigkeit ω durch das Gas,

1) P. Lenard, Teil III, Gleichung (21).
2) P. Lenard, Teil III, Gleichungen (8) und (51).

so ändert es von Weglänge zu Weglänge seinen Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, und zwar sollen diese in ihrer Wahrscheinlichkeit wie früher durch die Maxwellsche Funktion

$$df = \left(\frac{h^2 m}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}(1 + 2hmu\omega)\,du\,dv\,dw$$

gegeben sein. Einer bestimmten Stoßzeit[1]) t sind dadurch ganz bestimmte Werte von u, v, w zugeordnet. Nun ist aber die u-Komponente des Partikels während der Stoßzeit t infolge der äußeren Kraft K nicht konstant, sondern wächst von einem Werte u' am Anfang der freien Weglänge bis zu einem Werte $u'' = u' + bt$ am Ende der freien Weglänge. Die Geschwindigkeit u, die der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung entspricht, wird daher zwischen u' und u'' liegen.

In der im vorigen gegebenen Ableitung Herrn Langevins sind nun u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten, die das Partikel jeweils kurz vor dem Zusammenstoße, also am *Ende* der freien Weglänge besitzt. Denn diese Geschwindigkeitskomponenten sind maßgebend für die Größe des Geschwindigkeitsverlustes beim Zusammenstoß, wie man aus Gleichung (2) erkennt. Herr Langevin setzt — anscheinend unbewußt — voraus, daß die Maxwellschen Geschwindigkeitskomponenten u, v, w des Partikels stets mit den Endgeschwindigkeiten auf der freien Weglänge zusammenfallen.

Diese Voraussetzung ist aber ziemlich unwahrscheinlich. Das Maxwellsche Verteilungsgesetz sagt nur aus, daß in einem bestimmten Augenblick der Stoßzeit t Geschwindigkeitskomponenten von der Größe u, v, w vorhanden sind; in welchem Augenblick aber dieses Ereignis stattfindet, darüber macht das Gesetz keine Aussage. Es wäre nun doch offenbar eine ganz einseitige Bevorzugung eines bestimmten Augenblicks, wenn man — wie es Herr Langevin tut — annehmen wollte, daß dieses Ereignis jeweils genau am Ende der Stoßzeit stattfinden würde. Vielmehr wird dieses Ereignis bei vielen aufeinanderfolgenden Stoßzeiten einmal mehr zu Anfang, das andere Mal mehr zu Ende der Stoßzeit eintreten.

---

1) Mit Stoßzeit wird hier nach dem Vorgange Herrn Lenards die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen des Partikels bezeichnet.

Wir wollen daher Gleichung (3) in der Form schreiben

$$K = m \int\int (u'' - u') N s^2 \pi c \, df \, dF, \tag{7}$$

wobei u'', die Endgeschwindigkeit auf der freien Weglänge, und u', die Anfangsgeschwindigkeit auf der freien Weglänge, im allgemeinen von der Maxwellschen Geschwindigkeit u verschieden sind.

Man hat nun noch u' und u'' durch u auszudrücken. Hierzu kann folgende Überlegung dienen: Jedenfalls muß u so gewählt werden, daß die Gleichung

$$\omega = \frac{\sum u_\nu t_\nu}{\sum t_\nu} \tag{8}$$

erfüllt ist, indem $\sum u_\nu t_\nu$ den während einer — theoretisch unendlich langen — Zeit zurückgelegten Weg des Partikels in Kraftrichtung, $\sum t_\nu$ die dazu nötige Zeit bezeichnet, und worin die Summen von $\nu = 1$ bis $\nu = \infty$ sich erstrecken. Andererseits ist aber die Wanderungsgeschwindigkeit als Quotient als Gesamtweg durch Gesamtzeit[1])

$$\omega = \frac{\sum u_\nu' t_\nu + \frac{1}{2} b \sum t_\nu^2}{\sum t_\nu} \tag{9}$$

und da in jedem Falle

$$u_\nu' = u_\nu'' - b t_\nu, \tag{10}$$

so ist auch

$$\omega = \frac{\sum u_\nu'' t_\nu - \frac{1}{2} b \sum t_\nu^2}{\sum t_\nu}. \tag{11}$$

Aus (9) und (11) folgt

$$\omega = \frac{\sum \frac{u_\nu' + u_\nu''}{2} t_\nu}{\sum t_\nu}$$

und daher ist, wie der Vergleich mit (8) zeigt, mit Weglassung der Indizes

$$u = \frac{u' + u''}{2}.$$

Wie man sieht, liegt die Maxwellsche Geschwindigkeit u in der Mitte zwischen Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Partikels auf der freien Weglänge.

1) Siehe P. Lenard, a. a. O. Teil I. S. 415.

Die letzte Gleichung ergibt in Verbindung mit Gleichung (10)

$$u' = u - \tfrac{1}{2} b t$$

und

$$u'' = u + \tfrac{1}{2} b t.$$

Mit der letzteren Geschwindigkeit erfolgt der Zusammenstoß; der dabei stattfindende Geschwindigkeitsverlust ist daher nach Gleichung (2)

$$u'' - u' = \frac{M}{m+M}(u - U + \tfrac{1}{2} b t). \tag{12}$$

Man sieht, der Geschwindigkeitsverlust bei einem Zusammenstoß — in Maxwellschen Geschwindigkeiten ausgedrückt — ist jetzt größer als bei Herrn Langevin. Zwar sagt Herr Langevin auf S. 254 seiner erwähnten Arbeit (a. a. O. 1905), daß die Abweichungen der augenblicklichen Geschwindigkeitskomponenten des Partikels von denen, wie sie durch Maxwells Verteilungsfunktion gegeben sind, nur sehr klein seien, und daß man sie deshalb vernachlässigen könne. Tatsächlich ist das Glied $\frac{1}{2} b t$ im Verhältnis zu fast allen vorkommenden Geschwindigkeitskomponenten u und U sehr klein; man muß aber bedenken, daß ω selbst eine gegen die thermische Geschwindigkeit des Partikels kleine Größe ist und daß deshalb auch kleine Vernachlässigungen von beträchlichem Einfluß auf die Wanderungsgeschwindigkeit sein können, was hier auch tatsächlich der Fall ist.

Im Falle der Diffusion fällt natürlich dieser Umstand weg, da infolge des Fehlens der beschleunigenden Kraft Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Partikels auf der freien Weglänge dieselbe ist, also in jedem Augenblick mit der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung zusammenfallen. Gleichung (4) gilt daher wohl im Falle der Diffusion — wobei an Stelle der äußeren Kraft das Druckgefälle in Richtung der u-Achse tritt — nicht aber im Falle der Wanderung eines Partikels in einem Kraftfelde und Herr Langevin verfährt keineswegs streng, indem er Wanderung und Diffusion als vollkommen analoge Vorgänge betrachtet.

8. Man hat nun, um exakter zu verfahren, mit dem durch Gleichung (12) gegebenen Geschwindigkeitsverlust denselben

Rechnungsgang wie früher zu verfolgen und erhält daher an Stelle von Gleichung (7)

$$K = \frac{m M}{m+M} \int\int \left(u - U + \frac{K t}{2m}\right) N s^2 \pi c \, df \, dF,$$

wobei wieder

$$c = \sqrt{(u-U)^2 + (v-V)^2 + (w-W)^2}$$

die relative Geschwindigkeit von Partikel und Gasmolekül bedeutet. Die unter dem Integral auftretende Stoßzeit t ist nur Funktion der Relativgeschwindigkeit c und in ihrer Wahrscheinlichkeit durch

$$W(t)\,dt = N s^2 \pi c e^{-N s^2 \pi c t} dt$$

gegeben. Man hat daher noch die letzte Gleichung mit $W(t)\,dt$ zu multiplizieren und über alle möglichen Werte von t von $t = 0$ bis $t = \infty$ zu integrieren. Man erhält so

$$K = \frac{m M}{m+M} \int\int (u - U) N s^2 \pi c \, df \, dF + \frac{M K}{2(m+M)} \int\int df \, dF.$$

Nun ist bekanntlich $\int df = \int dF = 1$, man erhält daher, wenn man den zweiten Summanden der rechten Seite mit der linken Seite vereinigt

$$K \frac{1+\mu}{2} = \frac{m M}{m+M} \int\int (u - U) N s^2 \pi c \, df \, dF. \tag{13}$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$K \frac{1+\mu}{2} = \frac{4\omega}{3} \sqrt{\frac{4}{h\pi} \frac{m M}{m+M}}$$

und hieraus folgt für die Wanderungsgeschwindigkeit

$$w = \frac{3}{4} \frac{K}{D s^2 \pi W} \frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}. \tag{14}$$

Man erkennt, daß sich diese Formel von der auf Diffusionsuntersuchungen gegründeten Formel Herrn Langevins [Gleichung (4) des Vorliegenden] durch das Hinzukommen des Faktors $\frac{1+\mu}{2}$ unterscheidet.

Hieran knüpft sich eine Bemerkung von allgemeiner Bedeutung. Es ist eine weitverbreitete Ansicht, daß man von der Diffusionsgeschwindigkeit ohne weiteres auf die Wanderungsgeschwindigkeit schließen könne.[1]) Dies ist tatsächlich nicht

1) Vgl. S. P. Townsend, Phil. Trans. A. 195. S. 259. 1900.

der Fall, man hat vielmehr, wie aus dem Vorliegenden hervorgeht, die Diffusionsgeschwindigkeit noch mit dem Faktor $\frac{1+\mu}{2}$ zu multiplizieren, um der beschleunigten Bewegung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen Rechnung zu tragen.

So findet Maxwell[1]) bei Annahme gleicher Stoßzeiten die Diffusionsgeschwindigkeit zu

$$\frac{K}{D s^2 \pi W} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

und hieraus würde sich für die Wanderungsgeschwindigkeit nach Multiplikation mit $\frac{1+\mu}{2}$ der Wert

$$\omega = \frac{K}{D s^2 \pi W} \frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}$$

ergeben. Es ist dies gerade das Resultat, wie es schon von Herrn Lenard in seiner Arbeit von 1900 auf kurzem direkten Wege und ohne Anlehnung an die Diffusion abgeleitet wurde.

9. Gleichung (14) wurde hergeleitet unter der Voraussetzung, daß die Maxwellsche Geschwindigkeitskomponente u des Partikels genau in der Mitte zwischen Anfangsgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit auf der freien Weglänge liegt, was eine Verbesserung gegenüber Herrn Langevins Annahme ist. Dies hatte zur Folge, daß zu Herrn Langevins Formel noch der Faktor $\frac{1+\mu}{2}$ hinzutrat. Damit ist, wie man sieht, eine Annäherung an die vervollständigte Formel Herrn Lenards [Gleichung (6) des Vorliegenden] eingetreten, Übereinstimmung ist aber doch nicht erreicht; denn es erscheint der Faktor $\frac{3}{3+\mu}$ in Gleichung (14) durchweg für alle Massenverhältnisse, als 3/4 und der Faktor Ω_μ fehlt ganz.

Man muß aber bedenken, daß auch die Annahme, unter der Gleichung (14) hergeleitet wurde, nicht frei von Willkür ist. Die Schwierigkeit, die hier vorliegt, ist in der von Herrn Langevin gewählten Methode begründet. Denn die Geschwindigkeitskomponenten des Partikels sind auf der freien Weglänge nicht konstant, und weichen daher zu Anfang und

1) C. Maxwell, Scientific Papers 1. S. 398. 1890.

zu Ende einer freien Stoßzeit im allgemeinen von einer gewissen mittleren Geschwindigkeit, wie sie der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung entsprechen würde, ab. Der Übelstand ist nur der, daß über diese Abweichungen nichts bekannt ist, so daß man gezwungen ist, eine mehr oder weniger willkürliche Annahme einzuführen, um Anfangs- und Endgeschwindigkeit auf der freien Weglänge mit der dazugehörigen Maxwellschen Geschwindigkeit in Verbindung zu bringen, und je nach der Annahme wird auch die Wanderungsgeschwindigkeit verschieden ausfallen. Die Willkürlichkeit der Annahme läßt sich ohne weiteres nur umgehen, wenn man das Problem von Grund aus, ohne Anlehnung an die Diffusionsbetrachtung, in Angriff nimmt, wie es eben Herr Lenard mit dem oben angegebenen Resultat schon seit 1900 getan hat.

Wir können daher als Ergebnis unserer Untersuchung angeben, daß das von Herrn Langevin gewählte Rechnungsverfahren wohl in Anwendung auf Probleme der Diffusion brauchbar erscheint, nicht aber zur feineren Berechnung der Wanderungsgeschwindigkeit eines Partikels in einem Kraftfeld.

Heidelberg, November 1919.

(Eingegangen 9. Dezember 1919.)

6. *Über erzwungene Schwingungen bei gestörter Superposition;*

von E. Waetzmann.

§ 1. Fragestellung.

Bekanntlich ergibt die gewöhnliche Theorie der erzwungenen Schwingungen, die mit linearen Gleichungen operiert, sogenannte ungestörte Superposition der Schwingungen. Das soll heißen, daß sich die Schwingungen des erregten Körpers rein additiv aus den Perioden, die in der erregenden Kraft enthalten sind, zusammensetzen. Werden dagegen nichtlineare Gesetze für den erregten Körper zugrunde gelegt, so treten „Störungen" auf, die erregten Schwingungen enthalten auch solche Perioden, welche primär noch nicht gegeben sind. Die mathematische Behandlung dieser Vorgänge ist leider so schwierig, daß sie bisher über die Betrachtung des Massenpunktes[1]) und eines Spezialfalles für die Saite und Membran[2]) nicht hinausgekommen ist. Dagegen harrt das im Hinblick auf eine experimentelle Untersuchung der gestörten Superposition besonders wichtige allgemeine Problem der Membran, und erst recht der belasteten Membran, noch der Lösung.

Das Experiment ist in unserer Frage bisher nicht glücklicher gewesen als die Theorie. Nach Helmholtz sollen zwar die sehr starken sogenannten subjektiven Kombinationstöne (K. T.) infolge nichtlinearer Kraftgesetze für das schwingende Trommelfell entstehen; jedoch können diese Beobachtungen an K. T. nicht als sichere Bestätigung der theoretischen Folgerungen aus den nichtlinearen Schwingungsgesetzen angesehen werden, so lange es nicht gelingt, entsprechende Vorgänge auch objektiv außerhalb des Ohres zu beobachten. Das wollte

1) H. Helmholtz, Pogg. Ann. 99. S. 497. 1856.
2) Cl. Schaefer u. E. Juretzka, Ann. d. Phys. 41. S. 581. 1913.

aber bisher, wenigstens in quantitativer Beziehung, durchaus nicht gelingen.[1])

In Anbetracht der großen Wichtigkeit der Frage der gestörten Superposition auch auf nichtakustischem Gebiete[2]) wurden von neuem entsprechende Versuche aufgenommen. Die von Helmholtz am Massenpunkt entwickelte Theorie gibt Störungsglieder von verhältnismäßig kleiner Amplitude. Ob und inwieweit die am Massenpunkt gewonnenen quantitativen theoretischen Ergebnisse auch für kompliziertere Gebilde Gültigkeit behalten, wurde aber vorläufig außer Acht gelassen, und ebenso die noch weiter gehende Frage, ob vielleicht schon die Grundgedanken der Helmholtzschen Theorie auf das Hören der subjektiven K. T. nicht anwendbar sind[3]). Vielmehr wurde zunächst unter Verzicht auf einen theoretischen Leitfaden nach einer Versuchsanordnung gesucht, bei welcher membranartige Gebilde in Analogie zu der großen Stärke der subjektiven K. T. ganz grobe „Störungseffekte" ergeben könnten. Als geeignet hierfür erwiesen sich schwach gespannte, sehr empfindliche, auf einer Seite durch Wachskügelchen u. dgl. stark belastete Gummihäute, die senkrecht angeordnet waren. So unsympathisch diese Versuchsanordnung mit derartigen komplizierten, für eine theoretische Behandlung kaum zu definierenden Gebilden zunächst auch erscheinen mag, so hat sie sich doch auf das beste bewährt. *Tatsächlich erhält man an unseren Gummihäuten bei passender Wahl der erregenden Töne die gesuchten Störungen in geradezu verblüffender Stärke.* Hierauf kam es aber für den ersten Schritt allein an. Vergegenwärtigen wir uns außerdem die Kompliziertheit der Gebilde im Ohre, welche das Hören vermitteln und speziell die Entstehung der subjektiven K. T. veranlassen sollen, so wird man vielleicht finden, daß die von mir gewählte Versuchsanordnung nicht nur zweckentsprechend, sondern auch verhältnismäßig

1) Auf die fragliche Literatur möchte ich hier der Platzersparnis halber nicht eingehen, zumal ich demnächst in anderem Zusammenhange ausführlich auf diese Fragen zurückkomme.

2) Vgl. z. B. G. Duffing: „Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung." Sammlung Vieweg, Heft 41 u. 42. 1918.

3) Vgl. E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 42. S. 743—44. 1918.

einfach ist. Daß sich die Resultate der vorliegenden Untersuchung nicht nur auf solche Schwingungen beziehen, die zu den akustischen im engeren Sinne des Wortes gehören, braucht wohl kaum gesagt zu werden.

Eine kurze Mitteilung über Schwingungsaufnahmen an belasteten Gummihäuten, die ich im folgenden der Kürze des Ausdruckes halber auch als Membranen bezeichnen werde, habe ich bereits gemeinsam mit W. Moser[1]) veröffentlicht. Auch in der Aufnahme und Analyse eines großen Teiles der der vorliegenden Arbeit zugrunde liegenden Schwingungskurven bin ich durch Hrn. W. Moser unterstützt worden.

§ 2. Versuchsanordnung.

Es wurden zum großen Teil dünne Gummihäute benutzt, wie sie früher in Drogerien käuflich waren. Diese Häute wurden über den verdickten Rand der kleineren Öffnung eines Trichters gezogen und mit Gummischnüren festgebunden. Die Spannung läßt sich dann nur grob, aber in sehr einfacher Weise ändern. Wenn es darauf ankam, auch feinere Spannungsänderungen ausführen zu können, wurde ein ringförmiger Wulst benutzt, der aus zwei halbkreisförmigen Hälften bestand, deren Abstand mittels feiner Schrauben ein wenig geändert werden konnte. Bei längeren Versuchsreihen mußte des öfteren nachgeprüft werden, ob der Spannungszustand genügend konstant geblieben war. Der Durchmesser der Gummihäute betrug durchschnittlich etwa 5 cm. Die Belastung geschah durch Wachskügelchen, die eventuell noch durch Metallstückchen beschwert waren, und in der Regel etwas seitlich der Mitte der Membranen angebracht wurden. Ihr Gewicht wurde so gewählt, daß es gegenüber den elastischen Kräften der Häute stets merklich, zuweilen sehr stark in Betracht kam. Durch die angeklebten Gewichte wurde die Gummihaut je nach dem Ort der Belastung und dem Verhältnis zwischen ihren elastischen Kräften und der Größe des Belastungsgewichtes mehr oder weniger stark durchgebogen und deformiert. *Die Ebene der Häute war bei den in der vorliegenden Arbeit abgebildeten Kurven die Vertikalebene.*

1) E. Waetzmann u. W. Moser, Verh. d. D. Phys. Ges. 19. S. 13. 1917.

Das Stativ, welches den Trichter mit Gummihaut hielt, stand auf einer Platte, die auf drei Gummibällen ruhte, die ihrerseits auf einem schweren Tisch lagen, dessen Füße auf Blei- und Gummiplatten standen. Hierdurch waren die Membranen gegen kurzperiodische Erschütterungen, die durch den Boden kamen, genügend geschützt; langperiodische Erschütterungen stören weniger. Natürlich mußten die Membranen bei ihrer außerordentlich großen Empfindlichkeit auch vor Erschütterungen, die durch die Luft übertragen werden, sorgfältig bewahrt werden. Z. B. macht schon ein geringer Luftzug im Zimmer, der von dem Experimentator erregt wird, eine Aufnahme unmöglich.

Die photographische Registrierung der Schwingungsform einer bestimmten Stelle der Membran geschah in der üblichen Weise mit Hilfe eines kleinen an der betreffenden Stelle — in der Regel dicht neben dem Belastungskörper — befestigten Spiegels. Zunächst wurde immer die Ruhelage (Nullinie) photographiert, darauf die Schwingungen.

Als Tonquellen für die Erregung der Häute dienten in erster Linie Stimmgabeln auf Resonanzkästen; wenn es auf Reinheit der „Töne“ nicht ankam, auch ein lautsprechendes Telephon, das durch eine Wechselstromsirene betrieben wurde. Pfeifen u. dgl. eignen sich weniger gut. Die Wechselstromsirene war wegen der Möglichkeit, die Tonhöhe in weiten Grenzen kontinuierlich zu ändern, für manche Zwecke besonders bequem. Die Tonquellen standen auf einem Tisch für sich, vor dem freien Ende des Trichters. Jedoch konnten die erregenden Töne der Gummihaut auch von der Gegenseite zugeleitet werden, wobei, um beiderseitig gleiche Verhältnisse zu haben, bei einigen Aufnahmen ein Doppeltrichter benutzt wurde, der aus zwei mit ihren engeren Öffnungen zusammenstoßenden Einfachtrichtern bestand. Die Gummihaut liegt dann in der Berührungsebene der beiden Einfachtrichter. Der Zweck der verschiedenseitigen Erregung der Gummihaut wird in § 4 ersichtlich werden. Die Grundperiode der Gummihaut wurde in der Weise bestimmt, daß die Tonquelle (Telephonmembran), mit hoher Schwingungszahl beginnend, kontinuierlich vertieft, und das tiefste Resonanzmaximum aufgesucht wurde.

Einige Male wurden zwischen Klangquelle und Membran

zur möglichst restlosen Beseitigung von Obertönen (O. T.) Interferenzrohre eingeschaltet. Jedoch konnte die Frage der O. T. noch nicht genügend geklärt werden. Wir kommen hierauf in § 4 zurück.

Ein Teil der aufgenommenen Kurven wurde mit einem Maderschen harmonischen Analysator analysiert. Nach einigen Vorversuchen konnte man sich ein ungefähres Bild von den auftretenden Schwingungsarten machen, und es gelang bald, die Versuchsbedingungen (Spannung und Belastung der Membran, Höhe der erregenden Töne relativ zum Grundton der Membran usw.) so zu wählen, daß der gerade gewünschte Haupttyp von Schwingungen erhalten wurde. Ich betone das deshalb, weil den Beobachter bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche der Fülle der Variationsmöglichkeiten und der auftretenden Erscheinungen gegenüber leicht eine gewisse Ratlosigkeit beschleichen könnte. Es empfiehlt sich auch dringend, die Form der erregenden Kräfte zunächst so einfach wie möglich, d. h. so zu wählen, daß etwaige „Störungseffekte" leicht zu erkennen und zu verfolgen sind[1]), *also mit Einzeltönen zu beginnen, dann zwei Töne zu nehmen, die eine typische Schwebungskurve geben und dann erst zu komplizierteren Erregungsformen überzugehen*

Unsere Gummihäute theoretisch zu behandeln, erscheint zunächst ausgeschlossen. Dagegen ist es auch ohne Theorie möglich, sich über ihre Schwingungsform Vorstellungen zu bilden, welche den tatsächlichen Vorgängen ziemlich nahe kommen dürften und das Zustandekommen der beobachteten „Störungseffekte" zum großen Teil verständlich machen. Die Wachskugel wird sich, wenn sie genügend schwer ist, bei Schwingungen der Gummihaut ähnlich bewegen, als wenn sie nicht von der ganzen Haut getragen würde, sondern von einer Anzahl von Gummibändern, deren Enden am Rande des Trichters befestigt sind. Und wir wollen noch weiter abstrahieren und unsere Haut in erster Annäherung als ein einzelnes, oben und unten befestigtes, seitlich durchgebogenes und in der Nähe der Durchbiegungsstelle belastetes Gummiband ansehen. *Die Gummihaut reduziert sich dann auf ein Pendel, aber, wie wir sehen werden, auf ein Pendel von variabler Länge.* Die

1) Vgl. hierzu E. Waetzmann, Phys. Zeitschr. 15. S. 638. 1914.

Wachskugel ist der Pendelkörper, und ihr jeweiliger Drehpunkt ungefähr der nächste senkrecht über ihr liegende Knotenpunkt, im einfachsten Falle, bei Schwingungen in der Grundperiode der Gummihaut, also eine Stelle des festen Randes. Die untere Befestigung des Gummibandes und die Seitenbänder können dann als Dämpfungsvorrichtung gedeutet werden.

§ 3. Erregung der Gummihaut durch einen Ton.

Wird die Gummihaut durch einen Ton (Primärton = P.T.) erregt, so erfolgen die Schwingungen des betrachteten Punktes vielfach nicht symmetrisch zu seiner Ruhelage („Einseitigkeit" der Schwingungen). Diese einseitige Verschiebung der Schwingungskurve gegenüber der Nullinie ist zuweilen sehr groß, größer als die Schwingungsamplitude (Fig. 2, Kurvenbild *b*). Die Einseitigkeit tritt aber nicht immer auf.

Abgesehen von besonderen Fällen, auf die hier nicht eingegangen werden soll, war sie für sehr tiefe P.T., die unterhalb oder in der Nähe der Grundperiode der Membran lagen, nicht vorhanden (Fig. 1, Kurve *a*), und kam erst bei höheren P.T. zum Vorschein (Fig. 1, Kurven *b* u. *c*). Zuweilen, aber seltener, trat sie innerhalb des benutzten P.T.-Intervalles nur für einen bestimmten kleinen Tonbereich auf, um nicht nur für tiefere, sondern auch für höhere P.T. wieder zu verschwinden oder wenigstens unmerklich zu werden. Sehr selten kam es vor, daß für eine bestimmte Höhenlage des P.T. die einseitige Verschiebung der Schwingungen gegen die Nullinie nach der entgegengesetzten Seite erfolgte als die Verschiebung für andere Höhenlagen des P.T. (Fig. 1, Kurve *f* gegenüber *d*, *e* und *g*).

Die Kurven *a*, *b* und *c* der Fig. 1 sind an der gleichen Gummihaut, deren Grundperiode bei etwa 170 Schwingungen lag, aufgenommen. Die P.T.-Höhe betrug 200 bzw. 500 bzw. 700 Schwingungen. Die Kurven *d* bis *g* der Fig. 1 sind ihrerseits wieder an ein und derselben Gummihaut mit einer Grundperiode von etwa 100 Schwingungen aufgenommen. Die P.T.-Höhe betrug 640 bzw. 500 bzw. 700 bzw. 500 (Kontrollaufnahme) Schwingungen.

Durchweg wurde bei konstant gehaltener P.T.-Höhe ein starker Anstieg der Einseitigkeit mit wachsender Stärke des P.T. beobachtet. Zur Veranschaulichung diene Fig. 2.

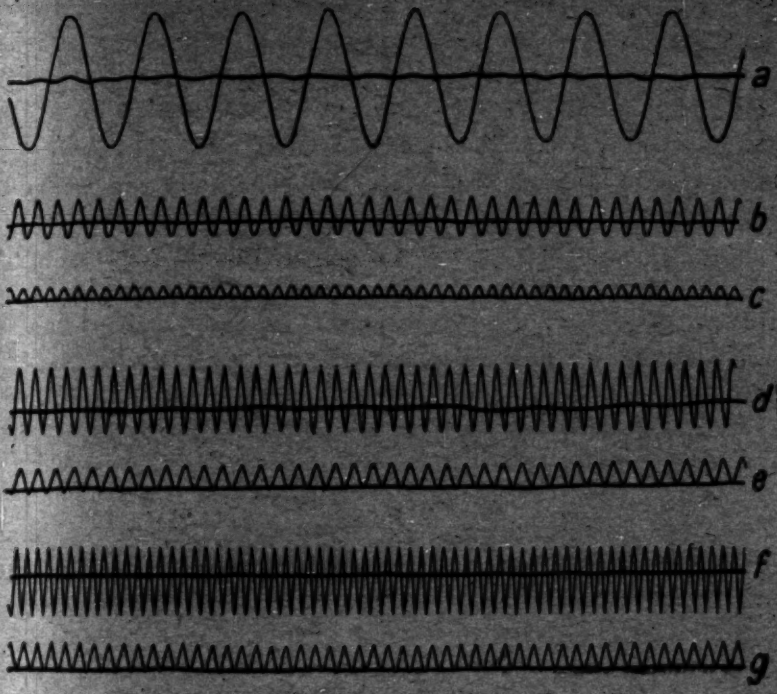


Fig. 1.

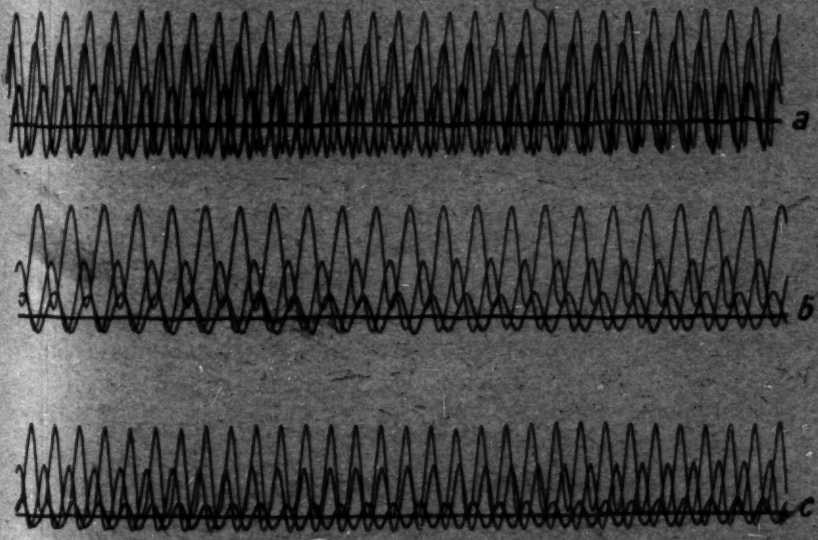


Fig. 2.

Die Kurvenbilder *a* und *b* der Fig. 2 sind an der gleichen, sehr stark belasteten Gummihaut mit einer Grundperiode von etwa 330 Schwingungen aufgenommen; das Kurvenbild *c* an einer weniger stark gespannten und geringer belasteten Haut mit einer Grundperiode von etwa 170 Schwingungen. Die P. T.-Höhe für jedes der drei Bilder *a*, *b* und *c* betrug 562 bzw. 480 bzw. 500 Schwingungen. Innerhalb jeder der drei Kurvenbilder war die P. T.-Höhe also konstant; scheinbare kleine Unterschiede sind durch etwas verschiedene Laufgeschwindigkeit des Registrierapparates bei den nacheinander erfolgenden Aufnahmen für verschiedene Tonstärken veranlaßt.

§ 4. Die Entstehung der Einseitigkeit.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie die beobachtete Einseitigkeit zustande kommt. Wir müssen hierauf ausführlich eingehen, zumal uns diese Überlegungen gleichzeitig den Schlüssel für das Verständnis der Kurvenbilder in § 5 geben sollen.

Durch die einseitige Belastung der Gummihaut wird die Ruhelage des betrachteten Punktes (Ort des Spiegels), wie sie vor der Belastung bestand, geändert. Gegenüber der Ruhelage bei unbelasteter Membran sind die Schwingungen der belasteten also einseitig verschoben. Photographiert wird aber nach der Belastung. Die Nullinien unserer Kurven stellen also immer die Ruhelage der belasteten Membran dar. Daß gegenüber dieser Ruhelage Einseitigkeit zustande kommt, ist aber durchaus nicht selbstverständlich. Im Gegenteil müßten die Schwingungen symmetrisch zu der der einseitigen Belastung entsprechenden Ruhelage erfolgen, wenn wir unser Gebilde als gewöhnliches Pendel betrachten. Bevor wir zu der notwendigen erweiterten Betrachtungsweise übergehen, wollen wir prüfen, ob die zurzeit vorliegende Theorie der gestörten Superposition unsere Beobachtungsergebnisse verständlich zu machen vermag.

Hierzu müssen wir zunächst überlegen, ob die durch die Belastung verursachte Durchbiegung der Haut Veranlassung gibt[1]), daß die einzelnen betrachteten Punkte nicht mehr dem gewöhnlichen linearen symmetrischen Kraftgesetz, sondern einem

1) H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen. 5. Ausg. S. 262. Anm.

unsymmetrischen Kraftgesetz gehorchen, beispielsweise dem Helmholtzschen quadratischen (Kraft $= ax + bx^2$) Gesetz. Abgesehen davon, daß die beobachtete Einseitigkeit oft zu groß erscheint, um sich aus dem Helmholtzschen Ansatz ableiten zu lassen, gibt derselbe keine Abhängigkeit der Einseitigkeit von der P. T.-Höhe, sondern nur von den elastischen Eigenschaften des Massenpunktes und von der Stärke der Erregung. *Gerade die Abhängigkeit von der Höhe der P. T. ist aber das Hauptcharakteristikum der beobachteten Einseitigkeiten.* Auch andere Ansätze als der Helmholtzsche über die Größe und Form der elastischen Kraft bzw. der Dämpfung[1]), aus denen ein Anwachsen der Einseitigkeit mit der P. T.-Höhe folgt, können den Beobachtungen schon qualitativ nicht gerecht werden, da die beobachtete Einseitigkeit in viel verwickelterer Weise von der P. T.-Höhe abhängt als es diese Ansätze ergeben. Und es bliebe auch hier die Schwierigkeit, die Größe des beobachteten Effektes zu verstehen, obwohl freilich die Einseitigkeit relativ zu den Amplituden der P. T. um so größer ausfällt, je tiefer der Grundton der Membran relativ zu den P. T. ist, was natürlich auch schon für den Helmholtzschen Ansatz gilt.

Durch ziemlich genau entsprechende Überlegungen wie die eben angestellten kann man sich ferner klar machen, daß die Einseitigkeit nicht eine Folge des Schalldruckes[2]) sein kann. Das wurde auch noch unmittelbar experimentell bestätigt, indem der P. T., ohne daß sonst etwas an der Versuchsanordnung geändert wurde, der Gummihaut erst von der einen und dann von der anderen Seite zugeleitet wurde (vgl. § 2). Im Falle einer Schalldruckwirkung würde die Einseitigkeit in den beiden Fällen nach entgegengesetzten Seiten der Ruhelage gerichtet sein. Das Experiment zeigte aber das Gegenteil. Die einseitige Verschiebung erfolgte beide Male im gleichen Sinne, wie es z. B. dem Helmholtzschen Kraftansatz entsprechen würde, der aber seinerseits durch die vorangegangenen Überlegungen schon ausgeschaltet ist.

---

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 33. S. 1216. 1910.

2) E. Waetzmann, Verh. d. D. Phys. Ges. 16. S. 424. 1914 und Phys. Zeitschr. 21. 1920.

Der wirkliche Grund für die Entstehung der Einseitigkeit dürfte ein viel plumperer sein, und der Weg, sie zu verstehen, ist bereits angedeutet worden. Wir betrachten unsere belastete Gummihaut als ein Pendel, dessen Drehpunkt nicht festliegt, sondern mit wachsender Unterteilung der Gummihaut, also im allgemeinen mit wachsender Höhe des P. T. vom Rande der Membran immer näher an den Pendelkörper heranrückt. *Solange die Membran als Ganzes schwingt, also für relativ tiefe P. T., ist der Drehpunkt der feste Rand; die Schwingungen müssen, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, symmetrisch zur Ruhelage erfolgen.* Bildet sich nun für einen höheren P. T. z. B. ein zweiter Knotenkreis aus, innerhalb dessen sich der Belastungskörper befindet, so liegt der Drehpunkt jetzt ungefähr (s. weiter unten) in diesem Knotenkreis. *Die Pendellänge ist damit entsprechend verkürzt, und die Schwingungen für diesen höheren P. T. müssen gegen die Ruhelage, die ja immer die gleiche bleibt, einseitig verschoben sein,* und zwar um einen Betrag, der von der Differenz der Mittellagen des unverkürzten und des verkürzten Pendels abhängt. Die Mittellage des verkürzten und des unverkürzten Pendels ist nur deshalb eine verschiedene, weil der Pendelkörper seitlich sitzt; *also erst die Belastung der Gummihaut bringt, in Übereinstimmung mit der Beobachtung, die einseitige Verschiebung der Schwingungen gegen die Nullinie hervor, und zwar, wieder in Übereinstimmung mit der Beobachtung, nur für P. T., die relativ zum Grundton der Membran hoch liegen.* Berücksichtigt man die Fülle der möglichen Schwingungsformen schon der unbelasteten Haut, und die weiteren Variationsmöglichkeiten durch Änderung der Größe und des Ortes der Belastung sowie des Ortes des Spiegels, so kann es nicht überraschen, wenn gelegentlich für eine bestimmte Tonhöhe auch ein Durchknicken nach der entgegengesetzten Seite als für andere Tonhöhen eintritt. Ebenso ist es verständlich, daß es neben der Grundschwingung auch unterteilte Schwingungsformen der Gesamtmembran gibt, bei welchen an dem gerade betrachteten Ort keine Einseitigkeit entsteht.

Bei den bisher angestellten Beobachtungen wurde die P. T.-Höhe im allgemeinen sprungweise geändert. Wir müssen uns aber, besonders im Hinblick auf § 5 darüber klar sein,

wie sich die Form der Membranschwingungen ändert, wenn die P.T.-Höhe kontinuierlich geändert wird. Wir können diese Frage auch dahin spezialisieren, welches die Form der Membranschwingungen ist, wenn der erregende Ton zwischen zwei Eigentönen der Membran liegt. Man nahm früher trotz einer gegenteiligen Behauptung Savarts[1]), die für unrichtig erklärt wurde, an, daß eine Membran nur auf solche Töne mitschwingen könne, die mit einem ihrer Eigentöne zusammenfallen. Daß heißt mit anderen Worten, daß nur diejenigen Formen von Membranschwingungen (Chladnischen Klangfiguren) möglich sind, welche den Eigenschwingungen der Membranen entsprechen. Durch Versuche von Elsas[2]) und F. A. Schulze[3]) wurde aber festgestellt, daß geeignete Membranen — zu welchen auch unsere Gummihäute zu rechnen sind — bei geeigneter Erregung tatsächlich auf jeden P.T. mitschwingen, und daß die einzelnen Knotenlinienfiguren, wie sie von den freien Schwingungen her bekannt sind, bei allmählicher Änderung der P.T.-Höhe kontinuierlich ineinander übergehen. Debye[4]) hat dann im Anschluß an die Beobachtungen von F. A. Schulze gezeigt, daß die so entstehenden Zwischenformen als die Übereinanderlagerung benachbarter freier Schwingungen gedeutet werden können. *Bei unserer Versuchsanordnung wird also mit einer kontinuierlichen Änderung der P.T.-Höhe eine kontinuierliche Änderung der Größe der Einseitigkeit Hand in Hand gehen.*

Endlich muß noch ein wichtiger Punkt, der schon oben angedeutet wurde, erörtert werden, nämlich die Zunahme der Einseitigkeit mit wachsender Amplitude. Auch er scheint mir für unsere Vorstellungen keine unüberwindlichen Schwierigkeiten zu bieten. Vielmehr ist es verständlich, daß der Drehpunkt für den Belastungskörper beispielsweise vom Rande erst dann völlig in den ersten Knotenkreis hineinrutschen wird, wenn durch große Elongationen und die hierdurch geweckten großen elastischen Kräfte das ganze Gebilde eine gewisse Steifigkeit erhalten hat, und die Knotenlinien entsprechend

1) F. Savart, Ann. de chim. et de phys. (2) 32. S. 384. 1826.
2) A. Elsas, Wied. Ann. 19. S. 474. 1883.
3) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 24. S. 795. 1907.
4) P. Debye, Ann. d. Phys. 25. S. 819. 1908.

fixiert sind. Für kleinere Amplituden wird der wahre Drehpunkt noch näher am Trichterrande liegen. Demgemäß würde einer Vergrößerung der Amplitude wieder eine Verkürzung der Pendellänge und damit vergrößerte Einseitigkeit entsprechen. Zuweilen schien die Membran, wenn sich ihre Amplitude einem bestimmten Maximalwert näherte, fast ruckweise in eine neue Symmetrielage umzuspringen.

Zu den obigen Überlegungen möchte ich noch folgendes bemerken: Sie sind nur entstanden, weil die bisher vorliegenden Theorien über unsymmetrische Schwingungen versagten. Demgemäß sollen und können sie weiter nichts leisten, als daß sie eine zwar anschauliche, aber nur rohe Deutung der hauptsächlichen Beobachtungsresultate zulassen. Wenn die Helmholtzsche Theorie der gestörten Superposition als hierfür ungeeignet abgelehnt wurde, so bezieht sich das nur auf ihre jetzige primitive Form. Dagegen soll nicht behauptet werden, daß, wenn es gelingen sollte, den einen oder anderen Fall unserer Versuchsanordnung theoretisch zu behandeln, hierfür nicht ähnliche Überlegungen zugrunde gelegt werden müßten wie der Helmholtzschen Rechnung.

Ferner möchte ich hervorheben, daß in der vorliegenden Arbeit nur solche Effekte berücksichtigt worden sind, die durch ihre Stärke besonders auffielen. Wenn z. B. gesagt wurde, daß bei Übereinstimmung des P. T. mit dem Grundton der Membran keine Einseitigkeiten auftraten, so soll das nur heißen, daß sie (in fast allen beobachteten Fällen) so gering waren, daß ihre Existenz ohne genaues Ausmessen nicht festzustellen war. Unter der Fülle der beobachteten Erscheinungen fanden sich einige, die auf andere Entstehungsursachen als die durch die Unterteilung der Gummihaut bedingten Vorgänge schließen lassen. Diese Beobachtungen sind aber nicht weiter verfolgt worden und noch nicht genügend geklärt. Hierher gehört auch die Frage der Entstehung von O. T. bei Erregung der Membran durch einen P. T.

§ 5. Erregung der Gummihaut durch zwei Töne.

Wird die Gummihaut jetzt gleichzeitig durch zwei P. T. erregt, deren Schwingungszahlen p und q seien, so entstehen in ihr unter geeigneten Bedingungen neben den den P. T. ent-

sprechenden Schwingungen noch Kombinationsschwingungen, in erster Linie Differenztöne erster Ordnung (D. T. 1. O.), also Töne von der Schwingungszahl $p-q$. Über deren Entstehung können wir uns nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen leicht Rechenschaft geben, ohne daß wir uns noch auf Einzelheiten einlassen. Wählen wir die P. T. so, daß ihre Resultierende periodisch nach $p-q$ ist und ausgesprochene Amplitudenschwankungen enthält, also z. B. $p = 600$ und $q = 500$ bei ungefähr gleichen Amplituden, so wird die Gummihaut zu Schwingungen erregt, welche eine im Tempo $p-q$ in ihrer Größe schwankende Einseitigkeit enthalten. D. h. aber, es entstehen in der Gummihaut neue Töne, die sich in einer Fourierschen Reihe darstellen lassen, deren Grundperiode mit der Periode der „Schwebungen" übereinstimmt. Liegt $p-q$ noch in der Nähe des Grundtones der Gummihaut, so ist infolge von Resonanz ein besonders starker D. T 1. O. zu erwarten, was durch Kurve *a* in Fig. 3 veranschaulicht wird.

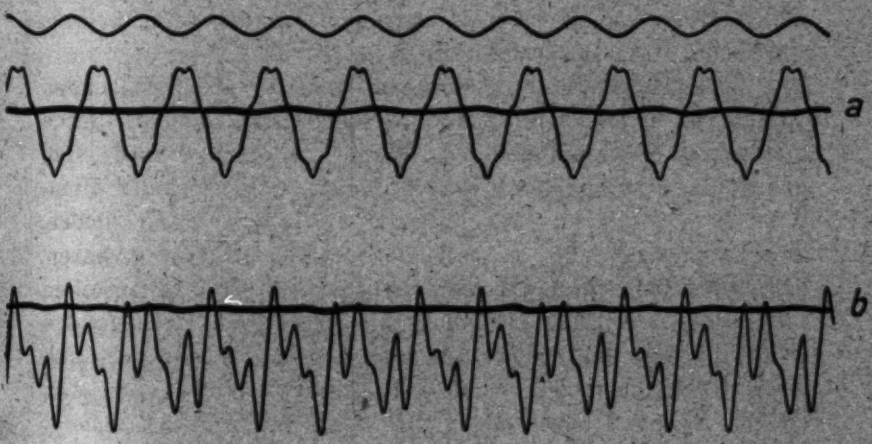


Fig. 3.

Hierin ist $p = 700$, $q = 600$ und n_0 etwa gleich 100. Die Analyse ergibt für die Amplituden von p, q und $p-q$ ein Verhältnis von etwa 0,5 : 1,4 : 13,0. *Also die Amplitude des Störungsgliedes ist etwa 26 bzw. 9 mal so groß als die Amplituden der P. T.!* Die obere Kurve des Bildes *a* der Fig. 3 ist die Schwingungskurve einer Vergleichsgabel.

In Kurve *b* der Fig. 3 ist $p = 800$, $q = 560$, n_0 etwa gleich 330. Das Amplitudenverhältnis von p, q und $p-q$ ist etwa 6,5 : 8,9 : 8,4. Also ist hier, wie zu erwarten war, der D. T. 1. O. schwächer als in Kurve *a* der Fig. 3. Auch der D. T. 2. O. ist in *b*, wenn auch nur schwach, vorhanden. Darauf wollen wir aber nicht näher eingehen, zumal auch der O. T. $2q$ in der gleichen Größenordnung wie $2q-p$ auftritt.

Bevor wir uns den Figg. 4 und 5 zuwenden, wollen wir folgende Überlegung einschalten: Wir haben das Auftreten der D. T. als das Produkt des Schwankens der Einseitigkeit infolge des Schwankens der Amplitude der Resultierenden gedeutet. Es wäre aber innerhalb des im vierten Paragraphen entwickelten Gedankenganges möglich, daß K. T. auch noch auf eine andere Weise zustande kommen. In einer „Schwebungskurve" ist nämlich die „Schwingungsanzahl"[1]) nicht konstant, sondern ändert sich bei verschiedenen P. T.-Amplituden kontinuierlich vom Maximum zum Minimum. Dieses Schwanken der Schwingungsanzahl könnte aber seinerseits wieder ein merkliches Schwanken der Einseitigkeit zustande bringen, da sich, wie in § 4 besprochen, bei kontinuierlicher Änderung der P. T.-Höhe die Form der Knotenlinienfiguren kontinuierlich mitändert.

Neben dem D. T. 1. O. müssen je nach den Versuchsbedingungen, insonderheit der Form der Resultierenden der P. T. und der Lage der Eigentöne der Gummihaut, auch andere K. T. mehr oder weniger stark hervortreten. Denn von der Form der Resultierenden hängt die Form der Einseitigkeitsschwankungen ab, und durch diese ist die Verteilung der Intensität auf die einzelnen Glieder unserer Fourierschen Reihe gegeben. Hat die Resultierende ausgesprochene Schwebungsform, so herrscht das dieser Schwebungsperiode entsprechende Glied der Reihe vor, also der Ton $p-q$, vorausgesetzt, daß dem die Resonanzverhältnisse nicht widersprechen. Wird das Intervall der P. T. größer, also z. B. $p : q = 8 : 5$, wo die einzelnen Minima der Resultierenden nicht mehr einander äquivalent sind, so werden auch andere Glieder der Reihe mehr merklich.

1) Über die „Schwingungsanzahl" in einer zusammengesetzten Schwingungskurve vgl. E. Waetzmann, Phys. Ztschr. 18. S. 560. 1917.

In den Kurven der Fig. 4 waren die P. T. p und q der Reihe nach 640 und 400 bzw. 700 und 500 bzw. 700 und 500. Die Grundtöne der Gummihaut waren n_0 = etwa 100 bzw. 220 bzw. 100. In allen drei Kurven der Fig. 4 tritt auch $2q-p$ in merklicher Stärke auf. In den Kurven a und b ist seine Amplitude etwa halb so groß wie die von $p-q$, die ihrerseits von der gleichen Größenordnung wie die Amplituden von q sind. In Kurve c der Fig. 4 ist das P. T.-Intervall das gleiche

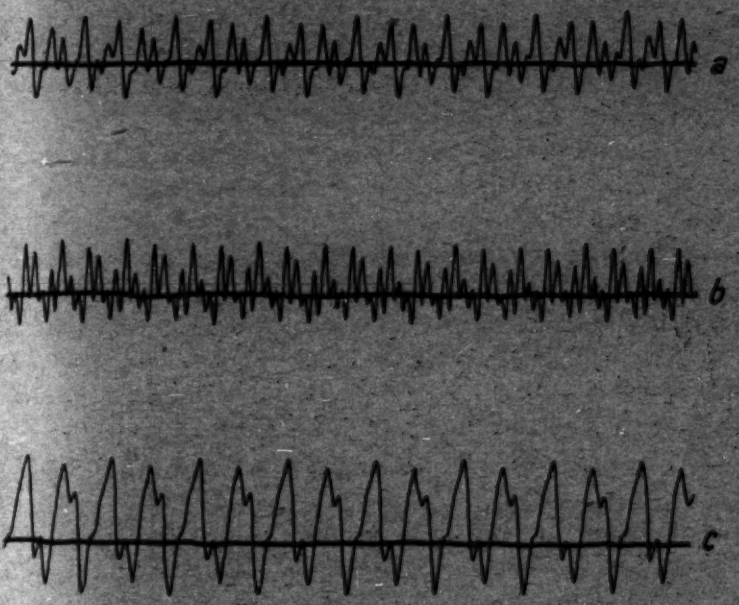


Fig. 4.

wie in b, aber die Resonanzverhältnisse sind günstiger gewählt, so daß in c sowohl $2q-p$ als auch namentlich $p-q$ relativ zu p und q viel stärker sind als in b. Das Amplitudenverhältnis von $p, q, p-q$ und $2q-p$ ist in c etwa 3,4 : 4,3 : 12,5 : 3,2.

In den Kurven der Fig. 5 sind zwei K. T. registriert, die bei subjektiver Beobachtung im allgemeinen so leise sind, daß ihre Existenz ernstlich in Zweifel gezogen worden ist. Kurve a in Fig. 5 enthält einen sogenannten zwischenliegenden D. T. 1. O., dessen Schwingungszahl zwischen denen der P. T. liegt, und Kurve b einen Summationston (S. T.) $p+q$. Die Schwingungs-

zahlen der P. T. in a bzw. b sind $p = 700$ und $q = 250$ bzw. $p = 300$ und $q = 200$. Die zugehörigen Grundtöne der Gummihaut $n_0 =$ etwa 330 bzw. 500. Das Amplitudenverhältnis von p, q und $p-q$ ist in a etwa 1,4 : 5,3 : 7,9. In Kurve b ist das Amplitudenverhältnis von p, q und $p+q$ etwa 5,7 : 9,6 : 3,1 Der S. T. ist also verhältnismäßig sehr stark. Er steht zwar in ausgesprochener Resonanz mit dem Grundton der Gummihaut, trotzdem ist die Frage der Art seines Zustandekommens schwierig

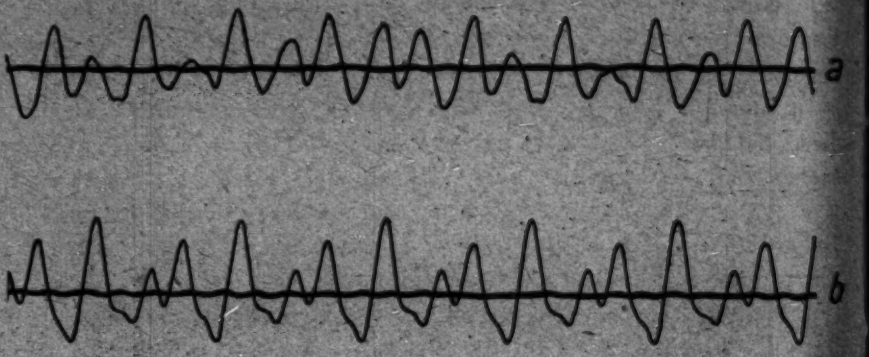


Fig. 5.

und ich möchte sie vorläufig ausdrücklich offen lassen. Im Rahmen dieser Arbeit habe ich die den S. T. enthaltende Kurve überhaupt nur deshalb mitgeteilt, um einerseits nicht den falschen Eindruck zu erwecken, als wären bereits sämtliche Punkte völlig geklärt und weil andererseits der Nachweis eines objektiv existierenden S. T. auch schon unabhängig von der Frage seines Zustandekommens wichtig ist.

§ 6. Beziehungen zur Theorie des Hörens.

Die in der vorliegenden Arbeit mitgeteilten Beobachtungen an einseitig stark belasteten Gummihäuten gestatten wichtige Rückschlüsse auf die Theorie des Hörens und speziell auf die Entstehungsart subjektiver K. T. Im Laufe der Untersuchung drängte sich mehr und mehr die Vorstellung auf, daß die Schwingungen des Trommelfelles — einer in einem angenähert senkrecht stehenden Ring eingespannten, ungefähr kreisförmigen, trichterförmig eingezogenen, an dieser Stelle durch die Gehörknöchelchen einseitig stark belasteten Membran — in vielen Beziehungen den Schwingungen der untersuchten Gummihäute

entsprechen dürften. Zur Aufklärung der Schwingungsvorgänge bei der Überleitung des Schalles vom Außenraum zum Innenohr müssen aber neben den in der vorliegenden Untersuchung behandelten Fragen auch noch andere Vorgänge berücksichtigt werden. Deshalb möchte ich hier nur andeutungsweise auf die Entstehung der subjektiven K. T. hinweisen, zumal ich demnächst in anderem Zusammenhange ausführlich darauf zurückkomme.

Wenn dem Ohre gleichzeitig zwei P. T. p und q von getrennten Tonquellen zugeleitet werden, so hört man auch unter den günstigsten Bedingungen in großer Stärke nur die K. T. $p-q$ und $2q-p$; alle anderen sind sehr viel schwächer als diese beiden.[1]) Entsprechend gelang es bisher bei den Versuchen mit den Gummihäuten nur in einigen Fällen, andere K. T. als $p-q$ und $2q-p$ in merklicher Stärke hervorzubringen. Dabei ist die Deutung ihres Zustandekommens noch nicht einmal einwandfrei. Ferner ist folgendes zu beachten: Der Gehörleitungsapparat enthält keine Teile, welche in dem mittleren Tongebiet ausgesprochene Resonanz zeigen. Infolgedessen werden die in diesem mittleren Tonbereich liegenden, von bestimmten P. T. erzeugten subjektiven K. T. nicht so stark sein wie die Störungen, welche wir bei den gleichen P. T. an den Gummihäuten erhalten konnten. Andererseits müssen kleine Änderungen der relativen Höhe der P. T. die Störungserscheinungen an den Gummihäuten viel stärker beeinflussen als die Entstehung der subjektiven K. T., durchaus wieder in Übereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen. Diese wenigen Hinweise sollen hier genügen.

Zusammenfassung.

Störungen der Superposition erzwungener Schwingungen sind von Helmholtz u. a. aus nichtlinearen Schwingungsgleichungen abgeleitet worden. Solche Störungen werden an einseitig stark belasteten Gummihäuten beobachtet und photographiert. Bei Erregung der Gummihäute durch Einzeltöne wird hauptsächlich eine einseitige Verschiebung der Schwingungen gegenüber der Ruhelage beobachtet, bei Erregung durch zwei

1) Vgl. hierüber C. Stumpf, Zeitschr. f. Psychol. 55. S. 1. 1910.

Primärtöne hauptsächlich die Entstehung von Differenztönen erster und zweiter Ordnung. Die gefundenen Störungen sind außerordentlich groß. Für ihre Erzeugung besonders wichtig ist die passende Wahl der Höhe der Primärtöne relativ zum Grundton der Gummihaut. Bei der Diskussion der Beobachtungsergebnisse im einzelnen zeigt sich, daß die bisher vorliegende Theorie der gestörten Superposition zu ihrer Deutung nicht ausreicht. Infolgedessen werden Überlegungen angestellt, welche, ohne irgendwelchen Anspruch auf Strenge zu machen, ein gutes Bild der Vorgänge geben und sich als Leitfaden für die experimentelle Untersuchung bewährt haben.

Breslau, Physikalisches Institut, Dezember 1919.

(Eingegangen 5. Januar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Spezialfabrik von Luftpumpen

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Fleuss, D.R.P.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Stöpsel-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 –/– Funkenlänge

Induktorium mit Demonstrations-schaltung.

Alle Nebenapparate.

Lieferung auf Verlangen.

1920. № 13.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Die Versuche von F. Harreß über die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern;* von *O. Knopf.*

Inhaltsverzeichnis. § 1. Das Ziel der Harreßschen Versuche. — § 2. Das Prismenpolygon. — § 3. Der Weg der Strahlenbündel. Versuche zur Sichtbarmachung der Interferenzstreifen. — § 4. Die definitive Form des Interferometers. — § 5. Der Rotationsapparat. — § 6. Versuche zur Erzeugung monochromatischer Interferenzstreifen. — § 7. Das endgültige Meß- und Aufnahmeverfahren. — § 8. Anpassung der Formel für die Streifenverschiebung auf den Fall eines rotierenden Körpers. — § 9. Zusammenstellung der Messungsergebnisse.

§ 1. Das Ziel der Harreßschen Versuche.

In den Jahren 1909—11 machte mein damaliger Assistent, der leider ein Opfer des Krieges gewordene F. Harreß, für seine Promotionsarbeit „*Die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern*“ im Keller der Jenaer Universitätssternwarte Versuche zur Bestimmung des Mitführungskoeffizienten des Äthers im Glase. Er hatte hierbei namentlich die Absicht, eine Entscheidung darüber herbeizuführen, welcher der beiden Formeln für den Mitführungskoeffizienten,

ob der Fresnelschen, $\frac{n^2-1}{n^2}$,

oder der Lorentzschen, $\frac{n^2-1}{n^2}-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}$,

der Anspruch auf Richtigkeit zukomme.[1])

1) Nach Hrn. Einsteins Bemerkungen in den *Astr. Nachr.* 190. S. 7 und 17 würde in dem bei den Harreßschen Versuchen vorliegenden Fall die Relativitätstheorie für den Mitführungskoeffizienten den Wert $\frac{n^2-1}{n^2}$ verlangen, während Harreß den Lorentzschen Wert ganz allgemein für den aus der Relativitätstheorie sich ergebenden ansah. Dagegen ist $\frac{n^2-1}{n^2}-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}$ nach Hrn. Einstein die bei der Fizeauschen Versuchsanordnung in Betracht kommende Formel.

Sein Resultat ist jedoch durch ein Versehen entstellt worden, indem er in seiner Formel für die vom Licht zum Durchlaufen des Körpers gebrauchte Zeit an Stelle von $1 - x$ den Mitführungskoeffizienten x selbst gesetzt hat. Auch finden sich in der Abhandlung einige Rechenfehler und einige, wenn auch ziemlich geringfügige Vernachlässigungen.

Hr. Harzer hat in den *Astronomischen Nachrichten*, Bd. 198, S. 377 die Berichtigung der Harreßschen Arbeit vorgenommen und hierbei zugleich die Behandlung der Beobachtungen auf eine theoretisch sicherere Grundlage gestellt. Er findet als Wert des Mitführungskoeffizienten

	für grünes Licht	für rotes Licht
	0,5802 ± 0,0020 (w. F.)	0,5964 ± 0,0015 (w. F.)

während die Formel

$$\frac{n^2 - 1}{n^2}$$ liefert 0,5977 0,5952

und die Formel

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}$$ liefert 0,6210 0,6120

Infolge ihrer Veröffentlichung als Inauguraldissertation sind die Harreßschen Versuche nicht so in weiteren Kreisen bekannt geworden, wie sie es wohl verdient hätten, zumal bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche die Erfahrungen, die Harreß gemacht hat, mit Nutzen verwendet werden können. Ich folge daher gerne einer Anregung von Hrn. v. Laue und gebe im Nachstehenden einen Auszug besonders des experimentellen Teiles der Inauguraldissertation des so früh ums Leben gekommenen, viel versprechenden jungen Gelehrten.

Frühere erfolgreiche Versuche zur Bestimmung des Mitführungskoeffizienten rühren von Fizeau[1]) und von Michelson[2]) und Morley[3]) her. Als bewegten Körper benutzten sie Wasser, welches bei ersterem durch eine Röhre von 1,49 m Länge und und 5,3 mm lichter Weite mit 7,069 m/sec Geschwindigkeit und bei den letzteren zwei durch eine Röhre von 3—6 m Länge

1) H. Fizeau, Compt. rend. 33. S. 349. 1851. Pogg. Ann. Erg. 3. S. 457. 1853. Ann. Chim. Phys. (3) 57. S. 385. 1859.

2) A. A. Michelson, Am. Journ. of Sc. (3) 22. S. 120. 1881.

3) A. A. Michelson u. E. W. Morley, Am. Journ. of Sc. (3) 31. S. 377. 1886.

und 28 mm Weite mit 8,72 m/sec Geschwindigkeit floß. Aus Fizeaus Versuchen ergibt sich der Mitführungskoeffizient zu 0,46, Michelson und Morley fanden 0,484, während die theoretischen Werte für Wasser sind

$$1 - \frac{1}{n^2} = 0{,}438$$

und

$$1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} = 0{,}451.$$

In neuerer Zeit sind auch von Hrn. Zeeman Versuche angestellt worden, welche ein befriedigendes Resultat ergeben haben sollen.

Da die Werte des Mitführungskoeffizienten nach der Fresnelschen und der Lorentzschen Formel für Wasser etwas zu nahe beieinander liegen, als daß mit Sicherheit durch den Versuch entschieden werden könnte, welcher Formel der Vorzug einzuräumen sei, verwandte Harreß als bewegten Körper Glas und zwar ein schweres Barium-Silikat-Kron, Typ O 211 der Firma Schott und Genossen, für welches folgende Werte galten:

$$n_D = 1{,}57335$$

Δ = Dispersion von C bis $F = 0{,}00998$

Dispersion von D bis $F = 0{,}00705$

$$\nu = \frac{n-1}{\Delta} = 57{,}5$$

spez. Gewicht = 3,21.

Für das von Harreß benutzte grüne Licht betrug nach Hrn. Harzers Rechnung, wie schon angegeben,

$$1 - \frac{1}{n^2} = 0{,}5977 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} = 0{,}6210,$$

während für rotes Licht sich die beiden Werte 0,5952 und 0,6120 ergaben.

Bei den Versuchen zur Bestimmung des Mitführungskoeffizienten wird der letztere aus der Verschiebung eines Interferenzbildes erhalten und zwar lautet die Formel, welche den Zusammenhang zwischen der zu beobachtenden, in Streifenbreiten ausgedrückten Verschiebung Δ der Interferenzstreifen und dem Mitführungskoeffizienten x angibt,

$$\Delta = \frac{2 l q n^2 (1 - x)}{\lambda c},$$

wo c die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum, q die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, n der Brechungsindex der Substanz, l die Länge des im bewegten Körper vom Lichtstrahl zurückgelegten Weges und λ die für den leeren Raum geltende Wellenlänge des bei dem Versuch angewandten Lichtes ist.

Setzt man der Fresnelschen Theorie gemäß $x = 1 - 1/n^2$, so ergibt sich

$$\Delta = \frac{2 l q}{\lambda c}.$$

Nach der Fresnelschen Theorie ist daher die Streifenverschiebung von der Substanz des bewegten Körpers ganz unabhängig, während die Einführung des Lorentzschen Wertes des Mitführungskoeffizienten in die Formel für Δ die Streifenverschiebung von der Substanz des bewegten Körpers in wenn auch nur geringem Maße abhängig zeigt.

Sollte die Streifenverschiebung einen nicht zu geringen Betrag erhalten, so mußte schon die Länge des vom Lichtstrahl durchlaufenen Weges zu etwa 1 m und die Geschwindigkeit q des bewegten Körpers zu etwa 10 m genommen werden; dann wird $\Delta = \frac{r l q}{\lambda c} = 0{,}11$ Streifenbreiten.

§ 2. Das Prismenpolygon.

Die Form, welche Harreß, von Hrn. Straubels Rat unterstützt, für den Glaskörper wählte, war die eines aus Prismen zusammengesetzten Polygons, wie sie Fig. 1 zeigt. Das Licht wird von der Achse aus in den rotierenden Prismenkranz geworfen, durchläuft ihn unter Reflexion an den äußeren Prismenflächen, das eine Bündel in dieser, das andere in der entgegengesetzten Richtung, und tritt nach der Achse zu aus dem Prismenkranz wieder aus. Wird den beiden Bündeln vor ihrem Eintritt in das Polygon eine Phasendifferenz erteilt, so liefern sie nach ihrem Austritt ein Interferenzbild, welches bei Rotation des Polygons eine Verschiebung erleidet.

Die unentgeltliche Herstellung des kostspieligen optischen und mechanischen Apparates übernahm auf Hrn. Straubels Veranlassung bereitwilligst die Firma Carl Zeiss.

Auf Grund einer Durchrechnung von Polygonen mit 6—16 Seiten fand Harreß, daß sich bei 10 Reflexionen das günstigste Verhältnis zwischen der Länge des Lichtweges, der

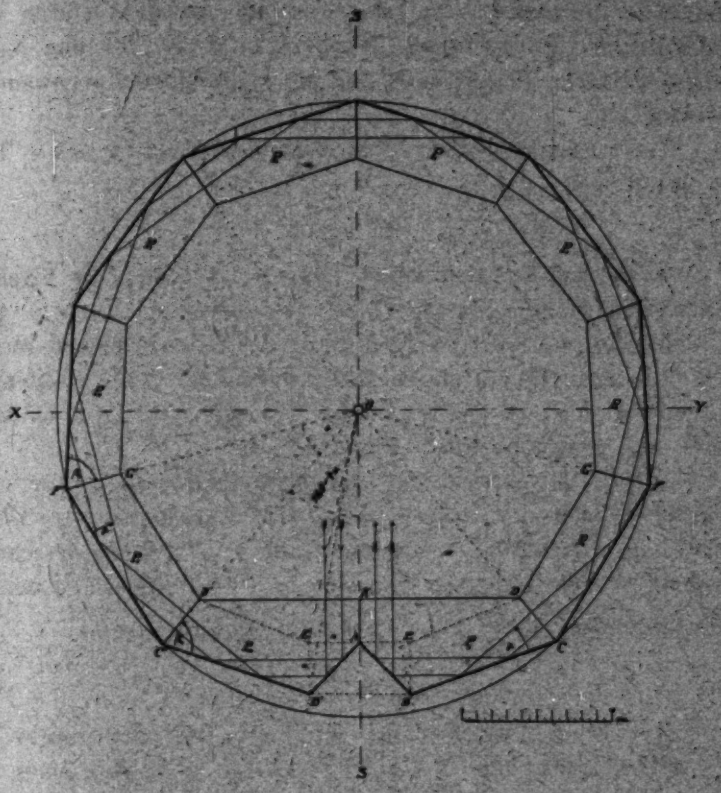


Fig. 1.

Zahl der Reflexionen und der Größe der Reflexionswinkel erreichen ließ, weshalb denn ein 10-seitiges Polygon für den Prismenkranz festgesetzt wurde.

Von den 10 hierzu benötigten Prismen konnten 8 (P_2 bis P_9) von vornherein als gleich angenommen werden, während zwei Körper, P_1 und P_{10}, eine andere Form erhalten mußten, um den Ein- und Austritt des Lichtes zu ermöglichen.

Mit dieser Festsetzung war die Gestalt der Prismen, abgesehen von ihrer Höhe, vollständig bestimmt.

In Fig. 1 mögen folgende Bezeichnungen gelten:

(1) Winkel $COF = C'OF' = \alpha$ (Zentriwinkel eines der 8 gleichen Prismen P_1 bis P_8).

(2) $AE = AE' = EB = DC = \ldots = a$.

(3) $EC = E'C' = b$.

(4) $OC = r$ (Radius des dem Polygon umschriebenen Kreises).

(5) $CF = s_1$ (Länge der Seite eines der 8 gleichen Prismen).

(6) $CB = s_2$ (Länge der Seiten der beiden Prismen P_1 und P_{10}).

Dann ist:

$$\sphericalangle SOC = SOC' = 180^\circ - 4\alpha. \tag{7}$$

Für die Größen a, b und r lassen sich sehr einfach folgende Beziehungen finden:

$$\begin{cases} a = b \cdot \operatorname{cotg} 2\alpha, \\ b = r \cdot \sin 4\alpha - a, \\ r = \dfrac{a}{2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}. \end{cases} \tag{8}$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich α durch die Formel:

$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \operatorname{tg} 2\alpha)}{\sin 4\alpha} - \frac{1}{2} = 0. \tag{9}$$

Diese Beziehung ist vollkommen unabhängig vom Radius des umschriebenen Kreises und stellt die Bedingungsgleichung für das gesuchte Polygon dar. Ist aus dieser Gleichung der Winkel α gefunden, so lassen sich dann bei gegebenem Radius r alle Bestimmungsstücke der Prismen berechnen nach den einfachen Formeln:

$$\begin{cases} a = 2r \cdot \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}, \\ s_1 = 2r \cdot \sin \dfrac{\alpha}{2}, \\ s_2 = \dfrac{a}{\cos 2\alpha}. \end{cases} \tag{10}$$

Die numerische Auswertung der Bedingungsgleichung (9) ergibt als einzig mögliche Lösung für α den Wert:

$$\alpha = 34^\circ\ 45'\ 17''{\cdot}5.$$

Der Radius des umschriebenen Kreises wurde zu

$$r = 200 \text{ mm}$$

festgesetzt.

Werden die Dicken der Prismen P_2 bis P_9 mit d, die von P_1 und P_{10} mit d_2 bezeichnet, und nennt man die Winkel, unter welchen die Seitenflächen gegen die Reflexionsflächen geneigt sind, β_1 und β_2, so ergeben sich folgende Größenverhältnisse für die Glaskörper:

In allen Prismen ist: $a = 35{,}68$ mm.

8 Prismen: P_2 bis P_9	$s_1 = 119{,}47$ mm $d_1 = 34{,}05$ mm $\beta_1 = 72^\circ\,87'\,21{,}2''$.
2 Prismen: P_1 und P_{10}	$s_2 = 101{,}93$ mm $d_2 = 33{,}42$ mm $\beta_2 = 69^\circ\,30'\,35''$.

Die Austrittsflächen wurden quadratisch gewählt, so daß die Prismenhöhe in allen Fällen

$h = 35{,}68$ mm betrug.

Die beiden Glaskörper ABE und $AB'E'$ sind rechtwinklige Reflexionsprismen mit der Kantenlänge a. Sie wurden mit den beiden Prismen P_1 und P_{10} zu je einem Stück vereinigt. Um aber dabei die schwer zu bearbeitenden, einspringenden Ecken bei E und E' zu vermeiden, erhielten die beiden Körper die Form $ABCDK$ bezüglich $AB'C'D'K'$. Der dadurch entstehende Massenüberschuß auf einer Seite der Rotationsachse wurde später durch ein entsprechendes Stahlstück auf der entgegengesetzten Seite der Achse ausgeglichen.

Die Reflexionswinkel für symmetrisch durchgehende Strahlen betragen:

in P_2 bis P_9	$\gamma_1 = 17^\circ\,22'\,38{,}8''$.
und in P_1 und P_{10}	$\gamma_2 = 20^\circ\,29'\,25''$.

Alle Reflexionen im Glaskörper sind also Totalreflexionen und alle Eintrittsflächen der Prismen werden vom Licht senkrecht durchsetzt. Der Prismenkranz ist symmetrisch zur Geraden PS, aber nicht zu der dazu Senkrechten XY.

Die Länge des Lichtweges im Glase ist gegeben durch die Formel:

$$(11)\quad \begin{cases} l = 8\,s_1 \sin\beta_1 + 2\,s_2 \sin\beta_2 + 2\,a + 2\,a\cos(180^\circ - 4\,\alpha) \\ l = 1228{,}4 \text{ mm}. \end{cases}$$

Dieser Weg ist für alle Strahlen, welche dem Mittelstrahl parallel verlaufen, genau gleich lang.

Über den zu erwartenden Lichtverlust kann folgende Überschlagsrechnung einen Anhalt geben.

In dem Prismenpolygon findet ein zehnmaliger Eintritt und ein zehnmaliger Austritt von Luft in Glas und umgekehrt statt. Der infolge der Reflexion auftretende Lichtverlust ist in beiden Fällen gleich groß und zwar bei senkrechter Inzidenz in alle Flächen nach Fresnel gleich

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

so daß beim ersten Übergang von einem Mittel ins andere der Strahl geschwächt wird von der Intensität 1 auf

$$R_1 = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 0{,}955.$$

Beim Austritt aus dem Polygon, nach 20 Übergängen von einem Mittel ins andere, ist die Intensität des Strahles durch die Reflexion geschwächt auf

$$R_{20} = R_1^{20} = 0{,}399.$$

Zur Bestimmung des Lichtverlustes in der Glasmasse durch Absorption sei das diesbezügliche Resultat H. C. Vogels[1]) für das Jenaer Kron O 202 benutzt, der Schmelze, aus welcher das Objektiv des großen Refraktors des Potsdamer Astrophysikalischen Observatoriums hergestellt wurde. Vogel fand für eine Glasdicke von 10 cm und die Wellenlänge $\lambda = 580\ \mu\mu$ den Durchlässigkeitsfaktor dieses sehr durchlässigen Glases zu

$$A = 0{,}872.$$

Unter Annahme dieses Wertes ist die Intensität des Lichtes nach Zurücklegung eines Weges von 1228 mm gleich

$$A_{12{,}28} = 0{,}872^{12{,}28} = 0{,}186.$$

Demnach würde die Intensität des aus dem Prismenpolygon austretenden Lichtes, wenn man diejenige des eintretenden gleich Eins setzt, betragen

$$J_a = A_{12{,}28} \cdot R_{20} = 0{,}074.$$

Nimmt man jedoch an, daß die Ausführung und Justierung der Prismen vollkommen exakt wäre, so würde durch Reflexions-

1) H. C. Vogel, Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1896. S. 1219.

verlust die Intensität nur auf $R_2 = 0{,}912$ erniedrigt werden, weil zwischen den einzelnen Prismen keine Luftkeile vorhanden wären, und es würde

$$J_0 = 0{,}17.$$

Über die wirkliche Lagerung der Einzelprismen konnte aber natürlich keine genaue Angabe gemacht werden, so daß man sich mit einer Schätzung von J_0 zu etwa 12 Proz. der ursprünglichen Lichtintensität begnügen muß.

§ 8. Der Weg der Strahlenbündel. Versuche zur Sichtbarmachung der Interferenzstreifen.

Für alle Interferenzanordnungen, bei denen zwei kohärente Lichtbündel einen beliebig langen Weg entgegengesetzt durchlaufen sollen, hat sich das Prinzip des Michelsonschen Interferometers[1]) als sehr geeignet erwiesen, und es wurde daher auch für die vorliegende Untersuchung in etwas modifizierter Weise verwandt. An Stelle einer Planparallelplatte zur Trennung des einfallenden Lichtbündels in zwei gleich helle, kohärente Teile wurde ein zerschnittener Würfel $ACBD$, dessen Schnittfläche AB halbdurchlässig versilbert war, benutzt. In Fig. 2 ist das Prismenpolygon der Einfachheit halber fortgelassen und durch zwei rechtwinklig zueinander stehende Spiegel S_1 und S_2 ersetzt, welche in ähnlicher Weise wirken. Darin bedeutet L die punktförmige Lichtquelle, deren Strahlen, durch das Collimatorobjektiv O_1 parallel gemacht, senkrecht in die Würfelfläche AD eintreten. In der Schnittebene wird das einfallende Licht in zwei gleich helle Teilbündel zerlegt, von denen das eine den Würfel durchdringt, während das andere senkrecht nach unten reflektiert wird. Durch das Spiegelpaar wird dieses Bündel zweimal geknickt und tritt hierauf in das Prisma R, welches es in den Würfel zurückwirft. Die Fläche AB läßt sodann das Licht durch die Würfelfläche AC nach oben austreten, wobei infolge der Halbdurchlässigkeit von AB wieder die Hälfte der Intensität verloren geht. Das zweite Lichtbündel nimmt den entgegengesetzten Weg und wird bei seinen zwei

1) A. A. Michelson: Phil. Mag. (5) 13. S. 237. 1882. Am. Journ. of Sc. (3) 39. S. 115. 1890; s. auch: Light waves and their uses. Chicago 1903. Détermination expérimentale de la valeur du mètre etc. Mém. du Bureau internat. des poids et mesures, t. XI. Paris 1894.

Durchgängen durch AB entsprechend geschwächt. Während Michelson zur Justierung seines Interferometers die Fläche AB beweglich angeordnet hat, wurde hier aus technischen Gründen

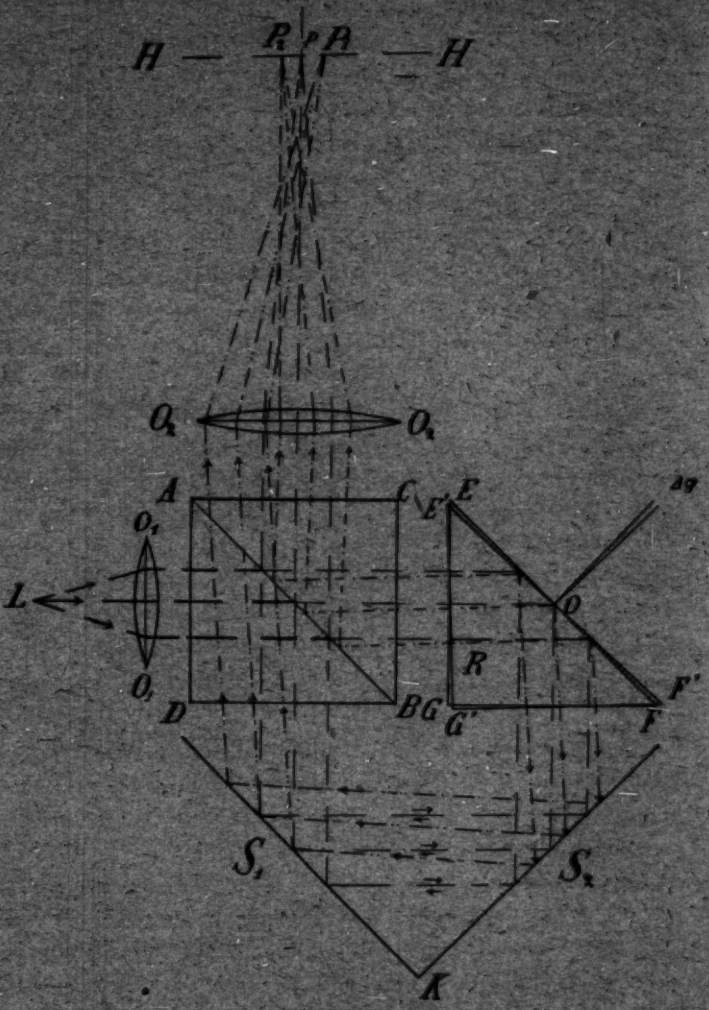


Fig. 2.

das Reflexionsprisma R um den Punkt O nach allen Seiten drehbar gemacht. In der Figur liegt O in der Reflexionsfläche, in Wirklichkeit lag der Punkt ca. 10 mm dahinter. Durch eine Drehung von R werden gleichzeitig beide Strahlenbündel

beeinflußt, während eine Bewegung der Fläche AB nur die Richtung des daran reflektierten Bündels ändert.

Sind nun die optischen Teile so justiert, daß die Flächen AB und EF einander und auch der Schnittkante K der Spiegel S_1 und S_2 parallel sind, so durchlaufen beide Teilbündel vollkommen gleich lange und entgegengesetzte Lichtwege und treten einander parallel nach oben aus dem Würfel aus. In der Brennebene HH des darüber stehenden Objektives O_2 entsteht dann von der Lichtquelle L der Bildpunkt P. Die beiden Strahlenbündel kommen jedoch hier nicht mit der gleichen Phase an, da der eine Teil die durchlässige Silberschicht zweimal durchdringen muß, während der andere ebenso oft an ihr reflektiert wird. Es entsteht so ein konstanter, von der Dicke der Silberschicht allein abhängiger Phasenunterschied zwischen beiden Bündeln. Dreht man nun das Prisma R aus seiner Lage EFG um den Winkel $\Delta\varphi$ in die Lage $E'F'G'$, so werden dadurch beide Teilbündel um $2\,\Delta\varphi$ nach entgegengesetzten Seiten von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt. Der Bildpunkt P teilt sich daher in zwei schwächere Punkte P_1 und P_2, welche nach verschiedenen Seiten von P wandern.[1]) Die Lichtwege beider Strahlenbündel werden mit der Drehung von R verschieden lang. Die zwei Bilder P_1 und P_2 von L schwingen aber ständig mit konstanter Phasendifferenz, so daß sie zur Entstehung von Interferenzen Veranlassung geben können.

Bei der ersten Versuchsanordnung waren der Glaswürfel W und das Reflexionsprisma R (Fig. 3) senkrecht über dem horizontal rotierenden Prismenkranz so aufgestellt, daß sie symmetrisch zur Rotationsachse standen und an der Rotation nicht mit teilnahmen. Beide Glaskörper hatten eine gemeinsame Fassung erhalten, welche gestattete, das Prisma R in einem gewissen Bereiche nach allen Seiten mikrometrisch zu verdrehen. Bei horizontalem Lichteinfall wurden also durch diese Vorrichtung zwei kohärente Lichtbündel senkrecht nach unten reflektiert, wobei der gegenseitige Abstand je zweier sich entsprechender Strahlen gleich einer Würfelkante war. Die beiden

1) Der Punkt P_1, in welchem die Strahlen konvergieren, die die Schnittfläche AB zweimal durchdrungen haben, müßte in Fig. 2 auf der linken Seite von P, dagegen P_2 auf der rechten Seite liegen.

Reflexionsprismen R_1 und R_2, welche symmetrisch zur Rotationsachse fest mit dem beweglichen Apparat verbunden waren, hatten eine solche Lage, daß die beiden Lichtbündel um 90° geknickt wurden, worauf sie das Prismenpolygon in entgegengesetzter Richtung durchliefen. In der durch Fig. 3 dargestellten Lage des rotierenden Teiles war der Lichtweg beider Bündel folgender:

1. reflektiertes Bündel: L, W (Reflexion), R_1, P_1, $P_2 \ldots P_9$, P_{10}, R_2, R, W (Reflexion), L';
2. durchgehendes Bündel: L, W, R, R_2, P_{10}, P_9, $\ldots P_2$, P_1, R_1, W, L'.

Die zwei Bündel durchliefen also denselben Weg, aber in entgegengesetzter Richtung. Aus Fig. 1 ist ersichtlich, daß bei parallelem Einfall der beiden Bündel in den Prismenkranz die beiden Lichtwege wohl immer parallel und gleich lang, aber nicht miteinander identisch sind. Dadurch werden allerdings die entstehenden Interferenzstreifen gegen Temperaturschwankungen und Dichteänderungen im Glaskörper empfindlich. Vollkommene Identität der Lichtwege hätte wohl theoretisch erzielt werden können durch die Wahl einer ungeraden Anzahl von Reflexionen im Prismenkranz. Da aber auch hier dieser Vorzug bei einer kleinen Abweichung der Prismen von ihrer berechneten Form oder einem Justierfehler im Polygon verloren gegangen wäre, so wurde von vornherein darauf verzichtet. Setzt man selbst theoretisch fehlerfreie Einzelprismen voraus, so wäre eine etwaige exakte Justierung des ganzen Polygons bei den starken Zugkräften, welche bei schneller Rotation auftreten mußten, auf längere Zeit nie aufrecht zu erhalten gewesen.

Nach dem Einsetzen der Prismen in ihre gemeinsame Fassung wurde das ganze Polygon mit Hilfe eines Autokollimationsfernrohres so justiert, daß ein auf der einen Seite senkrecht eintretendes Bündel wieder parallel zu sich austrat. Hiernach wurde der Prismenbehälter mit einer Stahlscheibe fest verschraubt, womit eine starke Pressung der Prismen auf ihre Unterlage verbunden war. War das Einlegen der Glaskörper und deren Justierung genügend sorgfältig vorgenommen worden, so trat mit der Verschraubung des Stahlstückes keine Änderung in der Justierung ein. Ließ man jedoch jetzt die

Maschine längere Zeit mit etwa 1500—2000 Touren pro Minute laufen, so zeigte sich, daß zunächst eine geringe Verlagerung der Prismen eintrat, die aber später völlig konstant blieb. Der hierdurch entstandene Fehler im Polygon wurde dann durch eine Nachjustierung des Prismas R kompensiert.

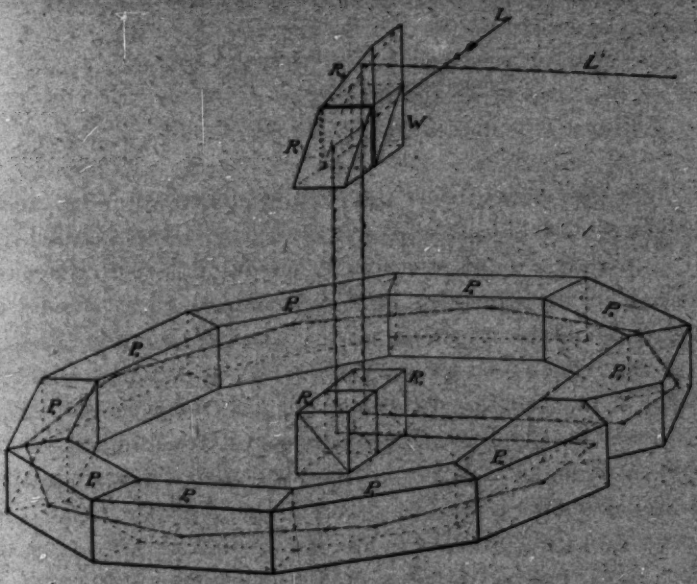


Fig. 8.

Bei den ersten Versuchen diente eine Siedentopfsche Quecksilberbogenlampe[1]) als Lichtquelle, welche bei Verwendung von Kaliumbichromatlösung in einer Didymglasküvette als Filter sehr gut monochromatisches Licht lieferte. Eine an der Lampe befestigte Beleuchtungslinse gab schon hinreichend paralleles Licht, so daß ein Kollimator entbehrt werden konnte.

Die Justierung des optischen Apparates wurde zunächst bei Beobachtung mit bloßem Auge so weit gebracht, daß die beiden Lichtbündel annähernd parallel austraten. In dem Fernrohr bei L' (in der Figur fortgelassen) sah man dann zwei gleichhelle, grüne Lichtscheibchen, die beiden Kraterbilder der Hg-Lampe. Bei langsamer Drehung des Prismas R be-

1) Zeitschr. f. Instrumentenkunde 24. S. 22. 1904.

wegten sich die Bilder entgegengesetzt zueinander und verschwanden wegen der kleinen Öffnung des ganzen Apparates schon bei kleinen Verschiebungen von *R* aus dem Gesichtsfeld. Der Parallelismus der austretenden Bündel war erreicht, wenn die Kraterbildchen genau koinzidierten. In diesem Falle traten in dem auf unendlich eingestellten Fernrohr sofort scharfe Interferenzstreifen auf. Kurz vor und nach dem Eintreten der Koinzidenz beider Kraterbildchen konnten noch Systeme von Interferenzstreifen beobachtet werden, welche aber nicht in der Brennebene des Fernrohrobjektives entstanden, sondern wesentlich dahinter lagen. Diese Streifen wurden bei den späteren Untersuchungen fast ausschließlich benutzt, da sie schärfer als das erste System erschienen und auch leichter zu erhalten und in Form und Lage zu ändern waren. Richtung und Breite der Streifen konnte beliebig variiert werden durch Verdrehung des Prismas *R*. Waren sie ziemlich eng, so erschienen sie völlig geradlinig, bei großer Streifenbreite jedoch trat eine ausgeprägt hyperbolische Form der Streifen auf. Außer diesen beschriebenen Interferenzbildern konnte noch eine ganze Anzahl von Streifensystemen gesehen werden, wenn der Okularauszug des Fernrohres langsam vor und zurück geschoben wurde. Bei diesen Interferenzen waren die Breite und Richtung der Streifen ganz verschieden und unabhängig von der Justierung des Prismas *R*. Ihr Ursprung war in den kleinen Luftkeilen zwischen den einzelnen Prismen des Polygons zu suchen.

Die besprochene Justierung gelang nur dann, wenn der rotierende Teil die in der Fig. 3 gezeichnete Lage genau inne hatte oder um 180° dazu verdreht war. Drehte man den Prismenkranz auch nur um Bruchteile eines Grades aus dieser Lage heraus, so änderte sich die gegenseitige Lage der beiden Kraterbildchen und das Streifensystem drehte sich um fast 90°. Aus diesem Grunde war also die Versuchseinrichtung so zu treffen, daß bei Rotation der Maschine nur ganz kurze Lichtblitze den Apparat in dem Augenblick durchlaufen mußten, in welchem der rotierende Teil sich genau in einer der beiden angegebenen Stellungen befand. Daher wurde zuerst eine Stahlscheibe von ca. 55 cm Durchmesser auf die Rotationsachse aufgesetzt und exakt zentriert. An zwei diametral gegenüber-

liegenden Stellen dieser Scheibe, die zugleich als Deckel für den Prismenbehälter diente, wurde sie mit zwei ganz engen Blenden versehen, welche in einem kleinen Bereiche verschiebbar angeordnet waren, um sie genau in die richtige Lage bringen zu können. Das Licht, durch eine Sammellinse zu einem Punkte in der Blendenebene konzentriert, wurde von unten durch die Blendenöffnungen senkrecht nach oben gesandt, dann wieder parallel gemacht und horizontal in den Apparat reflektiert. Die Versuche zeigten aber, daß hierbei die Öffnungen der Blenden sehr klein sein mußten, um eine genügende Bildruhe bei rotierendem Apparat zu erzielen. Damit war aber eine sehr erhebliche Lichtschwächung verbunden, so daß schon bei ganz niedrigen Tourenzahlen (ca. 100 pro Minute) die Bildhelligkeit so gering wurde, daß die Interferenzstreifen nicht mehr erkannt werden konnten. Da das Interferenzbild auch in weißem Licht sichtbar blieb, wurde die Hg-Lampe durch eine Gleichstrombogenlampe ersetzt, jedoch mit demselben negativen Resultat.

Um nun diese Blenden ganz entbehren zu können und eine größere Lichthelligkeit zu erzielen, kam bei derselben Anordnung die Beleuchtung mit Hilfe elektrischer Entladungsfunken in Frage. Wenn es gelang, starke elektrische Funken so zu erzeugen, daß sie entweder synchron mit der Tourenzahl der Maschine oder auch in einem rationalen Verhältnis dazu auftraten, so mußte immer bei einer ganz bestimmten Stellung des Prismenkranzes nach einem oder mehreren Umläufen ein Funke auftreten. Da bei der sehr kurzen Dauer der elektrischen Entladungen die Eigenbewegung der Maschine während dieser nicht in Frage kam, so mußten dann die Interferenzen in gleichen Zeitintervallen aufblitzen und völlig unbeweglich erscheinen.

Für diese Versuche wurde ein 40 cm Funkeninduktor benutzt, welcher mit Elektroden aus Kadmium oder Zink äußerst helles und auch für den vorliegenden Zweck sehr geeignetes Licht lieferte. Zunächst wurde mit einem gewöhnlichen Hammer- und Quecksilberunterbrecher versucht, ein rationales Verhältnis zwischen Funkenfolge und Tourenzahl herzustellen. Das Experiment lehrte jedoch, daß ein derartiges Zusammenarbeiten beider Apparate nur für sehr kurze Zeit aufrecht erhalten

werden konnte. Das Streifensystem blitzte dann in regelmäßigen Zwischenräumen auf und erschien unbeweglich. Aber schon bei der kleinsten Störung im Gang eines Apparates begannen die Streifen unruhig zu werden und zuckten schließlich ganz unregelmäßig hin und her. Deshalb wurde direkt auf die Achse des rotierenden Teiles eine Unterbrecherscheibe aufgesetzt, um Synchronismus zwischen der Zahl der Funken und den Umdrehungen zu erhalten. Das Eintreten dieses Zustandes war schon äußerlich dadurch zu erkennen, daß dann die laufende Maschine vollkommen still zu stehen schien, wenn sie bei verdunkeltem Zimmer mit dem Funkenlicht beleuchtet wurde, während sie bei irgendeiner Unregelmäßigkeit in der Unterbrechung scheinbar den Sinn ihrer Drehung ständig wechselte. Die Bildunruhe war jetzt sehr stark verringert, so daß zeitweise die Streifen fast eine halbe Minute lang unbeweglich erschienen. Dann aber trat auch hier das oben beschriebene Zucken der Streifen auf und war bei Schwankungen in der Tourenzahl des Antriebsmotors besonders stark. Ein absolut sicheres Arbeiten des Unterbrechers war auch bei dessen sorgfältigster Reinhaltung nie zu erzielen, so daß auch diese Versuche ohne nennenswerten Erfolg blieben.

§ 4. Die definitive Form des Interferometers.

Um die bei der ersten Anordnung des optischen Apparates aufgetretene Bildunruhe unschädlich zu machen, wurde jetzt der Glaswürfel W samt dem Reflexionsprisma R mit dem rotierenden Teile fest verbunden, so daß sie an der Rotation desselben teilnahmen. (Fig. 4.) Da bei großen Umlaufsgeschwindigkeiten zu befürchten war, daß sich infolge der auftretenden sehr starken radialen Zugkräfte die empfindliche Justierung dieser Prismen ändern würde, so wurden die vier Glaskörper W, R, R_1, R_2 zu einem einzigen, soliden Stück vereinigt und in einer sehr starken Rotgußfassung auf die Rotationsachse der Maschine verschraubt. Zur Justierung dieses Mittelstückes war vorgesehen, daß es etwas gedreht und nach allen Seiten gekippt werden konnte.

Bei den vorausgegangenen Versuchen hatten sich ferner die Reflexionsbilder, welche von den Ein- und Austrittsflächen der einzelnen Prismen herrührten, als sehr störend erwiesen,

weshalb bei der neuen Anordnung alle in Frage kommenden Flächen so abgeschrägt wurden, daß die Reflexionsbilder aus dem Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohres herausfallen mußten. Das Mittelstück bekam deshalb die in Fig. 4 gezeichnete Form, wobei der Deutlichkeit halber alle mechanischen Teile fortgelassen sind. Der Winkel, um welchen alle Flächen abgeschrägt wurden, betrug ca. 6°. Der ganze Glaskörper bestand also aus den Einzelteilen *ABC*, *ACDE*, *CDFG* und *LMN*, welche Trennung zur möglichst leichten technischen

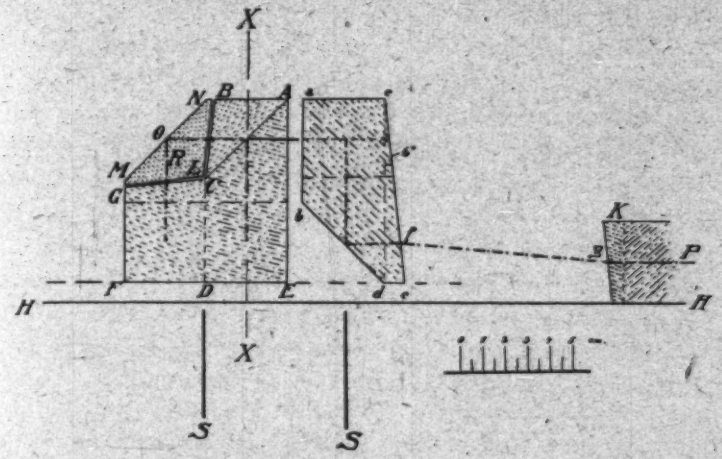


Fig. 4.

Herstellung der Stücke gewählt worden war. Die drei ersten Glaskörper wurden durch Zusammenkitten zu einem einzigen Stück vereinigt, welches die halbdurchlässige Silberschicht bei *AC* enthielt. Der einzige bewegliche Teil war das Reflexionsprisma *R*, dessen Winkel bei *M* und *N* 39° betrugen. *R* war drehbar um einen Punkt, der ca. 10 mm hinter der reflektierenden Fläche bei *O* lag, angeordnet, wobei die Justierung und Klemmung durch fünf Mikrometerschrauben erfolgen konnte.

Um den Strahlengang zwischen Mittelstück und Prismenpolygon sichtbar zu machen, ist in Fig. 4 rechts noch ein Schnitt durch den Körper bei *XX* um 90° gedreht gezeichnet.

Durch die Brechung in dem Glaskeile *cde* mit der Kante in *c* verlief das Licht auf dem Luftwege *fg* schräg nach unten und wurde dann durch die entsprechenden Keile *K*, welche

mit den Kanten nach unten auf die Eintrittsstelle des Prismenpolygons gekittet waren, wieder horizontal gemacht. Um die volle Öffnung des Apparates ausnützen zu können, mußte das Mittelstück um einige Millimeter über der Fläche $H\,H$, auf welcher der Prismenkranz ruhte, erhöht angeordnet werden. Die Richtung und Lage der Rotationsachse des Apparates ist in Fig. 4 durch die Striche S bezeichnet.

Der Justiervorgang war bei dieser Anordnung naturgemäß genau derselbe wie vorher. Schon die ersten Versuche zeigten, daß jetzt die Verdrehung des Streifensystems in der oben beschriebenen Art verschwunden war. Die Interferenzen waren jetzt auch bei kontinuierlichem Lichte selbst bei Tourenzahlen von 1500 und mehr Umdrehungen pro Minute sichtbar. Als Lichtquelle wurde von nun ab ausschließlich eine 20 Amp. Gleichstrombogenlampe angewandt. Für Justierzwecke war die Siedentopfsche Hg-Lampe wohl noch sehr gut zu verwenden, bei rotierendem Apparat erwies sie sich jedoch auch bei voller Öffnung der Prismen als viel zu lichtschwach.

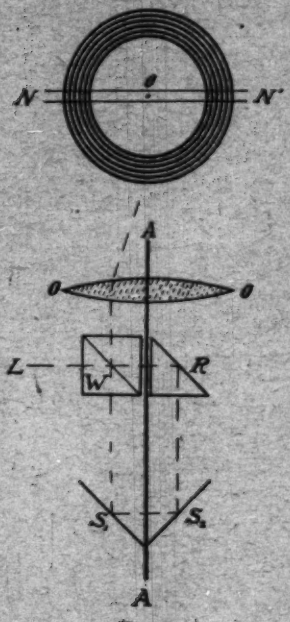


Fig. 5.

Zum Verständnis der Lagenänderung des Streifensystems bei einer Drehung des Prismenpolygons diene Fig. 5, in welcher das Prismenpolygon wieder durch die beiden rechtwinklig zueinander stehenden Spiegel S_1 und S_2 ersetzt ist. Die Rotationsachse des Apparates sei $A\,A$. Zunächst soll angenommen werden, daß der ganze optische Apparat nebst Bogenlampe und Objektiv O sich als Ganzes drehe. Dann ist ohne weiteres klar, daß sich für einen ruhenden Beobachter das von O entworfene reelle Streifensystem synchron mit der Maschine um die Achse $A\,A$ in einem Kreise drehen muß. Der Radius dieses Kreises ist bestimmt durch den scheinbaren Abstand der Interferenzstreifen von der Achse und durch die Lage und Brennweite des Objektives O. Sieht man jetzt das Objektiv

als ruhend an, so wird an der Erscheinung nichts geändert, denn die Strahlen durchdringen dann bei einer Umdrehung des Apparates verschiedene Teile desselben, was aber bei richtiger Justierung für den Bildort keine Änderung bedingt. Stehen die Interferenzstreifen senkrecht auf dem Radius des Kreises und sind sie genügend kurz, so muß also der Beobachter im ruhenden Fernrohr ein System von konzentrischen Kreisen bei Rotation der Maschine sehen (in der Fig. 5 um 90° gekippt gezeichnet). Große Streifenlänge und eine andere Orientierung derselben wird die Erscheinung verwaschen oder gar nicht erkennen lassen.

Nimmt man jetzt auch die Lichtquelle als ruhend an, so wird nur dann Licht zum Beobachter gelangen können, wenn der Prismenkranz die in der Figur gezeichnete Lage inne hat. Dreht man nun den Apparat um einen ganz kleinen Winkel aus dieser theoretischen Stellung heraus, so wird das einfallende Lichtbündel sehr stark zur Seite abgelenkt und damit bei der geringen Öffnung der Prismen ein großer Teil abgeblendet. Gleichzeitig bewegt sich aber auch das Bild der Interferenzen um eine kleine Strecke, welche von der Drehung des ganzen Apparates und von der damit verbundenen Änderung des Einfallswinkels des Lichtes abhängt. Die Bewegung erfolgt aber relativ langsam und ist sehr gering, denn schon eine Verdrehung der Maschine um 10—15′ nach beiden Seiten von der theoretisch richtigen Lage genügte, um das Bild verschwinden zu lassen, wobei die Bildhelligkeit von Null bis zu einem Maximum anwuchs und wieder auf Null zurücksank. Die Bewegung des Lichtmaximums erfolgte gleichsinnig mit derjenigen des Interferenzbildes, aber sehr viele Male schneller. Dem Beobachter erschien daher bei Rotation der Maschine das Interferenzbild scheinbar still zu stehen, während bei jeder Umdrehung ein Lichtblitz darüber hinweghuschte. (Stroboskop.) Diese Erscheinung ähnelt derjenigen, welche man bei einem fahrenden Eisenbahnzuge beobachten kann. Bei ruhendem Auge sind Einzelheiten der vorüberfahrenden Lokomotive nicht zu erkennen, folgt jedoch das Auge sehr schnell der Bewegung einzelner Teile, so scheinen diese stillzustehen.

Bei dieser Beobachtung der Streifen hängt deren Sichtbarkeit nicht von ihrer Orientierung, Form und Breite ab wie

vorher. Man sieht allerdings das gesamte Streifensystem nicht momentan als Ganzes aufleuchten, wie dies bei der Beobachtung mit Funkenlicht der Fall ist, sondern es werden verschiedene Teile des Interferenzbildes nacheinander sichtbar, wobei diese etwas verschiedene Lagen zueinander einnehmen. Wenn jedoch die Beleuchtungsdauer kurz genug ist, wird die hieraus folgende Unschärfe des Bildes unmerklich werden. Beifolgende kleine Tabelle zeigt, daß die Meßgenauigkeit von Photogrammen, welche bei ruhendem und bewegtem Apparat aufgenommen sind, nur wenig voneinander abweichen. Die angegebenen Streifenbreiten sind abgeleitet aus fünf Messungen von je fünf Interferenzstreifen nach der Formel $b = \frac{(l_1 + l_2) - (l_4 + l_5)}{6}$, wo l_1, l_2 ... die Einstellungen auf die Streifen bedeuten.[1])

Apparat in Ruhe (Exposit.-Zeit ca. 1 Sek.)			Apparat in Bewegung (Exposit.-Zeit ca. 5 Min.)		
Platte	Aufnahme	Streifenbreite in mm	Aufnahme	Touren pro Min.	Streifenbreite in mm
70	2	0,1874	1	567	0,1869
	4	0,1878	3	527	0,1880
	6	0,1849	5	546	0,1877
	8	0,1875	7	525	0,1903
	10	0,1865	9	527	0,1885
	12	0,1865	11	485	0,1895
	14	0,1880	13	510	0,1890
	16	0,1874	15	278	0,1884
71	2	0,1876	1	300	0,1856
	4	0,1865	3	297	0,1879
	6	0,1861	5	441	0,1919
	8	0,1859	7	600	0,1845
	Mittel:	0,1868		Mittel:	0,1882
		± 0,0003 (m. F.)			± 0,0019 (m. F.)
		(± 0,2%)			(± 1%)
	Gesamtmittel:	0,1875 ± 0,0007 (m. F.)			
		(± 0,4%)			

Der größere mittlere Fehler bei den in Bewegung erhaltenen Aufnahmen rührt zum Teil von der besprochenen Unschärfe des Bildes her, außerdem wirken aber noch Ungleich-

1) Besser wäre die auf den Regeln der Ausgleichsrechnung beruhende Formel $b = \frac{2(l_5 - l_1) + (l_4 - l_2)}{10}$ zur Anwendung gekommen.

förmigkeit in der Tourenzahl, Luftunruhe und Erschütterungen des Apparates verschlechternd auf die Bilder. Die Meßgenauigkeit ist jedenfalls noch genügend und es kann durch mehrfaches Ausmessen eine noch größere Sicherheit des Resultates erhalten werden. Die Verbreiterung der Streifen bei rotierendem Apparat liegt noch innerhalb des mittleren Fehlers.

Das diskontinuierliche Aufblitzen des Streifensystems bei geringen Umlaufszahlen der Maschine war für die visuelle Messung der Interferenzen äußerst störend, es verschwand aber schon bei 400—600 Touren pro Minute, so daß dann das Bild einen vollkommen kontinuierlichen Eindruck machte. Wie aus Fig. 5 ersichtlich ist, müssen sich Verschiebungen des Streifensystems durch Weiter- oder Engerwerden der konzentrischen Kreise kenntlich machen. Durch geeignete Prismenkombinationen wurden nun zur Beobachtung dieser Erscheinung zwei diametral gegenüberliegende Teile dieser Kreise herausgeschnitten und so übereinander projiziert, daß sie nur durch eine feine, ganz scharfe Grenzlinie getrennt erschienen. Auf diese Weise konnten einmal direkt die doppelten Streifenverschiebungen gemessen, ferner aber auch die Einzelverschiebungen der beiden Gesichtsfeldhälften an geeigneten Meßmarken kontrolliert werden. Die Meßmethode ähnelt derjenigen, wie sie bei den Koinzidenz-Telemetern[1]) der Firma Zeiss Anwendung gefunden hat. Die Anordnung der optischen Teile ist aus Fig. 6 zu ersehen, worin aber die Größenverhältnisse der Deutlichkeit halber nicht richtig zur Darstellung gekommen sind.

L bedeutet die Lichtquelle, eine 20 Amp.-Gleichstrombogenlampe, deren Strahlen durch den Kondensor *C* parallel gemacht und durch die viereckige Blende *B* auf die nutzbare Größe abgegrenzt wurden. Das parallele Lichtbündel wurde nun durch die beiden Pentagonalprismen *M* in zwei gleiche Teile zerlegt, welche nach entgegengesetzten Seiten um je 90° abgelenkt wurden. Je zwei weitere Prismen derselben Form waren so angeordnet, daß die beiden Lichtbündel aus zwei um 180° voneinander abstehenden Richtungen in den Prismenkranz eintreten konnten. Bei dieser Anordnung waren Pentagonal-

1) Eingetragenes Pat. Nr. 16283, Kl. 42. 1903. D. R. P. Nr. 175900, Kl. 42. 1905. Dtsch. Mechan.-Zeitung S. 61. 1907.

prismen gewöhnlichen rechtwinkligen Prismen vorzuziehen, da bei jenen die Ablenkung um 90° von ihrer Orientierung völlig unabhängig ist und so die Justierung außerordentlich erleichtert wurde. In der in Fig. 6 dargestellten Lage der Maschine trat also das Licht von M kommend in das Mittelstück G des rotierenden Teiles ein, wurde hier in zwei kohärente Bündel zerlegt, welche das Polygon J, H in entgegengesetztem Sinne durchliefen, und trat dann durch das Mittelstück wieder nach oben aus, nachdem beide Bündel wieder vereinigt waren. Das über der Maschine befestigte, ruhende Prisma R warf dann das Licht horizontal nach vorn in den Beobachtungsapparat. Bei einer Drehung der Maschine um 180° konnte das Licht von der entgegengesetzten Seite eintreten und durchlief denselben Weg. So konnten also die Interferenzstreifen in zwei um 180° voneinander abstehenden Lagen der Maschine beobachtet werden. Diese beiden Bilder, welche also im Abstand von je einer halben Umdrehung des Prismenkranzes nacheinander aufblitzten, waren nun so übereinander zu bringen, daß sie möglichst genau ausgemessen werden konnten. Zu diesem Zweck bestand der optische Apparat von R an aus zwei völlig gleichen, symmetrisch angeordneten Teilen, durch welche die Interferenzbilder durch zwei getrennte Objektive entworfen wurden. In der gezeichneten Stellung des Prismenkranzes mußte also hinter dem Brennpunkte des astronomischen Fernrohrobjektives O (relat. Öffnung 1 : 10, $f = 607$ mm) ein reelles Interferenzbild entstehen. In das konvergente Strahlenbündel hinter dem Objektiv waren noch die Irisblende A und das Aufrichteprisma D eingeschaltet. Die Irisblende diente zum Abfangen von Reflexionsbildern und des störenden Nebenlichtes. Das Dovesche Prisma D, welches drehbar angeordnet war, wurde benutzt, um den Interferenzstreifen ein beliebiges Azimut geben zu können. Wegen der in diesen Prismen auftretenden starken Lichtbrechung liefern sie eigentlich nur scharfe Bilder, wenn sie sich im parallelen Strahlengang befinden. Dies war jedoch wegen der schwierigen Justierung des letzten Teiles der Anordnung nicht angängig, auch zeigte sich kaum eine merkliche Bildverschlechterung, wenn das Prisma erst vor das Objektiv, dann dahinter in das schwach konvergente Bündel gesetzt wurde. Das Reflexionsprisma E warf dann das Licht

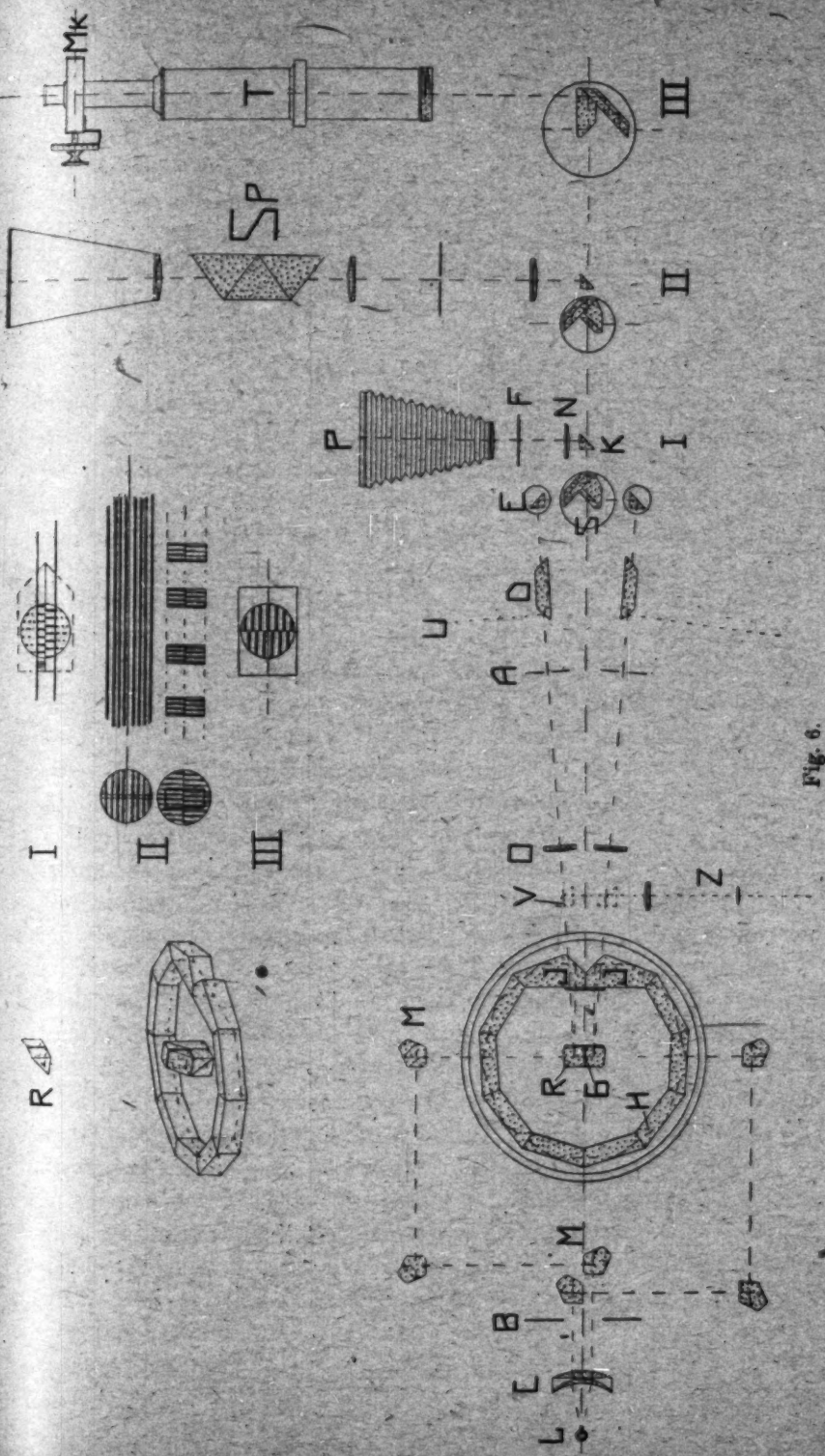


Fig. 6.

bündel so in das Koinzidenzprisma S, daß das reelle Interferenzbild in die Einstellebene derselben zu liegen kam. Dieses Prisma hatte die Form der Okularprismen, wie sie in Koinzidenztelemetern Verwendung finden. Im Prinzip entsprechen sie zwei übereinander stehenden, gekreuzten Spiegeln, durch welche zwei aus entgegengesetzten Richtungen kommende Lichtbündel so abgelenkt werden, daß sie parallel austreten. Die bei derartigen Spiegelkonstruktionen störend auftretende, sehr starke Trennungslinie zwischen den beiden Gesichtsfeldhälften ist bei den Koinzidenzprismen dadurch vermieden, daß die Spiegel durch zwei miteinander verkittete Prismen ersetzt sind, welche den Lichtbündeln nach einer oder mehreren Reflexionen die gewünschte Richtung erteilen. Die Kittfläche ist zur Hälfte versilbert und trennt so das Gesichtsfeld in zwei Teile. Die Trennungslinie wird von der sehr scharfen Grenze der Silberschicht gebildet. In geeigneter Weise an den Prismen angebrachte Dächer können noch zur Umkehrung der einzelnen Bilder dienen.

Auf diese Weise war es also möglich, beliebige Stellen der beiden Interferenzbilder zur Koinzidenz zu bringen und zwar so, daß die beiden Bildfeldhälften durch eine feine, scharfe Linie getrennt erschienen, auf welcher die Interferenzstreifen senkrecht standen. Bei irgendeiner Verschiebung der Streifensysteme mußten sich dann die beiden Bildhälften entgegengesetzt bewegen, so daß mit Hilfe einer geeigneten Meßvorrichtung (Kompensationseinrichtung oder Meßmikroskop) direkt der doppelte Betrag der Streifenverschiebung bestimmt werden konnte. In dem in Anordnung I und II gezeichneten Koinzidenzprisma lag die Trennungslinie der Bilder horizontal, aber gegen den Beobachter schräg nach hinten geneigt, so daß es nicht möglich war, sie gleichzeitig in ihrer ganzen Länge scharf zu sehen. Da diese Neigung jedoch nicht allzu stark war, konnten noch drei bis vier Interferenzstreifen links und rechts von der senkrecht zur Trennungslinie eingerissenen Meßmarke gleichzeitig mit dieser scharf eingestellt werden. Die dritte Beobachtungsanordnung bringt ein anderes Koinzidenzprisma mit vertikaler Trennungslinie zur Darstellung. Hierbei konnte man wohl auf die Linie in ihrer ganzen Ausdehnung gleichzeitig fokussieren, die Interferenzfransen erschienen aber nur

ganz in ihrer Nähe links und rechts scharf. Beide Methoden ließen die gleiche Meßgenauigkeit zu.

Die einzelnen Teile des ganzen Beobachtungsapparates waren justierbar auf optische Bänke montiert, welche auf einem in Höhe verstellbaren, eisernen Projektionstisch festgeklemmt wurden. Die drei Prismen *E* und *S* befanden sich zur leichteren Justierung auf kleinen, dreh- und verstellbaren Tischchen. Zum Schutz gegen Nebenlicht wurde diese ganze Einrichtung mit einem lichtdichten Kasten bedeckt. Davon ganz unabhängig waren die beiden Prismen *R* auf einem sehr festen, eisernen Dreifußgestell mit langem, horizontalem Arme befestigt, welches neben der Maschine auf dem Fußboden stand.

Justierung.

Bei der Justierung der ganzen Einrichtung wurde stets mit den der Lichtquelle zunächst liegenden Teilen begonnen und im Sinne der Lichtbewegung fortgeschritten. Ein ausgespannter Faden, welcher die Rotationsachse der Maschine in ihrer Verlängerung genau schnitt, markierte die Mittellinie der ganzen optischen Anordnung, so daß jetzt die einzelnen Teile roh eingestellt werden konnten. Dann nahm man das Mittelstück *G* des rotierenden Teiles aus dem Prismenbehälter heraus und stellte die Beleuchtungsprismen *M* so ein, daß die beiden Lichtbündel, aus entgegengesetzten Seiten kommend, zentral die Rotationsachse schnitten. Die richtige Lage der Prismen war leicht zu prüfen, wenn zwischen Kondensor *C* und der Blende *B* eine gute plane Glasplatte so aufgestellt wurde, daß sie die beiden Lichtbündel, nachdem jedes derselben alle sechs Pentagonalprismen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen hatte, in ein Fernrohr reflektierte. In diesem waren zwei Kraterbildchen der Bogenlampe sichtbar, wenn beide Lichtbündel nicht genau parallel einfielen; koinzidierten beide Kraterbildchen, so war dies als Zeichen für die richtige Justierung der Beleuchtungsprismen anzusehen. Die nun folgende Justierung des rotierenden Teiles erfolgte nach Einschrauben von *G* in der schon beschriebenen Weise. Dazu wurde mit Vorteil das Fernrohr *Z* mit dem vorklappbaren Prisma *V* angewandt, so daß durch diese Justierung keine Änderung im übrigen optischen Apparat getroffen zu werden

brauchte. Mit Hilfe eines Theodoliten legte man dann die Symmetrielinie der beiden Hälften des Apparates optisch genau fest, horizontierte die beiden Prismen R und drehte sie um gleiche Winkel nach beiden Seiten von der Symmetrielinie unter Benutzung eines senkrecht dazu stehenden Millimetermaßstabes (Poggendorfsche Spiegelablesung). Bei richtiger Stellung der Maschine mußten dann die beiden von R kommenden Strahlenbündel horizontal verlaufen. Durch deren Richtungen waren ohne weiteres die Lagen der beiden optischen Bänke OE gegeben. Die zwei Objektive O wurden gleichweit von R entfernt festgeklemmt und die Irisblenden in deren Brennebenen befestigt.

Der schwierigste Teil der ganzen Justierung bestand nun in der Aufstellung der Prismen D, E und S. Die drei Prismen E und S wurden zunächst so eingestellt, daß die Austrittspupillen der beiden Hälften des optischen Apparates zusammenfielen. Dann verschob man diese Prismen gleichzeitig, bis die beiden reellen Interferenzbilder in die Ebene der Meßmarke des Koinzidenzprismas zu liegen kamen, was eventuell durch seitliches Verschieben derselben erreicht werden konnte. Dabei war es praktisch, die Maschine schnell laufen zu lassen, so daß zwei, scheinbar kontinuierliche Bilder beobachtet werden konnten. Erschienen nun Interferenzen und Trennungslinie gleichzeitig scharf, so wurden jene mit Hilfe der Prismen D soweit gedreht, daß sie genau senkrecht zur Trennungslinie der beiden Gesichtsfeldhälften standen. Bei richtiger Justierung aller Teile sah man also dann im Beobachtungsinstrument abwechselnd zu beiden Seiten der Trennungslinie zwei halbkreisförmige Bilder aufblitzen, in denen die Interferenzen erschienen. Bei größeren Umlaufsgeschwindigkeiten des Apparates bot das Gesichtsfeld einen Anblick, wie er in Fig. 6 III dargestellt ist.

Obgleich diese Anordnung derjenigen eines Koinzidenztelemeters ähnelt, kam bei diesen Messungen nicht das Koinzidenz-, sondern das Invertprinzip[1]) in Anwendung. Bei einer Drehung der Maschine um 180° erschien nämlich das zweite Interferenzbild ebenfalls um 180° zum ersten verdreht; da nun beide Bilder in den zwei Teilen des Beobachtungsapparates

1) Eingetragenes Pat. Nr. 1462, Kl. 42. 1903.

je die gleiche Anzahl von Drehungen erfuhren, mußten sie sich schließlich im Koinzidenzprisma die gleichen Seiten zuwenden. Waren die Interferenzstreifen einander nicht parallel, so erschien demnach die eine Gesichtsfeldhälfte als Spiegelbild der andern, während bei parallelen Streifen auf den Unterschied zwischen Koinzidenz- und Invertanordnung nur aus den Bewegungen beider Hälften zu schließen war. Da man mit Hilfe der beiden Doveschen Prismen *D* beide Bilder getrennt beliebig verdrehen konnte, waren die Messungen der Streifenverschiebungen in verschiedenen Variationen möglich (beide Hälften sich gleichzeitig oder entgegengesetzt bewegend). Bei der Beobachtung der Interferenzen war noch darauf zu achten, daß der positive Kohlekrater der Bogenlampe stets in gleicher Höhe blieb, so daß die Siemens-Schuckertlampe, obgleich sie eigentlich mit festem Lichtpunkt brennen sollte, von Zeit zu Zeit etwas nachreguliert werden mußte. Etwaige Änderungen in der Beleuchtung konnten auch während photographischer Aufnahmen mit langer Expositionszeit (8—12 Min.) leicht kontrolliert werden, ohne daß am Apparat selbst etwas zu ändern war. Denn einmal waren durch Vorschlagen des Prismas *V* die Interferenzen zu beobachten, wodurch aber die Exposition unterbrochen werden mußte, dann aber boten die an den schrägen Flächen der Prismen *D* reflektierten Lichtbündel *U* ein bequemes Mittel, die Streifen auch während photographischer Aufnahmen zu sehen. Passend aufgestellte Lupen ließen also stets die richtige Stellung der Bogenlampe erkennen oder eventuell korrigieren.

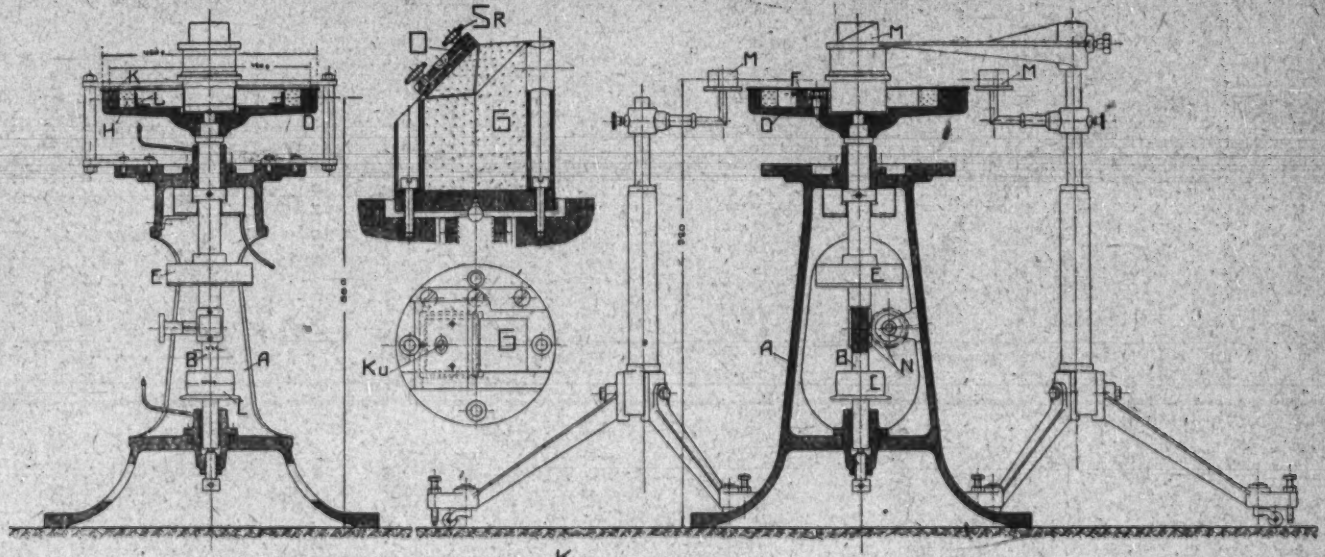
§ 5. Der Rotationsapparat.
(Tafel I und II.)

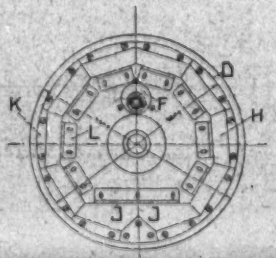
Alle mechanischen Teile des Apparates wurden ebenso wie die gesamte Optik in den Zeisswerken zu Jena ausgeführt. Die sachgemäße Konstruktion und Berechnung der Maschine hatte Herr M. Berger übernommen, dessen technische Ratschläge und ständige freundliche Unterstützung auch sonst der Untersuchung sehr zustatten kamen.

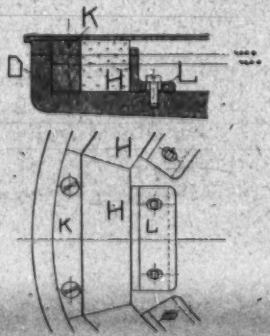
Bei der Konstruktion der Maschine war zunächst maßgebend, daß sie mit Sicherheit noch 3000 Touren pro Minute in beiden Umdrehungsrichtungen laufen sollte. Wegen des großen Gewichtes der rotierenden Teile und der damit verbundenen

O. Knopf.

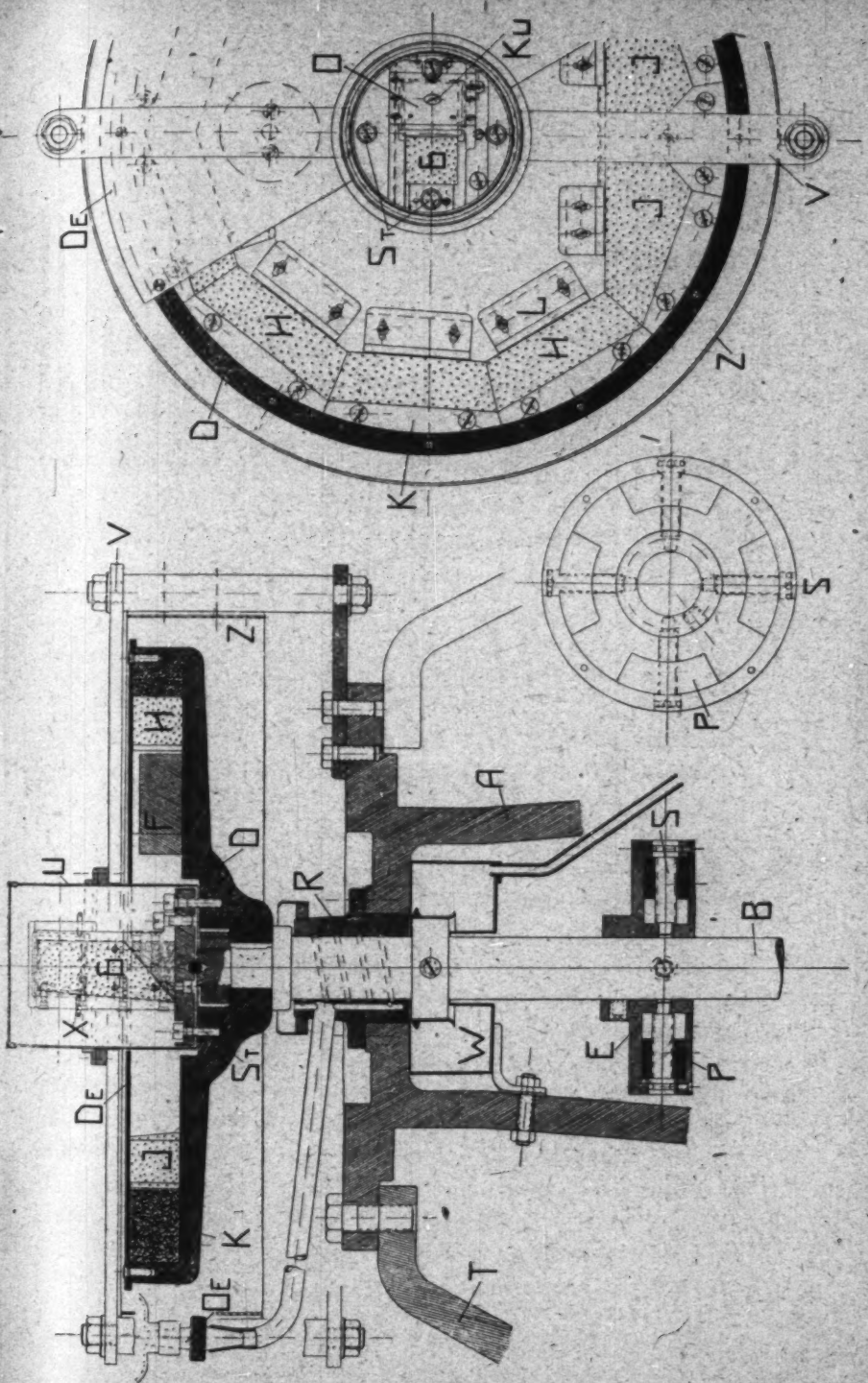
APPARAT FÜR VERSUCHE ÜBER DEN FRESNELSCHEN MITFÜHRUNGSKOEFFIZIENTEN







A — GESTELL.
B — WELLE.
C — RIEMENSCHEIBE.
D — DREHTISCH.
E — SCHWUNGSCHEIBE, DIENEN ALS AUSGLEICHVORRICHTUNG.
F — GEGENGEWICHT, ZUM HERSTELLEN DER AUSGLEICHVORRICHTUNG.
G — EINFALLPRISMEN.
H — PRISMEN.
J — PRISMEN.
K — ALUMINIUMSTÜCKE.
L — WINKELEISEN ZUR BEFESTIGUNG DER PRISMEN H UND J.
M — PRISMEN.
N — ZÄHLVORRICHTUNG, FÜR UMDREHUNG DER WELLE B.
O — JUSTIERVORRICHTUNG FÜR DIE PRISMEN G.



Tafel II. (Maßstab 1 : 5.)

Gefahr ihres Zerspringens bei hohen Geschwindigkeiten wurde nur das beste Material verwandt und alle Teile völlig präzis gearbeitet. Die Achse wurde als vertikal laufend festgesetzt, weil einmal ein passendes Gußgestell für die Maschine vorhanden war, dann aber schien eine solche Anordnung auch noch Vorteile in bezug auf Stabilität der Achse während des Betriebs zu gewähren. Als Antrieb kam nur Riemenübertragung in Frage, da die direkte Kupplung der Maschine mit einem Vertikalmotor kompliziert geworden wäre und sich auch ein Motor mit genügender Regulierfähigkeit nicht in passender Form beschaffen ließ. Konstruktionseinzelheiten sind bei der Beschreibung der betreffenden Maschinenteile erwähnt oder aus den beiden Tafeln zu ersehen.

1. Das Gestell *A*.

Dasselbe bestand aus Gußeisen und hatte eine Höhe von ca. 750 mm. Die obere und untere Seite waren plan gefräst. Der runde, breite Fuß (Durchmesser ca. 70 cm) besaß vier Löcher zum Befestigen der Maschine am Aufstellungsort. Da sich im Lauf der Versuche das Gestell als etwas zu schwach erwiesen hatte, wurde es nachträglich durch die beiden starken, schmiedeeisernen Stützen *T* versteift.

2. Der Prismenbehälter *D*.

Als Material für diesen Behälter wurde Siemens-Martinstahl wegen der starken Zugbeanspruchung, welcher dieser Teil im Betrieb ausgesetzt war, gewählt. Aus einem Stahlblock wurde zunächst die rohe Form geschmiedet, um möglichste Homogenität des Materials zu sichern, diese dann auf die Achse aufgesetzt und mit ihr gleichzeitig zwischen Spitzen abgedreht. Das fertige Stück hatte die Form eines Tellers mit überhöhtem Rande. Der äußere Durchmesser betrug 450 mm, die Wandstärke, welche außen zu 15 mm bemessen war, nahm nach innen allmählich zu. Der fertig abgedrehte Block wurde, ohne mit den nötigen Bohrungen für das Einsetzen der Optik versehen zu sein, zunächst allein in die Maschine eingesetzt und bei sehr hohen Tourenzahlen (ca. 3000 pro Minute) längere Zeit in Betrieb gehalten. Dabei zeigte sich, daß das Material außerordentlich homogen war, denn auch bei den größten Geschwindigkeiten waren am Gestell kaum merk-

liche Vibrationen zu verspüren. Wie eine leichte Überschlagsrechnung ergibt, müßte bei 3000 Touren pro Minute (70 m/s Umfangsgeschwindigkeit) ein Übergewicht von 1 g am Rand der Scheibe ($r = 22{,}5$ cm) einen radialen Zug von 2,26 kg erzeugen. Nach diesen Vorversuchen erhielt der Behälter die nötigen Bohrungen für den Stahldeckel *De* (gleichmäßig auf dem Umfang verteilt) und für die Befestigung der Aluminiumstücke *K*, welche als Anlageflächen für die Glasprismen dienten. Der sehr genau passende Deckel besaß einen außen übergreifenden Rand und wurde zuerst aus 3 mm-Stahlblech hergestellt, welches sich aber schon bei den ersten Versuchen stark verwarf. Ein zweiter Deckel von 5 mm Stärke wurde dann aus einem starken Stahlstück durch sorgfältiges Abdrehen gewonnen, und ließ erst nach langem Gebrauche schwache Verziehungen erkennen.

Die Innenfläche des Stahlkörpers, welche als Auflagefläche für das Prismenpolygon dienen sollte, wurde zunächst sehr genau plan gedreht und dann die Aluminiumteile eingepaßt und verschraubt. Diese Stücke, deren Innenflächen ganz genau der äußeren Form des Prismenkranzes entsprechen mußten, waren ganz exakt hergestellt. Die Flächen, an welchen die Prismen angelegt werden sollten, wurden plan geschliffen, um ein Kippen einzelner Prismen unmöglich zu machen. Nach dem mühsamen Aufprobieren aller Einzelteile und dem Einsetzen des Glases zeigte es sich, daß die Prismen völlig unbeweglich saßen. Um jedes Verlagern des Polygons zu verhüten, wurden die Teilprismen *J* etwas nach innen gepreßt, indem zwischen die entsprechenden Aluminiumteile und den äußeren Rand dünne ($^1/_{10}$ mm) Stahlbleche geschoben wurden. Der aufgeschraubte Deckel *De* verhütete ein Herausfliegen der Prismen nach oben. Da aber eine direkte Pressung der Prismen durch den Stahl gefährlich erschien, wurde der Prismenkranz mit mehreren Lagen Gummituch bedeckt und dann der Deckel so verschraubt, daß am Rande Metall auf Metall zu liegen kam. Einige Versuche bewiesen jedoch, daß diese Befestigung der Prismen noch nicht genügte. Deshalb wurden im Behälter noch die verschiebbar angeordneten Winkeleisenstücke *L* angebracht, welche gestatteten, die Glasprismen stark nach außen gegen ihre Anliegeflächen zu pressen. Als Zwischenlage zwischen

Glas und Eisen dienten dünne Filzscheiben. Jedes Prisma wurde mit Hilfe einer Schraubenzwinge stark gegen das Aluminium gepreßt und dann das Winkelstück festgeschraubt. Nach dieser Vorsichtsmaßregel zeigte das Polygon selbst bei hohen Tourenzahlen keine plötzlichen Verlagerungen mehr. Bei etwaigen starken Temperaturänderungen des Prismenbehälters war ein gefährlicher Druck auf das Polygon nicht zu befürchten, da die Ausdehnungskoeffizienten von Glas und Stahl wenig verschieden sind (Stahl: 0,0000100, Glas: 0,0000090). Die stärkere Ausdehnung des Aluminiums (Ausd.-Koeff.: 0,0000216) kam wegen der Kleinheit der Stücke nicht in Frage. Eine Lockerung einzelner Teile trat im Laufe der Untersuchung nicht ein.

3. Das Mittelstück *G*.

Die Fassung des Glaskörpers *G* bestand aus starken Rotgußteilen, welche auf eine 15 mm dicke Platte aus Siemens-Martinstahl geschraubt waren. Die Stahlplatte wurde durch vier versenkte Schrauben *St* mit dem rotierenden Teil verbunden, wobei aber das ganze Stück noch nach allen Seiten gekippt werden konnte, da es auf einer Stahlkugel zentrisch zur Rotationsachse ruhte. Um außer der Kippung auch eine kleine Drehung des Mittelstückes zu ermöglichen, waren die Schrauben *St* in kleine, halbkugelförmige Stahlschalen eingelassen. Das bewegliche Reflexionsprisma dieser Anordnung ließ sich in einer Art Kugelgelenk um die Schraube *Ku* drehen, welche das Prisma an dem starken Deckel *D* festhielt. Die Neigung des Prismas erfolgte von oben durch die drei klemmbaren Mikrometerschrauben *Sr*, die seitliche Verschiebung und Klemmung war durch die beiden Schrauben *X* ermöglicht. Da bei der Rotation der Maschine wegen der unrunden Form dieses Teiles ein starker Luftwirbel erzeugt wurde, überdeckte man das ganze Mittelstück mit einem ruhenden Zylinder aus Messingblech. Diese Haube reichte bis auf den Boden des Prismenbehälters und war für den Lichtdurchtritt mit den nötigen Fensteröffnungen versehen, die mit planen Glasscheiben verschlossen waren, damit die Luft im Apparat als Ganzes mit diesem rotierte. Die beiden rechteckigen Eisenstangen *V* hielten diesen Zylinder und waren selbst mit zwei starken Haltern am Gestell verschraubt. Die Halter dienten gleichzeitig zur Befestigung des Schutzringes *Z* aus Eisenblech,

welcher den Beobachter gegen das umherspritzende Öl und etwaige abfliegende Teilchen schützen sollte. Die Messinghaube bewährte sich übrigens bei großen Tourenzahlen nicht; denn durch die starke Luftbewegung und Vibrationen der Maschine kam sie bald in solche Schwingungen, daß sie am rotierenden Teil anschlug und ihre Zertrümmerung befürchtet werden mußte. Sie wurde daher bei späteren Versuchen weggelassen und das Mittelstück durch aufgesteckte Papphülsen möglichst abgerundet. Dabei zeigte sich keinerlei Zunahme der Bildunruhe, eher eine Besserung.

4. Welle und Lager.

Die Achse B des Apparates war ihrer starken Beanspruchung wegen aus Siemens-Martinstahl hergestellt und von oben nach unten etwas verjüngt. Die Lager R bestanden aus Rotguß und waren in einem Abstand von 45 cm in das Gestell eingelassen. Das ganze Gewicht des rotierenden Teiles ruhte auf einer in der Welle versenkten, polierten Stahlkugel, welche im unteren Lager auf einer glasharten Stahlplatte rotieren konnte. Da die Maschine nach beiden Richtungen laufen sollte, waren in beide Lager doppelte Spiralwindungen zur Ölung eingeschnitten. Infolge des starken Ölverbrauchs mußten Ölfänger und der Abspritzungsring W angebracht werden, um ein Umherspritzen des Öles im Beobachtungsraume zu verhüten. Trotz ihrer sehr starken Beanspruchung bei hohen Tourenzahlen blieben beide Lager stets ziemlich kühl, wie das folgende Täfelchen zeigt. Die hier angeführten Temperaturen wurden während eines fast zwölfstündigen, ununterbrochenen Betriebs der Maschine in Abständen von ungefähr einer Stunde gemessen, wobei als Lagertemperatur die Temperatur des Öles angesehen wurde, welches sich auf dem Lager im Ölfänger sammelte. Die vorliegenden Messungen sind am oberen Lager ausgeführt worden.

Zeit (vorm.)	Temperatur	Zeit (nachm.)	Temperatur
7 Uhr — Min.	Anfang	1 Uhr 15 Min.	24,9°
7 „ 43 „	23,5°	2 „ 40 „	24,7°
8 „ 50 „	23,2°	3 „ 4 „	26,3°
9 „ 43 „	26,6°	4 „ 25 „	26,3°
10 „ 44 „	24,2°	5 „ 8 „	29,0°
11 „ 37 „	25,1°	6 „ 6 „	26,0°
— „ — „	—	6 „ 55 „	26,1°

Die Zimmertemperatur am Lager betrug durchschnittlich 20,0°, Bewegungsrichtung und Tourenzahl (bis ca. 1000) variierten. Die Tabelle ist ein Zeichen für den tadellosen Zustand der Welle und der Lager.

Auf der Achse saßen noch zwischen den Lagern die Riemenscheibe *C* und das Balanciergewicht *E*. Die Riemenscheibe war möglichst nahe am unteren Lager befestigt worden, damit Stöße im Antrieb hauptsächlich vom Gestell aufgenommen wurden.

5. Balancierversuche (Balanciergewicht *E*).

Die Hauptbedingung für ruhiges Laufen der Maschine war in der Vollkommenheit der Ausbalancierung des rotierenden Teiles gegeben, denn wie schon gezeigt wurde, erzeugten selbst minimale Übergewichte auf einer Seite der Achse bei einigermaßen großen Tourenzahlen ganz enorme Zugkräfte.

Zunächst wurden alle Teile für sich möglichst ausgeglichen und dann die fertig zusammengestellte Maschine als Ganzes ausbalanciert. Das schwere Mittelstück ließ man auf einer polierten, genau horizontalen Fläche rollen. Die hierbei sich zeigenden Ungleichheiten wurden durch Aufsetzen von Stahl- und Bleistücken möglichst beseitigt. Im Prismenbehälter wurde der durch die beiden schweren Prismen *J*, *J* erzeugte Massenüberschuß auf der gegenüberliegenden Seite durch das Stahlstück *F* kompensiert. Der gebrauchsfertig zusammengesetzte und roh justierte rotierende Teil wurde dann zwischen zwei Paar Friktionsräder gelegt, die ihrerseits in Kugellagern liefen, und weiter ausbalanciert. Durch Anbohren der Fassung wurde so der noch merkbare Massenüberschuß beseitigt. Diese Methode erwies sich jedoch noch als zu roh, da die Reibung der Friktionsräder wegen der großen Last des Stahlstückes zu groß war. Nach mehrfachen, verschiedenen Versuchen fand man, daß sich größere Genauigkeit erzielen ließ, wenn die Welle auf zwei gut plane, polierte Spiegelglasstücke gelegt wurde und der Apparat pendelte. Auf diese Weise konnte noch leicht 1 g Übergewicht auf einer Seite der Achse nachgewiesen werden. Nach peinlichster Sorgfalt in der Ausbalancierung und Einsetzen der Achse in das Gestell ergab sich jedoch, daß die genannten Methoden nicht genügend genau waren. Deshalb wurde auf die Welle das Balanciergewicht *E*

aufgesetzt. Dieses bestand aus einem völlig geschlossenen Stahlkörper *E*, in welchen sich von außen durch die Schrauben *S* der Abstand der vier ca. 200 g schweren Gewichte *P* von der Achse um ungefähr 16 mm getrennt ändern ließ. Dadurch war es möglich, den Schwerpunkt des ganzen Systems in gewissen Grenzen zu verlegen. Jetzt wurde nun durch einfaches Probieren diejenige Stellung der Gewichte gesucht, bei welcher die Maschine am ruhigsten lief. Einen gewissen Anhalt, nach welcher Seite der Prismenbehälter schlug, gewährte dabei die Benutzung eines feinen Fühlhebels. Auf diese Weise war es möglich, selbst bei 1500—2000 Touren p. Min. noch ein gutes Bild der Interferenzen zu erhalten, bei höherer Tourenzahl verschwanden die Bilder wegen Verziehung des Apparates. Die Maximalgrenze, bis zu welcher man in der Geschwindigkeit der Maschine gehen konnte, sank allerdings im Laufe der Untersuchung immer tiefer, so daß schließlich die Interferenzen schon bei 1000 Touren unscharf wurden.

6. Das Zählwerk *N*.

Zur Messung der Tourenzahl der Maschine war in die Welle *B* ein starkes Gewinde von 5 mm Steighöhe eingeschnitten, in welches ein Schneckenrad mit horizontaler Achse eingriff. Auf dieser saß ein Kontaktrad aus Hartgummi, welches bei jeder Umdrehung des Zahnrades einen Stromkreis schloß. Das Übersetzungsverhältnis zwischen Welle und Kontaktrad betrug 1:50 und war so gewählt, daß die Tourenzahl der Maschine bis auf höchstens 1% Fehler bestimmt werden konnte. Diese Kontakte ließ man auf den hinteren Hebel des Chronographen der Univ.-Sternwarte registrieren, während die Sternzeituhr auf dem vorderen Signalhebel Sekundenpunkte markierte. Bei dieser Einrichtung konnte noch 0,01 Sekunde mit Sicherheit abgelesen werden, so daß bei Zeitdifferenzen auch nur ein Fehler von 0,01 Sekunde zu befürchten war. Da bei den Versuchen eine Sternzeituhr benutzt wurde, waren alle Beobachtungen der Tourenzahlen auf mittlere Zeit zu reduzieren, was nach der bekannten Beziehung erfolgte:

eine Sek. St. Z. = 0,99727 Sek. M. Z.

Das folgende Täfelchen läßt die bei dieser Einrichtung erreichte Genauigkeit erkennen. Dabei bedeutet *A* die Anzahl

Sternzeitsekunden zwischen zwei Kontakten der Schnecke (= 50 Touren der Maschine).

A in St. Z.	Max. Fehler in s. St. Z.	Max. Fehler in %	Touren p. Min. St. Z.	Red. auf M. Z.	Abs. Fehler in Touren p. Min.
30,0	± 0,01	± 0,03	100	+ 0,27	± 0,03
6,0	1	0,17	500	1,37	0,83
3,0	1	0,33	1000	2,74	3,33
1,5	1	0,67	2000	5,48	13,33
1,0	1	1,00	3000	8,22	30,00

Wie man sieht, war die Genauigkeit für alle vorkommende Fälle völlig ausreichend. Ungleichförmigkeiten im Gange der Maschine während eines Umlaufes der Kontaktscheibe ließen sich hierbei zwar nicht erkennen, sie waren aber wegen der großen Schwungmasse überhaupt kaum zu befürchten.

7. Der Antrieb.

Bei den ersten Probeversuchen mit der Maschine in der Werkstatt wurde ein $^1/_3$ PS.-Drehstrommotor mit horizontaler Achse benutzt. Der Motor zog aber zu schnell an, was für die Justierung hätte schädlich sein können, und brachte die Tourenzahl höchstens bis 2700 Touren p. Min. Deshalb wurde er durch einen Gleichstrommotor von $^1/_4$ PS. mit vertikaler Achse und Tourenregulier im Verhältnis 1 : 12 bei gleichbleibender Zugkraft ersetzt. Der Antrieb war jetzt sehr günstig, der Motor aber viel zu schwach. Nach mannigfachen Versuchen zeigte sich ein 5 PS.-Gleichstrommotor (110 V.) älteren Modells von Siemens-Schuckert am geeignetsten. Durch regulierbare Widerstände im Haupt- und Nebenstrom gelang es, die Tourenzahl der Maschine beliebig von ca. 70 Touren p. Min. bis über 3500 zu bringen. Der Betrieb war zwar wenig rationell, hatte aber den Vorteil, daß alle Stöße im Anlauf verschwunden waren. Der Motor lief ohne Veränderung der Bürstenstellung nach beiden Seiten gleich gut. Seine Achse lag horizontal und war ungefähr 2 m von der Maschine entfernt. Die Übertragung geschah durch einen gekreuzten und geleimten Riemen.

8. Die Aufstellung.

Die ganze Einrichtung fand Aufstellung in einem Kellerraume der Univ.-Sternwarte zu Jena. Die Maschine wurde mittels vier starker Schrauben in den Zementboden des Raumes eingelassen und der Fuß mit Zement ausgegossen. Bei der Aufstellung wurde darauf geachtet, daß die Achse genau vertikal stand, um gyroskopische Wirkungen des rotierenden Teiles zu verhindern.

§ 6. Versuche zur Erzeugung monochromatischer Interferenzstreifen.

Wie schon mehrfach erwähnt, zeigte sich die Siedentopfsche Hg-Lampe für diese Versuche als viel zu lichtschwach. Die sehr hell leuchtenden Metalldampflampen aus Quarz (Cd-Amalgamlampe[1]) wären voraussichtlich ausreichend gewesen, konnten aber nicht probiert werden, da keine zu beschaffen war. Um dafür einen Ersatz zu schaffen, wurden zunächst reine Metallstäbe im Lichtbogen verdampft. Die Beobachtungseinrichtung (Fig. 6 II) war dabei so getroffen, daß das Licht erst nach seinem Durchgang durch den ganzen Apparat spektroskopisch zerlegt wurde, so daß eine Reihe monochromatischer Interferenzbilder entstanden (Methode der Sonnenaufnahmen in monochromatischem Lichte mit Hilfe des Spektroheliographen). Das reelle Interferenzbild im Koinzidenzprisma *S* wurde dabei durch ein Objektiv von geeigneter Öffnung stark verkleinert auf den vertikal stehenden Spalt eines Spektralapparates *Sp* so projiziert, daß zunächst die Interferenzstreifen parallel zum Spalt, die Trennungslinie der beiden Gesichtsfeldhälften also senkrecht dazu standen. Bei Benutzung des Emissionslichtes von glühendem Metalldampf mußte dann im Spektroskop eine Reihe von monochromatischen Spaltbildern entstehen, in denen die Interferenzstreifen sichtbar waren. Damit aber außer der Meßmarke des Koinzidenzprismas noch eine genügende Anzahl von Interferenzstreifen in die Spaltöffnung zu liegen kam, mußte dieser ziemlich weit geöffnet werden (ca. 0,4—0,8 mm). Die Dispersion des Spektrographen war deshalb sehr hoch zu wählen, um die einzelnen Spaltbilder nicht aufeinander fallen

1) Zeitschr. f. Instrumentenkunde 21. S. 201. 1901; 24. S. 296. 1904.

zu lassen. Dadurch wurde auch der Vorteil erreicht, daß das Nebenlicht sehr geschwächt war, so daß sich die monochromatischen Spaltbilder, welche durch die Prismen des Apparates auch etwas an Helligkeit einbüßten, ziemlich hell aus dem schwachen kontinuierlichen Spektrum hervorhoben. Zur Zerlegung des Lichtes kamen bei diesen Versuchen ein photographisches Gitter, zwei große Flintglasprismen und ein Flüssigkeitsprisma nach Königsberger einzeln oder in Kombinationen in Anwendung. Von den untersuchten Metallen gaben Eisen und Kupfer den günstigsten Lichtbogen, auch Messing brannte sehr gut. Bei einer Stromstärke von 10—15 Amp. und Stäben von 10—15 mm Durchmesser gab Fe ein sehr helles, weißes Licht, dessen Spektrum aber zu linienreich war, so daß auch bei stärkster Dispersion die einzelnen Spaltbilder nicht mehr weit genug getrennt werden konnten. Kupfer brannte bei größerem Stabdurchmesser (20 mm) ebenfalls sehr ruhig, das Spektrum war linienärmer und günstiger wie das vorige, da die hellen Linien in Grün und Rot genügend weit auseinander lagen. Zink lieferte sehr schönes helles Licht, schmolz aber bei einigermaßen großen Stromstärken sofort ab und entwickelte sehr dicke, weiße Dämpfe. Messing oder Messing und Kupfer vertrugen eine größere Stromstärke und erzeugten einen ziemlich ruhigen Lichtbogen. Die größte Ruhe des Bogens wurde jedoch erzielt, wenn als positive Elektrode das Metall verwandt wurde, während der negative Pol aus Homogenkohle bestand. In allen Fällen wurde jedoch der Bogen sofort unruhig, zischte und rotierte, sobald das Metall weißglühend war. Versuche, den Lichtbogen zur Kühlung der Elektroden unter Flüssigkeit zu erzeugen, gelangen nicht. Bei derartigen Spektralaufnahmen der Interferenzbilder waren Expositionszeiten von 5—10 Min. erforderlich, wenn die Maschine in Betrieb war. Um scharfe Bilder zu erzielen, war aber während der Exposition größtmögliche Ruhe des Lichtes unbedingt erforderlich. Diese konnte aber auch bei ständiger Regulierung der Lampe (Handregulierlampe) nie in genügender Weise erreicht werden. Mit dem ungleichmäßigen Brennen des Bogens, welches auch bei Benutzung von Magneten und Drosselspulen nicht besser wurde, waren naturgemäß starke Spannungsschwankungen an den Elektroden verknüpft, welche sich ins Leitungsnetz aus-

breiteten, so daß auch die Tourenzahl des Motors, der von derselben Leitung gespeist wurde, ständig schwankte. Die Aufnahmen mit dieser Anordnung hatten deshalb nicht den gewünschten Erfolg.

Als Ersatz für die reinen Metallelektroden dienten nun später Kohlestäbe mit Füllungen aus verschiedenen Metallsalzen, wobei nur das vom Bogen emittierte Licht benutzt und das direkte Kraterlicht durch passende Blenden zurückgehalten wurde. Die sogenannten Spektralkohlen von Siemens erwiesen sich hierbei als unzweckmäßig, sie brannten ziemlich unruhig und zu rasch ab. Kohlestäbe mit Leuchtzusätzen, teilweise mit Metalladern, wie sie in der Beleuchtungstechnik (Effektkohlen) Verwendung finden, gaben zwar einen sehr hellen und ruhigen Bogen, besaßen aber zu viel Beimengungen, so daß die Spektren zu linienreich waren. Deshalb wurden von der Firma Gebr. Siemens auf besonderen Wunsch Kohlen mit chemisch-reinen Salzen der Metalle Cu, Zn, Cd und Ca als Füllungen hergestellt. Diese waren für den vorliegenden Zweck geeigneter als die anderen Kohlestäbe, bei ihnen trat aber das Nebenlicht neben dem Emissionslicht der Metalldämpfe sehr stark hervor. Bei größeren Stromstärken erschienen die Emissionsspektren stärker, dann aber brannte der Bogen sehr unruhig, und die Füllungen waren in kurzer Zeit verflüchtigt. Die spektrographischen Aufnahmen ließen sich jedenfalls auch hier nicht mit der nötigen Präzision ausführen. Ebenso konnte eine direkte, visuelle Ausmessung der Interferenzen wegen der Beaufsichtigung, welche Motor und Bogenlampe ständig erforderten, nicht durchgeführt werden. Die Versuche in dieser Richtung wurden daher abgebrochen und eine Anordnung gewählt, bei welcher Lichtquellen mit kontinuierlichem Spektrum benutzt werden konnten.

Die Interferenzstreifen wurden nun so gedreht, daß sie parallel zur Trennungslinie im Koinzidenzprisma waren, also senkrecht zum Spalt des Spektrographen lagen. Im Spektrum erschienen die Interferenzen ebenfalls in einfarbigem Lichte, wie bei der anderen Anordnung, aber parallel zur Längsausdehnung des Spektrums. Sie zogen sich, vom roten nach dem violetten Ende schwach konvergierend, durch alle Farben, wobei die Trennungslinie der beiden Gesichtsfeldhälften als

scharfer, schwarzer Strich erschien. Als Lichtquelle fanden gewöhnliche Bogenlampenkohlen Verwendung. Um die Streifen möglichst scharf zu erhalten, war Bedingung, daß diese einmal genau senkrecht zum Spalt standen und daß dieser ziemlich eng gemacht wurde, womit allerdings eine erhebliche Lichtschwächung verbunden war. Die Unruhe der Lichtquelle war damit behoben, denn die selbstregulierende Projektionslampe konnte oft stundenlang in Betrieb sein, ohne häufiges Nachregulieren zu erfordern; jedoch war das kontinuierliche Spektrum für Ausmessung der Streifen bei rotierendem Apparat zu lichtschwach. Die photographischen Aufnahmen der Interferenzen gelangen bei ruhender Maschine recht gut, war diese jedoch im Betrieb, so mußte eine ca. 600 mal längere Expositionszeit wie in Ruhe gewählt werden, um genügende Bilder zu erhalten. Während dieser langen Zeit (8—10 Min.) konnte nun die Tourenzahl der Maschine nicht genügend konstant gehalten werden. Tagsüber wechselte die Spannung im Leitungsnetz, an welches der Motor angeschlossen war, ziemlich stark, auch mag die Bogenlampe, die in der Leitung lag, Schwankungen verursacht haben, aber auch nachts, wenn die größte Ruhe im Leitungsnetz erwartet werden konnte, zeigte sich keine genügende Konstanz in der Tourenzahl der Maschine, um ganz scharfe Aufnahmen zu erhalten. Da auch langes Einlaufen der Maschine vor den Versuchen und starke Belastung des Motors durch gleichzeitigen Antrieb eines kurzgeschlossenen, zweiten Motors nicht mit genügendem Erfolg wirkten, wurden diese Versuche aufgegeben und auf vollkommen monochromatische Interferenzstreifen verzichtet.

Hierbei mag noch erwähnt werden, daß sich bei den zahlreichen Spektralaufnahmen unter den probierten Plattensorten folgende sehr gut für den jeweils beigesetzten Spektralbereich bewährten:

1. Viridin-Inaloplatten (anti-halo orthochrom.) von Schleussner (ganzes Spektrum);
2. Prozeß Panchromatik Pl. von Wratten und Wainwreight (hochempfindlich für Rot);
3. Kranzplatte I von Kranseder & Cie., München (grün);
4. Perortoplatten von Otto Perutz, München (grün).

§ 7. Das endgültige Meß- und Aufnahmeverfahren.

Da die Versuche zur Herstellung von monochromatischem Lichte an den geringen dabei erreichbaren Helligkeiten scheiterten, wurden die definitiven Messungen unter Zuhilfenahme von Filtern aus gefärbten Gläsern ausgeführt. Diese Lichtfilter ließen zwar noch ziemlich große Wellenlängenkomplexe durch, absorbierten aber doch ca. 50 Proz. der auffallenden Lichtmenge, so daß die Helligkeit der Interferenzen sowohl für photographische Aufnahmen als auch visuelle Messungen bei verdunkeltem Beobachtungsraume gerade noch ausreichte. Versuche, die durchgelassenen Wellenlängengebiete durch größere Glasdicken oder Kombinationen von Filtern einzuengen, waren bei der damit verbundenen, starken Absorption ohne Erfolge geblieben. Die Streifen erschienen aber auch bei den einfachen Filtern sehr scharf und schwarz, nur bei Benutzung von grünem Lichte zeigten sich schwach farbige Ränder, welche sich aber als nicht störend erwiesen. Da die Filter aus ausgesuchten, beiderseitig planpolierten Glasscheiben bestanden, konnten sie, ohne daß eine Bildverschlechterung eintrat, zwischen Koinzidenzprisma und Beobachtungsinstrument gesetzt werden, teilweise befanden sie sich allerdings auch direkt hinter der Bogenlampe.

Bei den Versuchen, welche für die Herleitung des Resultates Verwendung fanden, wurden folgende zwei Gläser benutzt.

Nr.	Farbe	Dicke	Durchlässig für $\lambda = \mu\mu$	Mittel $\mu\mu$	Schwach sichtbar
1	rot	1,7 mm	608—640	624	grün
2	hellgrün	2,4 „	510—560	535	rot

Die Durchlässigkeit der Filter wurde mit Hilfe eines Taschenspektroskopes mit Wellenlängenskala bestimmt.

Die photographischen Aufnahmen wurden mit einer Spektrometerkamera mit verschiebbarer Platte P (Fig. 6) ausgeführt, wobei zwischen Koinzidenzprisma S und Kameraobjektiv (relat. Öffnung: 1:5, $f = 300$ mm) das Reflexionsprisma K zur Knickung der Strahlen wegen Raummangels und das Fernrohrobjektiv N aufgestellt waren, um bei einer Vergrößerung des Interferenzbildes auf das Sechsfache, die Balglänge nicht zu groß werden

zu lassen. Bei dieser Anordnung betrugen die Expositionszeiten ca. 0,5 Sek., wenn der Apparat nicht rotierte, war aber die Maschine in Betrieb, so war die 600—800mal größere Zeit (für verschiedene Farben etwas verschieden) nötig, um brauchbare Negative zu erhalten. Nimmt man an, daß für die Exposition einer photographischen Platte nur die gesamte auftreffende Lichtmenge, ohne Rücksicht auf deren Dauer und Stärke, in Frage kommt, so ist die Belichtungsdauer bei rotierendem Apparat durch die Summe der Blitze bei jeder Umdrehung gegeben. Läuft die Maschine demnach m Touren pro Minute, so ist die Dauer eines einmaligen Aufleuchtens der Interferenzen in Sekunden:

$$t = \frac{60}{m \cdot 720},$$

wenn man den Prismenkranz um 0,5° bis zum völligen Verschwinden, von deren Erscheinen an gerechnet, verdrehen muß, wobei während der Drehung immer gleiche Helligkeit des Bildes angenommen wird. Damit nun die Belichtungszeiten bei rotierendem und ruhendem Apparat gleich werden, muß folgende Gleichung gelten, in welcher a (in Minuten) die Expositionszeit bei rotierendem Apparat bedeutet:

$$a\,m\,t = \frac{60\,m\,a}{720\,m} = 0{,}5,$$

oder $$a = 6 \text{ Min.}$$

Diese Betrachtung gilt selbstverständlich nur für Umlaufsgeschwindigkeiten, bei denen die Dauer einer Umdrehung kleiner als 6 Min. ist, denn im andern Falle wäre es möglich, daß innerhalb 6 Min. gar kein Licht zur Platte gelangen könnte. Der berechnete Wert stimmt innerhalb gewisser Grenzen mit der experimentell bestimmten Belichtungsdauer überein, welche im Durchschnitt 5 bis 7 Min. betrug. Die zweite Folge aus obiger Überlegung, die Unabhängigkeit der Belichtungsdauer von der Tourenzahl, war aber anscheinend nicht erfüllt, denn bei hohen Umlaufsgeschwindigkeiten der Maschine mußten die Platten oft mehr als 15 Min. belichtet werden, ehe sich überhaupt ein Schimmer der Interferenzen zeigte. Diese Erscheinung könnte vielleicht durch eine Art Reizschwelle für die Platten erklärt

werden, indem diese bei genügend kurzen und sehr schwachen Lichtblitzen $\left(\text{Dauer} = \frac{1}{12000} \text{ Sek. bei 1000 Touren pro Minute}\right)$ an Empfindlichkeit verlieren.

Für jede Farbe wurde Fokussierung und Expositionsdauer durch Probeaufnahmen bestimmt. Zur visuellen Beobachtung der Streifenverschiebungen kam ein sog. Kometensucher der Universitätssternwarte nach Vorsetzen eines passenden Objektives in Verwendung. Hierbei wurde ein Koinzidenzprisma mit vertikaler Trennungslinie, des größeren Gesichtsfeldes wegen, benutzt.

Für die direkte Ausmessung der Interferenzen war der Kometensucher mit einem Schraubenmikrometer versehen, welches gestattete, das Fernrohrbild in Millimetern auszuwerten (Vergr. ca. 25). Die Aufstellung des an sich sehr schweren Instrumentes war auf dem Steinboden des Beobachtungsraumes hinreichend stabil.

Die Tourenzählvorrichtung arbeitete vollkommen selbsttätig und bedurfte keiner Überwachung. Signale, welche mit Hilfe eines besonderen Tasters gleichzeitig mit den Maschinenzeichen auf den Chronographen registriert wurden, gestatteten, neben der Tourenzahl Zeit und Dauer jeder Exposition oder Einstellung genau zu ermitteln, so daß diesbezügliche Notizen während der Beobachtung fortfielen. Ein im Beobachtungsraum angebrachtes Relais ließ stets erkennen, ob diese Vorrichtung ordnungsgemäß funktionierte.

Die Zimmertemperatur wurde mittels mehrerer im Versuchsraume verteilter Thermometer überwacht, ein Ventilator sorgte stets für möglichste Verteilung der durch die Bogenlampe und die Widerstände erzeugten Wärme. Ebenso maß man in regelmäßigen Abständen die Temperaturen der Lager und des Innern des Prismenbehälters.

Bogenlampe und Motor arbeiteten meist derart ruhig, daß ein Nachregulieren während einer Aufnahme oder Messung selten nötig war.

Zur Bestimmung der Breite und Verschiebung der Interferenzstreifen wurde sowohl bei der Ausmessung von Platten als auch bei visuellen Messungen ein Verfahren angewandt,

welches Hr. Pulfrich[1]) in seiner Abhandlung über das Abbe-Fizeausche Dilatometer empfiehlt.

Sind nämlich l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 die Mikrometerablesungen bei den Einstellungen der Meßmarke auf fünf nebeneinanderliegende Streifen, so sind, äquidistante Streifen vorausgesetzt, die Streifenbreite b in Mikrometerteilen und die Lage l_s des mittelsten Streifens gegeben durch die Gleichungen:

$$b = \tfrac{1}{8}(l_5 + l_4 - (l_2 + l_1)), \quad ^2)$$
$$l_s = \tfrac{1}{5}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5).$$

Zur Ausmessung der photographischen Platten wurde ein Komparator von C. Zeiß benutzt, welcher die gemessenen Längen von einer Nickelstahlskala abzulesen gestattete. Direkt konnten am Kopf der Mikrometerschraube noch 0,001 mm abgelesen werden, 0,0001 mm waren mit Sicherheit zu schätzen. Als Meßmarke diente ein Doppelfaden von passender Weite, welcher sich für Interferenzmessungen als sehr geeignet zeigte. Die Vergrößerung des Meßmikroskopes ließ sich variieren, so daß für jede Streifenbreite die günstigsten Verhältnisse leicht eingestellt werden konnten.

Für direkte, visuelle Messungen am Apparat fand ein Fernrohr mit gutem Schraubenmikrometer Verwendung.

Die Teilfehler der Nickelstahlskala des Komparators und die Fehler der Mikrometerschrauben wurden nicht näher untersucht, nachdem eine Reihe von Einstellungen auf Probeobjekte ergeben hatte, daß an allen benutzten Stellen die Teil- und Schraubenfehler sicher kleiner waren als die Einstellsicherheit. Etwaige zufällige Teilungsfehler wurden bei den definitiven Messungen dadurch eliminiert, daß bei der Repetition von Messungen immer andere Bereiche der Skala und der Schrauben in Benutzung kamen.

Bei genügend breiten und scharfen Interferenzen, wie man sie bei Benutzung von Filtern stets erhalten konnte, war es möglich, sowohl Breite als Lage der Streifen bis auf $\frac{1}{100}\,b$ genau zu bestimmen. Die Streifenverschiebungen betrugen aber nur 0,1 bis 0,2 b, so daß bei der erwähnten Meßgenauigkeit die

1) K. Pulfrich, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 23. S. 411—418. 1893.
2) Vgl. die Bemerkung zu dieser Formel auf S. 408.

Werte der Verschiebungen bis zu 10% ihres Betrags gefälscht werden konnten. Durch mehrfache Wiederholungen der Messungen ließen sich diese Fehlergrenzen nur unwesentlich einengen. Auch konnte die Breite der Interferenzen nicht zu groß genommen werden, da einmal mit der Breite die Einstellsicherheit abnimmt, dann aber erschienen auch stark verbreiterte Streifen im Apparat nicht mehr gerade, sondern hyperbelartig gebogen.

Zu diesen Einstellfehlern addierten sich noch etwaige Fehler, die durch die Ungleichförmigkeit in der Tourenzahl der Maschine entstanden. Die Messung der Tourenzahlen selbst war, wie schon gezeigt wurde, genauer als für die vorliegenden Zwecke nötig war. Die Geschwindigkeit der Maschine blieb meist während einer Beobachtung hinreichend konstant, wenn sie vorher lange genug eingelaufen war (5—10 Min.). Die Schwankungen in der Tourenzahl konnten nachträglich sehr leicht aus den Chronographenregistrierungen erkannt werden. Geschwindigkeitsänderungen bis zu höchstens 1% der Tourenzahl wurden bei der Berechnung noch zugelassen, Messungen bei stärkeren Geschwindigkeitsänderungen wurden ausgeschlossen.

Die Lage des Streifensystems bei ruhender Maschine heiße Nullpunkts- oder Ruhelage. Um über die Bewegung dieser Nullpunktslage, hervorgerufen durch Temperaturänderungen im Glase, Verlagerung von Prismen, Nachgeben von Schrauben, elastische Verziehungen usw., stets genau orientiert zu sein, wurden nach je einigen Messungen bei bewegter Maschine zwei bis drei Nullpunktsbestimmungen ausgeführt. Ferner ließ man den Apparat nach jeder Ruhelage in der entgegengesetzten Richtung wie vorher laufen, um zu sehen, ob die Streifenverschiebungen auch entgegengesetzt gleich ausfielen, was als sicheres Kriterium dafür anzusehen war, daß im Apparat keine Verziehungen aufgetreten waren.

Die folgenden Tabellen lassen das zur Bestimmung der Breitenverschiebung angewandte Verfahren erkennen.

Nachdem bei ruhendem Apparat durch Einstellung auf fünf nebeneinander liegende Streifen die Lage des Nullpunktes und die Streifenbreite erhalten war, wurde der Apparat in

Rotation versetzt und die Einstellung jener fünf Streifen verschiedene Male, im vorliegenden Fall fünfmal, wiederholt. Für die Zeiten dieser Messungen geben in Spalte 2 die z die zu 50 Touren der Maschine nötigen Sternzeitsekunden an und hieraus lassen sich ohne weiteres die in Spalte 3 angegebenen Tourenzahlen p. Min. ableiten. Spalte 4 und 5 geben die aus jenen Einstellungen gefundenen Streifenbreiten b und Streifenlagen l_s. Unter l_0 sind die für die Zeiten der Messungen bei bewegtem Apparat interpolierten Nullpunktsstellungen angeführt. $l_0 - l_s$ sind dann die in Mikrometerteilen ausgedrückten Verschiebungen δ_g oder δ_m, je nachdem die Rotation gegen oder mit dem Uhrzeiger erfolgt war. Die Verschiebungen δ_m sind hierauf durch Interpolation in die Werte übergeführt worden, welche beobachtet worden wären, wenn die Messungen bei denselben Rotationsgeschwindigkeiten des Apparates angestellt worden wären wie die Messungen der δ_g. Die hierbei sich zeigende Verschiedenheit der bei entgegengesetzt gleichen Umdrehungsgeschwindigkeiten gefundenen Werte δ_g und δ_m ist zum Teil den Messungsfehlern, zum andern Teil aber jedenfalls der Verziehung des Polygons infolge der Rotation zuzuschreiben. Ein systematisches Überwiegen nach einer Seite konnte jedoch nicht konstatiert werden. Wurden die Abweichungen größer als 6—7%, so wurde eine neue Justierung des Apparates vorgenommen und die Beobachtungen fanden keine Verwendung. Das Mittel δ der ohne Rücksicht auf das Vorzeichen genommenen Verschiebungen δ_g und δ_m war als die der betreffenden Rotationsgeschwindigkeit des Apparates zugehörige Streifenverschiebung anzusehen.

1. Nullpunkt: $4{,}395^p$; $b = 1{,}170^p$.

2. Drehung gegen den Uhrzeiger.

Nr.	z	Touren p. Min.	b	l_s	l_0	δ_g
1	6,35	472,6	$1{,}173^p$	$4{,}501^p$	$4{,}395^p$	$- 0{,}106^p$
2	5,73	524,7	1,176	4,539	4,394	0,145
3	5,28	568,4	1,170	4,547	4,393	0,154
4	5,10	588,4	1,177	4,579	4,392	0,187
5	4,71	637,2	1,171	4,589	4,392	0,197

3. Nullpunkt: $4{,}392^{p}$; $b = 1{,}176^{p}$.

4. Drehung mit dem Uhrzeiger.

Nr.	x	Touren p. Min.	b	l_i	l_0	δ_m
1	6,00	500,1	1,172	4,272	4,392	+ 0,120
2	5,40	555,7	1,175	4,241	4,395	0,154
3	4,95	606,2	1,170	4,207	4,397	0,190
4	4,69	639,3	1,176	4,179	4,399	0,220

5. Nullpunkt: $4{,}399^{p}$; $b = 1{,}169^{p}$.

Nr.	x	Touren p. Min.	δ_m	δ_g	δ	Abweichung
1	5,73	524,7	+ 0,136	− 0,145	0,141	± 0,005 (4%)
2	5,28	568,4	0,168	0,154	0,161	0,007 (4%)
3	5,10	588,4	0,185	0,187	0,186	0,001 (0,6%)
4	4,71	637,2	0,217	0,197	0,207	0,010 (5%)

$b = 1{,}173^{p}$ (Mittel).

Im allgemeinen erschienen die Interferenzen, wenn der Motor nicht zu rasch anzog, vollkommen ruhig. Ein merkliches Zittern war erst bei 800 bis 900 Touren pro Minute zu beobachten. Während der ersten Zeit der Untersuchung gelang es, die Interferenzen selbst bei 1800 Umdrehungen des Prismenkranzes pro Minute noch zu sehen, diese Sichtbarkeitsgrenze sank aber später immer tiefer, ohne daß neue Justierung oder starkes Anziehen der Befestigungsschrauben der Prismen sie wieder auf die frühere Höhe bringen ließ. Bei den definitiven Messungen wurde daher nicht über 750 Touren pro Minute hinausgegangen, um keine Nullpunktsversetzungen während einer Beobachtung befürchten zu müssen, obgleich hierbei die Verschiebung des Streifensystems ziemlich gering war. In dieser Beziehung erwies sich überhaupt die visuelle Messung der photographischen Aufnahme trotz ihrer geringeren Meßgenauigkeit überlegen, denn letztere wies stets bedeutend größere Nullpunktsschwankungen auf als die erste, was wohl seinen Grund in der großen Länge der Belichtungszeiten hatte. Der Nullpunkt selbst änderte sich bei allen Beobachtungsserien in demselben Sinne, er stieg mit wachsender Temperatur des Prismenbehälters, ohne daß aber zwischen beiden Änderungen eine konstante Beziehung fest-

zustellen gewesen wäre. Eine Abhängigkeit der Nullpunktsbewegung vom Drehungssinn der Maschine bestand nicht.

Die Streifenbreite zeigte sich bei allen Messungen sehr konstant, ihre Änderung blieb stets unter der Fehlergrenze der Beobachtung. Die während einer sehr langen Beobachtungsserie von mehr als acht Stunden erfolgten Schwankungen des Nullpunktes und der Streifenbreite sind aus folgender Tabelle zu ersehen.

Zeit	Zahl der Aufnahmen	Nullpunktlage in mm	Streifenbreite in mm
10 Uhr 45 Min.	15	1,6934	0,1930
12 „ 18 „	18	1,7353	0,1916
13 „ 33 „	12	1,7639	0,1900
15 „ 0 „	13	1,7796	0,1890
16 „ 15 „	11	1,8205	0,1887
17 „ 10 „	12	1,8373	0,1873
18 „ 15 „		1,8489	0,1864

Im Laufe von 76 photographischen Aufnahmen hatte sich also der Nullpunkt um 0,1555 mm und die Streifenbreite um 0,0066 mm geändert, so daß im Durchschnitt auf eine Aufnahme eine Änderung von 0,002 bzw. 0,0001 mm entfällt, welche also noch innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtung zu liegen kommt.

§ 8. Anpassung der Formel für die Streifenverschiebung auf den Fall eines rotierenden Körpers.

Wie bereits auf S. 392 angegeben, lautet die Formel für die in Streifenbreiten ausgedrückte Streifenverschiebung:

$$\Delta = \frac{2 l q n^2 (1 - x)}{\lambda c} . \tag{1}$$

Diese Formel ist aber nicht ohne weiteres auf den bei den Versuchen vorliegenden Fall anwendbar, denn ein Lichtstrahl durchläuft bei seinem Durchgang durch das Prismenpolygon Teile des bewegten Mediums, die ganz verschiedene und auch verschieden gerichtete Geschwindigkeiten besitzen. Um sie daher zur Anwendung auf den hier vorliegenden Fall geeignet zu machen, gibt Harreß folgende Ausführungen.

In einem starren, durchsichtigen Medium, welches mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O rotiert,

pflanze sich ein Lichtbündel LL' geradlinig fort (Fig. 7). Hierbei ist angenommen, daß die Richtung der Strahlen durch die Körpergeschwindigkeit nicht geändert wird, welche Annahme theoretisch nicht ganz richtig ist, da die Mitführung des Lichtes durch senkrecht zu seiner Fortpflanzungsrichtung bewegte Materie noch durch quadratische Glieder in v/V bestimmt ist. Wegen der Kleinheit dieser Glieder kommen sie aber hier nicht in Frage.

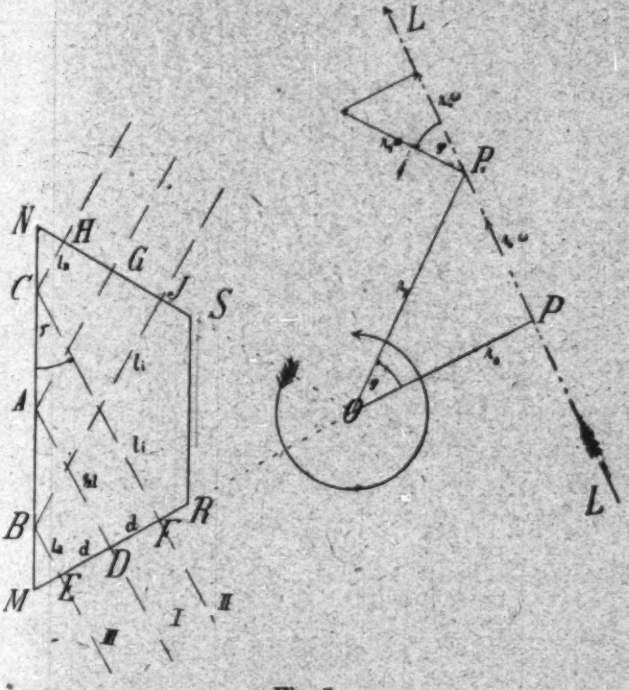


Fig. 7.

Im Punkte P, dem Treffpunkte des Lotes r_0 von O auf LL', sind die Richtungen der Ausbreitung des Lichtes und der Körpergeschwindigkeit dieselben, so daß für die Mitführung der Wert

$$r_0\,\omega$$

in Frage kommt.

In einem anderen Punkte P_1 des Lichtstrahles, sollen die Richtungen zwischen der Fortpflanzung des Lichtes und der Tangentialgeschwindigkeit des Mediums den Winkel $\varphi = \sphericalangle r_0 r_1$ einschließen. Dann kommt für die Änderung der Geschwindig-

keit des Lichtes nur die Projektion von $r_1 \omega$ auf LL' in Betracht. Diese Komponente der Körpergeschwindigkeit ist:

$$r_1 \omega \cos \varphi = r_0 \omega .$$

Da die Geschwindigkeit des vom Licht durchsetzten Körpers in der Richtung des Lichtstrahles im Punkte P_1 demnach gerade so groß ist wie in P, so ist auch die Mitführung des Äthers in P_1 und in P und überall auf dem Strahl LL' von gleicher Größe. Die Änderung der Lichtgeschwindigkeit in einem rotierenden Medium ist demnach so lange konstant, als sich der Lichtstrahl geradlinig fortpflanzt.

Führt man durch innere Reflexionen ein Lichtbündel ganz beliebig durch das rotierende Medium, so ist die resultierende Wirkung auf ein passend erzeugtes Interferenzsystem gleich der Summe der Einzelwirkungen während der geradlinigen Wegteile des Lichtes im Medium. Die Formel (1) läßt sich also schreiben:

$$\Delta = \frac{2n^2(1-x)}{\lambda c} \omega \Sigma l r , \tag{2}$$

worin l die Wege des Lichtes von einer Reflexion zur anderen und r die Lote vom Rotationszentrum auf diese bedeuten.

Nun ist aber

$$\omega = \frac{2\pi 50}{z_m} ,$$

wo z_m die Zeitdifferenz zwischen zwei Kontakten der Tourenzählvorrichtung in Minuten mittlerer Zeit bedeutet, so daß man folgende Formel erhält:

$$\Delta = 200 \frac{n^2 \pi (1-x)}{z_m \lambda c} \Sigma l r . \tag{3}$$

Der Ausdruck $\Sigma l r$ ist nun für das benutzte Polygon numerisch zu bestimmen.

In Fig. 7 sei $MNRS$ ein Prisma des Polygons, in welches ein Strahlenbündel senkrecht zur Fläche MR eintritt, an MN reflektiert wird und senkrecht zu NS wieder austritt. Von einer eventuellen Änderung des Reflexionsgesetzes durch Rotation des Prismas um O soll hier abgesehen werden.

Betrachtet man drei Strahlen, den Mittelstrahl I und zwei im Abstande d zu ihm symmetrisch liegende, andere Strahlen II

und *III*, so ergibt sich die Summe der beiden Produkte aus den Teilstrecken und den von O auf sie gefällten Loten

für Strahl *II* zu $r_a l_a + r_i l_i = (r + d) l_a + (r - d) l_i$,

„ „ *I* „ $r \frac{l}{2} + r \frac{l}{2} = r l$,

„ „ *III* „ $r_i l_i + r_a l_a = (r - d) l_i + (r + d) l_a$.

Hierbei ist $l = s \cdot \cos \gamma$ und $l_a + l_i = l$.

Für einen beliebigen Strahl im Abstande d vom Mittelstrahl ist also die Summe jener beiden auf ein Prisma sich beziehenden Produkte gleich

$$r l - d (l_i - l_a).$$

Dieser Ausdruck hat für $d = 0$, also für den Mittelstrahl, sein Maximum $r l$ und nimmt mit wachsendem d erst langsam, dann rasch ab, wie man sofort erkennt, wenn man ihn in die Form überführt

$$r l - 2 d^2 \operatorname{ctg} \gamma.$$

Für $d = \pm 10$ mm, $l = 114$ mm und $r = 18{,}3$ cm macht das Glied $2 d^2 \operatorname{ctg} \gamma$ schon 3 Proz. von $r l$ aus. Trotzdem haben Harreß und Hr. Harzer wohl mit Recht nur den Mittelstrahl bei der Summierung der Produkte berücksichtigt, denn bei den Versuchen wurde darauf geachtet, daß die Höhe der Bogenlampe, sowie sie sich etwas geändert hatte, sofort korrigiert wurde. Jedenfalls ist der durch Einführung des Maximalwertes der Produktensumme in das Resultat gekommene Fehler viel geringer als wenn man unter der Annahme gleichmäßigen Vorkommens der verschiedenen möglichen Bogenlampenstellungen alle die Fläche a^2 durchdringenden parallelen Lichtstrahlen in Betracht gezogen hätte.

Nach Harreß' Schätzung könnte der Fehler höchstens 1 bis 2 Proz. betragen, das Resultat für den Mitführungskoeffizienten sich also um so viel zu hoch ergeben.

Nicht geringere Beachtung verdient, worauf Hr. v. Laue aufmerksam gemacht hat, der Umstand, daß die beobachteten Interferenzstreifen, wie Fig. 5 (S. 406) zeigt, nicht von den beiden das Prismenpolygon in entgegengesetzter Richtung durchlaufenden Mittelstrahlen selbst, sondern von etwas schief auffallenden Strahlen herrührten. In der Mitte der kreisförmigen Interferenzfigur würden die Streifen nicht von gleicher Breite ge-

wesen sein, dies fand in genügender Annäherung erst in einiger Entfernung von der Mitte statt. Von Harreß wird jedoch diese Quelle der Unsicherheit des Resultates nicht erwähnt.

In Formel (3) ist die Summe Σlr auf die an der Rotation des Apparates teilnehmenden Wegstrecken des Lichtes auszudehnen, auch auf die Strecke zwischen Mittelkörper und der Prismenseite DD' in Fig. 1 (S. 393). Hierbei ist freilich zu beachten, daß der Mitführungskoeffizient in Luft gleich Null ist und daß Strecken, auf welchen der Lichtstrahl in entgegengesetzten Richtungen um den Mittelpunkt des Prismenkranzes herumläuft, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind.

Die Wege des Lichtstrahles im Mittelkörper seien, wie es auch bei Harreß und bei Hrn. Harzer geschieht, nicht berücksichtigt.

Ausführlicher geschrieben lautet Formel (3)

$$\Delta = \frac{200 n^2 \pi (1-x)}{z_m \lambda c} \sum_{\text{Glas}} lr + \frac{200 \pi}{z_m \lambda c} \sum_{\text{Luft}} lr, \tag{4}$$

wo $\sum_{\text{Glas}} lr = (8 s_1 \cos\gamma_1 + s_2 \cos\gamma_2)\left(r - \frac{a}{2}\right) + (s_2 \cos\gamma_2 + a) \times \left(r\cos(180^0 - 4\alpha) + \frac{a}{2}\right) - \left(a\cos(180^0 - 4\alpha) + \frac{a}{2}\right)a$

$= 2040{,}9 \text{ cm}^2$

und $\sum_{\text{Luft}} lr = -a(r-a)\cos(180^0 - 4\alpha) + \frac{a^2}{2} = 18{,}8 \text{ cm}^2$.

Drücken wir die Anzahl z_m Minuten mittlerer Zeit, welche zu 50 Touren der Maschine erforderlich waren, durch die direkt beobachteten z Minuten Sternzeit aus, welchen jenes Zeitintervall gleich ist, setzen wir also

$$z_m = 0{,}99727\, z,$$

so bekommen wir

für $\lambda = 625\,\mu\mu$ und $n_{625} = 1{,}57167$ $\quad x_{625} = 0{,}99627 - 0{,}59004 z \cdot \Delta$,

für $\lambda = 535\,\mu\mu$ und $n_{535} = 1{,}57665$ $\quad x_{535} = 0{,}99629 - 0{,}50188 z \cdot \Delta$.

Die Abweichung der Harreßschen Formeln

$$x_{625} = 0{,}62917\, z \cdot \Delta,$$
$$x_{535} = 0{,}49952\, z \cdot \Delta$$

kommt, wie schon erwähnt, hauptsächlich daher, daß Harreß in seiner Formel für die Streifenverschiebung x fälschlich für

$1 - x$ stehen hat, außerdem aber hat er die Wegstrecken des Lichtstrahls durch die Luft und durch den zwischen DD' und EE' liegenden Glaskörper unberücksichtigt gelassen und bei Einführung von z an Stelle von z_m einen Rechenfehler begangen.

§ 9. Zusammenstellung der Messungsergebnisse.

Die folgenden beiden Tabellen geben die Einzelresultate, welche mit den beiden farbigen Gläsern, also mit Benutzung der Wellenlängen $\lambda = 625\ \mu\mu$ und $\lambda = 535\ \mu\mu$ in je vier Messungsreihen erhalten wurden. z bedeutet wieder die Anzahl der Sternzeitsekunden, welche der Apparat zu 50 Umdrehungen brauchte, δ die für diese Rotationsgeschwindigkeit gefundene Streifenverschiebung, ausgedrückt in Mikrometerteilen, Δ dieselbe Streifenverschiebung, ausgedrückt in Streifenbreiten, und x den Mitführungskoeffizienten, berechnet nach den Formeln

$$x_{625} = 0{,}99627 - 0{,}59004\ z \cdot \Delta,$$
$$x_{535} = 0{,}99629 - 0{,}50188\ z \cdot \Delta.$$

Die letzte Spalte enthält den aus den einzelnen Messungsreihen sich ergebenden Wert von x.

Tabelle I.

$\lambda = 625\ \mu\mu$.

Nr.	z	δ	Δ	x	Mittelwert x
			1. Reihe. $b = 1{,}019^p$		
1	6,09	0,120	0,118	0,572	
2	6,04	0,108	0,106	0,618	
3	5,55	0,126	0,124	0,590	
4	5,54	0,127	0,125	0,588	
5	5,43	0,118	0,116	0,625	
6	5,37	0,120	0,118	0,622	$x = 0{,}596$
7	5,11	0,134	0,132	0,598	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0240$
8	4,92	0,149	0,146	0,572	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0066$
9	4,81	0,152	0,149	0,573	
10	4,62	0,134	0,132	0,636	
11	4,50	0,148	0,145	0,611	
12	4,38	0,162	0,159	0,585	
13	4,18	0,179	0,176	0,562	

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr.	x	δ	Δ	x	Mittelwert x
			2. Reihe.	$b = 1{,}022^{p}$	
1	6,08	0,121	0,118	0,576	
2	5,85	0,124	0,121	0,579	
3	5,21	0,136	0,133	0,587	
4	5,09	0,141	0,137	0,585	
5	4,93	0,151	0,147	0,569	
6	4,87	0,138	0,134	0,611	$x = 0{,}592$
7	4,78	0,146	0,142	0,596	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0175$
8	4,70	0,153	0,149	0,583	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0050$
9	4,69	0,154	0,150	0,581	
10	4,29	0,148	0,144	0,632	
11	4,18	0,168	0,162	0,602	
12	4,12	0,167	0,163	0,600	
			3. Reihe.	$b = 1{,}111^{p}$	
1	5,81	0,128	0,115	0,602	
2	5,60	0,133	0,120	0,600	
3	5,28	0,149	0,135	0,576	
4	5,27	0,128	0,115	0,639	
5	5,15	0,158	0,142	0,565	
6	5,14	0,142	0,128	0,608	
7	5,12	0,145	0,131	0,601	
8	5,04	0,134	0,121	0,636	
9	4,99	0,155	0,140	0,584	
10	4,97	0,165	0,149	0,559	$x = 0{,}586$
11	4,90	0,168	0,151	0,560	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0232$
12	4,87	0,161	0,145	0,580	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0052$
13	4,86	0,154	0,139	0,598	
14	4,81	0,160	0,144	0,588	
15	4,81	0,165	0,149	0,573	
16	4,78	0,163	0,147	0,582	
17	4,65	0,172	0,155	0,571	
18	4,59	0,175	0,158	0,568	
19	4,54	0,182	0,168	0,560	
20	4,54	0,177	0,159	0,570	
			4. Reihe.	$b = 0{,}995$	
1	6,69	0,097	0,097	0,613	
2	6,67	0,097	0,097	0,614	
3	5,48	0,115	0,116	0,621	
4	5,48	0,119	0,120	0,608	
5	5,24	0,127	0,128	0,601	
6	5,10	0,125	0,126	0,617	
7	5,06	0,127	0,128	0,614	
8	5,05	0,127	0,128	0,615	
9	5,05	0,129	0,130	0,609	
10	5,04	0,130	0,131	0,607	
11	5,04	0,132	0,133	0,601	
12	5,03	0,139	0,140	0,581	

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr.	z	δ	Δ	x	Mittelwert x
13	5,01	0,135	0,136	0,594	
14	5,00	0,140	0,141	0,580	
15	4,97	0,136	0,137	0,594	
16	4,94	0,137	0,138	0,594	$x = 0{,}590$
17	4,92	0,143	0,144	0,578	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0187$
18	4,91	0,145	0,146	0,573	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0032$
19	4,88	0,136	0,137	0,602	
20	4,85	0,138	0,139	0,599	
21	4,84	0,152	0,153	0,559	
22	4,76	0,152	0,153	0,567	
23	4,73	0,142	0,143	0,597	
24	4,70	0,153	0,154	0,569	
25	4,66	0,151	0,152	0,578	
26	4,64	0,153	0,154	0,575	
27	4,60	0,155	0,156	0,573	
28	4,60	0,147	0,148	0,594	
29	4,52	0,160	0,161	0,567	
30	4,51	0,157	0,158	0,576	
31	4,49	0,161	0,162	0,567	
32	4,47	0,161	0,162	0,569	
33	4,45	0,162	0,163	0,568	
34	4,35	0,166	0,167	0,568	
35	4,21	0,156	0,157	0,606	

Tabelle II.

$\lambda = 535\ \mu\mu$.

Nr.	z	δ	Δ	x	Mittelwert x
			1. Reihe. $b = 1{,}018^{\mathrm{P}}$		
1	5,84	0,127	0,125	0,630	
2	5,78	0,135	0,133	0,610	
3	5,74	0,145	0,142	0,587	
4	5,73	0,143	0,140	0,594	
5	5,40	0,163	0,160	0,563	
6	5,31	0,147	0,144	0,613	
7	5,28	0,168	0,165	0,559	$x = 0{,}576$
8	5,12	0,159	0,156	0,595	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0318$
9	5,10	0,185	0,182	0,530	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0082$
10	5,10	0,158	0,155	0,600	
11	5,09	0,179	0,176	0,547	
12	5,09	0,174	0,171	0,560	
13	4,96	0,174	0,171	0,570	
14	4,95	0,195	0,192	0,519	
15	4,89	0,182	0,179	0,557	

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	x	δ	Δ	x	Mittelwert x
			2. Reihe.	$b = 1{,}153^p$	
1	8,52	0,100	0,087	0,624	
2	6,56	0,139	0,121	0,598	
3	6,48	0,144	0,125	0,590	
4	6,19	0,156	0,136	0,574	
5	6,07	0,154	0,134	0,588	
6	5,99	0,154	0,134	0.594	
7	5,92	0,157	0,137	0,589	
8	5,74	0,176	0,153	0,556	
9	5,60	0,164	0,143	0,594	
10	5,53	0,185	0,160	0,552	$x = 0{,}564$
11	5,50	0,194	0,168	0,532	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0292$
12	5,48	0,196	0,170	0,529	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0065$
13	5,39	0,199	0,173	0,528	
14	5,39	0,200	0,173	0,528	
15	5,36	0,193	0,167	0,547	
16	5,30	0,199	0,173	0,536	
17	5,27	0,195	0,169	0,549	
18	5,26	0,199	0,173	0,540	
19	5,12	0,202	0,175	0,547	
20	4,56	0,207	0,180	0,584	
			3. Reihe.	$b = 1{,}013^p$	
1	5,85	0,142	0,140	0,585	
2	5,60	0,149	0,147	0,583	
3	5,54	0,140	0,138	0,613	
4	5,26	0,166	0,164	0,563	$x = 0{,}583$
5	5,22	0,154	0,152	0,595	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0182$
6	5,21	0,158	0,156	0,588	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0061$
7	4,99	0,170	0,168	0,576	
8	4,91	0,167	0,165	0,590	
9	4,63	0,194	0,192	0,550	
			4. Reihe.	$b = 1{,}242^p$	
1	5,86	0,165	0,133	0,605	
2	5,40	0,193	0,156	0,574	
3	5,29	0,193	0,156	0,582	
4	5,17	0,204	0,164	0,571	
5	5,10	0,179	0,151	0,610	
6	4,93	0,204	0,164	0,591	
7	4,88	0,200	0,161	0,602	$x = 0{,}588$
8	4,86	0,201	0,162	0,601	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0166$
9	4,83	0,206	0,166	0,594	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0044$
10	4,83	0,213	0,172	0,579	
11	4,82	0,205	0,165	0,597	
12	4,59	0,214	0,172	0,600	
13	4,45	0,241	0,194	0,562	
14	4,37	0,248	0,200	0,558	

Als Mittelwerte der x ergeben sich aus den einzelnen Messungsreihen die folgenden Werte:

	x_{625}	x_{535}
1. Reihe	0,596 ± 0,0066 (m F.)	0,576 ± 0,0082 (m. F.)
2. „	0,592 ± 0,0050	0,564 ± 0,0065
3. „	0,586 ± 0,0052	0,583 ± 0,0061
4. „	0,590 ± 0,0032	0,588 ± 0,0044

Bei dieser Mittelbildung sind, wie es in der Harreßschen Dissertation geschieht, die verschiedenen Resultate für x in je einer Versuchsreihe als von gleicher Zuverlässigkeit angenommen und haben daher alle das gleiche Gewicht erhalten. Nach der bei den Versuchen angewandten Methode sind aber die Messungen der Streifenverschiebung, d. h. die δ oder, was nahezu auf dasselbe hinauskommt, die Δ von gleicher Genauigkeit und daher mit gleichem Gewicht zu versehen, wie das in der Harzerschen Bearbeitung der Harreßschen Versuche geschehen ist.

Stellt man, um dem gleichen Gewicht der Δ Rechnung zu tragen, die Beobachtungsgleichungen in der Form auf

$$\frac{x_{625}}{0{,}59004 \cdot z} - \frac{0{,}99627}{0{,}59004 \cdot z} + \Delta = 0 \text{ und } \frac{x_{535}}{0{,}50188 \cdot z} - \frac{0{,}99623}{0{,}50188 \cdot z} + \Delta = 0,$$

so erhält man aus den einzelnen Messungsreihen die von den obigen nur wenig abweichenden Werte:

	x_{625}	x_{535}
1. Reihe	0,595 ± 0,0040 (m. F.)	0,573 ± 0,0050 (m. F.)
2. „	0,594 ± 0,0031	0,560 ± 0,0036
3. „	0,585 ± 0,0029	0,581 ± 0,0038
4. „	0,589 ± 0,0018	0,587 ± 0,0030

Da die Abweichungen der aus den einzelnen Reihen hervorgehenden Werte von x zum Teil größer sind als die mittleren Fehler, so ist klar, daß bei den verschiedenen Versuchsreihen nicht nur zufällige Fehler im Spiel waren. Vereinigt man trotzdem die letzt hingeschriebenen Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate, indem man das Gewicht dem reziproken Wert des Quadrates des mittleren Fehlers proportional setzt, zu Endwerten, so findet man

$$x_{625} = 0{,}590 \pm 0{,}0013 \quad \text{und} \quad x_{535} = 0{,}577 \pm 0{,}0018,$$

wobei die angegebenen mittleren Fehler jedoch kaum Anspruch auf Beachtung erheben können.

Obwohl die für x_{625} und x_{535} gefundenen Werte ziemlich weit auseinander liegen, so ist durch die Versuche doch nicht als erwiesen anzusehen, daß der Wert der Mitführungskoeffizienten von der Wellenlänge des Lichtes abhängt; ist doch der Mitführungskoeffizient für rotes Licht in der dritten Versuchsreihe kleiner herausgekommen als der für grünes Licht in der vierten Versuchsreihe, während im allgemeinen das umgekehrte Verhältnis stattfindet. Der Theorie nach müßte aber der Mitführungskoeffizient für rotes Licht kleiner sein als der für grünes Licht, da die Formel $x = 1 - \frac{1}{n^2}$ für $n = 1{,}57167$ und $n = 1{,}57665$ die Werte liefert

$$x_{625} = 0{,}5952 \quad \text{und} \quad x_{535} = 0{,}5977.$$

Es haben bei den Harreßschen Versuchen offenbar manche Umstände eine nicht gar unbedeutende Unsicherheit des Resultates veranlaßt, weshalb eine Wiederholung der Versuche sehr erwünscht wäre. Gerade mit Rücksicht auf eine spätere Wiederholung sind im Vorstehenden die Erfahrungen, welche Harreß gemacht hat, und zwar auch die ungünstigen Erfahrungen, welche mit dieser und jener Anordnung gemacht wurden, ausführlich mitgeteilt worden. Auf die Notwendigkeit einer noch exakteren Konstruktion des Rotationsapparates deutet der von Harreß erwähnte Umstand hin, daß während der ersten Zeit der Untersuchung die Interferenzstreifen noch bei 1800 Umdrehungen des Apparates pro Minute gut zu sehen waren, bei den definitiven Messungen aber nicht über 750 Umdrehungen hinausgegangen werden konnte, und daß neue Justierung und stärkere Befestigung der Prismen keine Besserung brachte. Ferner macht Hr. v. Laue darauf aufmerksam, daß die Einzelwerte von x in Tab. I, Reihe 3 und 4, und in Tab. II, Reihe 1 und 2 anfangs, d. h. bei langsamerer Rotation des Apparates, über dem Mittelwert und gegen das Ende hin, bei schnellerer Rotation, unter dem Mittelwert liegen. Man darf wohl vermuten, daß die hier wirkende Fehlerquelle auch schon die ersten Messungen beeinflußt hat und das Resultat daher hat zu niedrig herauskommen lassen. — Eine weitere Fehlerursache war die Höhenänderung der Lichtquelle, infolge deren der Weg der Lichtstrahlen in den Prismen nicht dauernd derselbe war, d. h. nicht dauernd seine mittlere Lage beibehielt. Auch

wäre die Anwendung monochromatischen Lichtes, wenn ihm die genügende Intensität hätte erteilt werden können, sicherlich dem durch Filter hindurchgegangenen Licht vorzuziehen gewesen.

All diese Mängel fallen aber kaum der Methode zur Last, dürften vielmehr bei Wiederholung der Versuche zu vermeiden sein. Die Ergebnisse der Harreßschen Untersuchung können zu einer Wiederholung der Versuche nur ermutigen.

(Eingegangen 21. Januar 1920.)

2. *Zum Versuch von F. Harreß; von M. v. Laue.*

In der vorhergehenden Veröffentlichung berichtet Hr. Knopf über einen Versuch des verstorbenen Franz Harreß aus den Jahren 1909—1911, bei welchem mittels einer Interferenzerscheinung die Fortpflanzung des Lichts in einem sich drehenden Glaskörper beobachtet wird. Nahe verwandt ist ihm der von Sagnac[1]) 1913 veröffentlichte; der wesentliche Unterschied liegt darin, daß bei diesem der leere Raum Träger der Lichtfortpflanzung ist (genauer: Luft von Atmosphärendruck; doch unterscheidet sie sich optisch zu wenig vom leeren Raum, als daß es auf den Unterschied ankäme) und sich nur alle Spiegel und sonstige, den Lichtweg im Interferometer bestimmende Apparate mit drehen. Daß bei Sagnac auch noch die Lichtquelle und der Beobachtungsapparat für die Interferenzstreifen an der Drehung teilnehmen, während sie bei Harreß feststehen, bedingt keinen wesentlichen Unterschied. Die zur Interferenz kommenden Strahlen durchlaufen bei beiden Versuchen zwischen ihrer Trennung und Wiedervereinigung nur in Drehung befindliche Teile der Anordnung. Vor- und nachher erleiden beide Strahlen die gleichen Schicksale — das gilt sowohl bei Harreß wie bei Sagnac — und für die Interferenzerscheinung sind gemeinsame Schicksale bedeutungslos.

Beide Versuche beweisen zunächst, daß die optischen Vorgänge in einem sich gegen die Erde drehenden Bezugssystem anders verlaufen als in einem mit der Erde fest verbundenen; letzteres dürfen wir hier mit hinreichender Annäherung als ein berechtigtes System im Sinne der beschränkten Relativitätstheorie betrachten. Für mechanische Vorgänge liefert

1) G. Sagnac, Compt. rend. 157. S. 708 u. 1410. 1913; Journ. d. Phys. (5) 4. S. 177. 1914.

bekanntlich jeder Versuch über die Zentrifugalkraft den entsprechenden Beweis (Sagnacs Deutung seines Versuchs als eines Nachweises für das Dasein eines „Äthers" ist durchaus nicht zwingend). Daß dieser Unterschied zwischen den genannten Bezugssystemen nach der Auffassung der allgemeinen Relativitätstheorie kein ursprünglicher ist, sondern die Folge ihrer verschiedenen Bewegung gegen das Fixsternsystem, brauchen wir hier nicht in Betracht zu ziehen.

Schon 1911 habe ich die relativistische Theorie für den später von Sagnac ausgeführten Versuch gegeben[1]) und möchte hier den Harreßschen Versuch in die Theorie mit einbeziehen. Insofern es sich bei ihm um die Lichtausbreitung in bewegten Körpern handelt, liegt letzterer in nächster Nachbarschaft des alten Fizeauschen und des neuen Zeemanschen[2]) Interferenzversuchs. Wir möchten im folgenden den Zusammenhang dieser Versuche besonders hervorheben.

In die Rechnung, welche Harreß selbst seinem Versuche beigab, hatte sich ein Versehen eingeschlichen, welches die Versuchsergebnisse zunächst unverständlich machte. Harzer[3]) hat dies bemerkt und eine Berechnung veröffentlicht, deren Ergebnis im wesentlichen richtig ist und zusammen mit einer Notiz von Einstein[4]) die Harreßschen Messungen mit genügender Genauigkeit zu deuten vermag. Aber volle Befriedigung vermögen wir auch bei dieser Form der Theorie nicht zu empfinden. Zunächst — das ist zwar bei der bisherigen Genauigkeit des Harreßschen Versuches ohne praktische, wohl aber von grundsätzlicher Bedeutung — übersieht Harzer, daß auch die in Luft liegenden Teile des im Rotationsapparat zurückgelegten Lichtweges zum Phasenunterschied bei der Interferenz etwas beitragen. Sodann zieht Harzer mit vollem Recht in Betracht, daß im sich drehenden Körper sich der Lichtstrahl krümmen muß. Aber der Ansatz, aus welchem

---

1) M. Laue, Münch. Sitz.-Ber. 1911. S. 404. Vgl. auch H. Witte, Verh. d. D. Phys. Ges. 16. S. 142 u. 754. 1914.

2) P. Zeeman, Versl. Akademie Amsterdam 28. S. 1451. 1919; P. Zeeman u. A. Snethlage, ebenda 28. S. 1462. 1919.

3) P. Harzer, Astron. Nachr. 198. S. 378. 1914 u. 199. S. 10. 1914.

4) A. Einstein, Astron. Nachr. 199. S. 9 u. 47. 1914.

er seine Gestalt ermittelt[1]), ist unseres Erachtens nicht selbstverständlich, wenngleich er sich wohl aus der Relativitätstheorie beweisen läßt. Ebenso ist Harzer im Recht, wenn er das Spiegelungs- und Brechungsgesetz im Hinblick auf die Bewegung des Körpers verändert; ob sich aber die Art, wie er es tut, aus der Relativitätstheorie zu rechtfertigen ist, haben wir nicht zu entscheiden vermocht. Und schließlich — und das ist fast die Hauptsache — kann man sehr einfach zeigen, daß die Krümmung des Lichtstrahls und die Veränderungen bei der Spiegelung und Brechung, gleichgültig, wie man sie berechnet, für diesen Phasenunterschied nichts ausmachen, solange man sich, was selbstverständlich durchaus berechtigt ist, auf Glieder erster Ordnung in dem Verhältnis der Körper- zur Lichtgeschwindigkeit beschränkt. Das aber macht die Theorie sehr viel übersichtlicher.

Der Vollständigkeit wegen, und weil Einsteins Bemerkung den meisten Fachgenossen nicht ganz leicht zur Hand ist, geben wir in §§ 2 und 3 deren Inhalt wieder.

§ 1. Im Unterschiede gegen den Fizeauschen und den Zeemanschen Versuch pflanzt sich bei Harreß das Licht nicht in der Bewegungsrichtung des Körpers oder entgegengesetzt fort, sondern unter einem beliebigen Winkel. Ist dieser Winkel, bezogen auf das Ruhsystem des Körpers ϑ^0, hat die Geschwindigkeit des Körpers gegen das der Betrachtung zugrunde gelegte berechtigte Bezugssystem — hier also gegen die Erde — den Betrag q, und bedeuten, wie üblich, c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum und n^0 den Brechungsindex des Körpers, bezogen auf das Ruhsystem, so hat die Phasengeschwindigkeit des Lichts gegen das genannte Bezugssystem nach der Relativitätstheorie den Betrag[2])

$$V = c\,\frac{c + q\,n^0 \cos\vartheta^0}{\sqrt{(q + c\,n^0\cos\vartheta^0)^2 + n^{0\,2}(c^2 - q^2)\sin^2\vartheta^0}}\,.$$

Wir vernachlässigen im folgenden stets alle Glieder zweiter und höherer Ordnung in q/c, und können dann schreiben

1) Wir meinen Harzers Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = -\omega k y, \qquad \frac{dy}{dt} = v + \omega k x$$

auf S. 379 a. a. O.

2) Vgl. M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, Gl. (257).

(1) $$V = \frac{c}{n^0} + q\cos\vartheta\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

wobei wir den Winkel ϑ auf das System beziehen, gegen welches sich der Körper mit der Geschwindigkeit q bewegt. Gleichung (1) beweist, daß zu dem Wert c/n^0, der im Falle der Ruhe gälte, die Komponente der Körpergeschwindigkeit nach der Strahlrichtung[1]) multipliziert mit dem Mitführungskoeffizienten $(1 - 1/n^2)$ hinzutritt.

Die Transformationsformel für die Schwingungszahl vom Ruhesystem auf das gegen die Erde feste lautet streng

$$\nu = \nu^0 \frac{c + q n^0 \cos\vartheta^0}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

also bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung

(1a) $$\nu = \nu^0\left(1 + \frac{q n}{c}\cos\vartheta\right).$$

§ 2. Beim Fizeauschen Interferenzversuch durchläuft das Licht eine *feststehende* Röhre von der Länge l, in welcher Wasser mit der Geschwindigkeit q in der Strahlrichtung oder ihr entgegen strömt. Die Zeit, welche der im Sinne der Strömung laufende Strahl zur Durchlaufung der Röhre braucht, ist nach (1)

(2) $$t_+ = l : \left[\frac{c}{n^0} + q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{l n^0}{c}\left[1 - \frac{q n}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Nun ist aber die relative Schwingungszahl ν^0 des Lichtes gegen das Wasser eine andere, als die gegen das an der Erde feste Bezugssystem, ν. Da der Übertritt des Lichts in und aus dem Wasser an *feststehenden* Flächen vor sich geht[2]), bleibt nämlich auch während der Fortpflanzung im Wasser

---

1) Genauer genommen handelt es sich um die Richtung der Wellennormale. Da der Richtungsunterschied zwischen beiden aber selbst von der ersten Ordnung klein ist, spielt das hier keine Rolle. Harreß begründet in seiner Dissertation Gl. (1) aus dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeit, das jedoch bekanntlich nicht für die Phasengeschwindigkeit der Lichtwellen gilt.

2) Natürlich beginnt die Wasserströmung nicht unmittelbar hinter den Platten, durch welche das Licht ein- und austritt, sondern das Licht gelangt erst allmählich in das Gebiet der vollen Geschwindigkeit q. Da aber die Strömung stationär ist, der Ort jeder Geschwindigkeitsänderung längs des Strahlenganges also feststeht, so bleibt die im Text angestellte Überlegung dennoch richtig.

die Schwingungszahl gegen das genannte Bezugssystem erhalten. Infolgedessen wird nach (1a)

$$\nu^0 = \nu\left(1 - \frac{qn}{c}\right),$$

und der in (2) einzusetzende Brechungsindex n^0 ist aus dem Brechungsindex n des ruhenden Wassers für die Schwingungszahl ν zu berechnen nach der Formel

$$n^0 = n\left(1 - \frac{q\nu}{c}\,\frac{dn}{d\nu}\right).$$

Setzen wir diesen Wert in (2) ein, so finden wir mit H. A. Lorentz[1]):

$$t_+ = \frac{ln}{c}\left[1 - \frac{qn}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\,\frac{dn}{d\nu}\right)\right]. \tag{3}$$

Für den zwischen den Durchlaufszeiten beider Strahlen bestehenden Unterschied folgt daraus:

$$t_+ - t_- = \tau = -\frac{2lqn^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\,\frac{dn}{d\nu}\right). \tag{4}$$

Dies ist die Formel, welche Fizeau, Michelson und Morley und schließlich mit einer Genauigkeit von einigen Tausendsteln Zeeman bestätigt haben.[2])

§ 3. Beim Zeemanschen Versuch ist die feststehende Röhre mit dem strömenden Wasser ersetzt durch einen Körper, welcher sich als Ganzes mit der Geschwindigkeit q in der Richtung des einen Strahls und dem anderen entgegen bewegt. Um zu berechnen, wie die Durchlaufszeit für den ersteren Strahl durch die Geschwindigkeit q beeinflußt wird, führen wir zweckmäßig den Begriff der Relativgeschwindigkeit des Lichts gegen den Körper ein, diese bezogen auf das an der Erde feste Bezugssystem. Sie beträgt nach (1), da $\cos\vartheta = 1$ zu setzen ist:

$$V - q = \frac{c}{n^0} - \frac{q}{n^2}. \tag{5}$$

Denn für zwei Geschwindigkeiten, welche sich auf das gleiche System beziehen, gilt auch nach der Relativitätstheorie die

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895, S. 101 ff.

2) A. A. Michelson u. E. W. Morley, American Journ. of science 31. S. 377. 1886; P. Zeeman, Verslagen Akadem. Amsterdam 23. S. 245. 1914; 24. S. 18. 1915.

gewöhnliche Vektoraddition; beim Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist es gerade wesentlich, daß die zu addierenden Geschwindigkeiten sich auf verschiedene Systeme beziehen. Die Zeit, in der dieser Strahl die Strecke l im Körper durchläuft, ist demnach

$$T_+ = \frac{l}{V - q}.$$

Nun ist aber noch zu bedenken, daß das Licht, wenn es wie beim Zeemanschen Versuch, durch zwei zur Strecke l senkrechte Endflächen ein- und austritt, infolge der Bewegung eine kürzere Strecke in Luft zurücklegt, als wenn der Körper ruht. Denn während der Zeit T_+ verschiebt sich der Körper um die Strecke $T_+ \cdot q$. Bezeichnen wir also mit L den Abstand der beiden dem bewegten Körper nächsten *feststehenden* Teile der Versuchsanordnung, so braucht der genannte Strahl, um von dem einen dieser Teile zum anderen zu kommen, die Zeit

$$(6) \quad \begin{cases} t_+ = T_+ + \frac{1}{c}\left(L - (l + T_+ q)\right) \\ \qquad = \frac{1}{c}(L - l) + \frac{l}{c}\left(n^0 + \frac{q}{c}(1 - n)\right). \end{cases}$$

Auch hier ist die Schwingungszahl in dem mit dem Körper verbundenen Bezugssystem eine andere als in dem erdfesten. Und zwar bleibt diesmal beim Ein- und Austritt des Lichts die Schwingungszahl zu ersterem erhalten, weil die Flächen, an denen dies geschieht, die Bewegung des Körpers teilen. In (1a) ist diesmal $n = 1$ zu setzen, wenn wir für das im leeren Raum fortschreitende Licht ν^0 aus ν berechnen wollen; also:

$$\nu^0 = \nu\left(1 - \frac{q}{c}\right), \qquad n^0 = n - \frac{\nu q}{c} \cdot \frac{dn}{d\nu}.$$

Setzt man dies in (6) ein, so folgt:

$$t_+ = \frac{1}{c}\left(L - l(1 - n_0)\right) + \frac{lq}{c^2}\left(1 - n - \nu\frac{dn}{d\nu}\right).$$

Der Zeitunterschied für beide Strahlen ist danach

$$(7) \quad \tau = t_+ - t_- = \frac{2lq}{c^2}\left(1 - n - \nu\frac{dn}{d\nu}\right).$$

Dies ist die von Einstein, Zeeman und H. A. Lorentz[1]) aufgestellte und von Zeeman auch im wesentlichen betätigte Formel.

Wir kommen nun dem Harreßschen Versuch schon ganz nahe, wenn wir den Zeemanschen Versuch gemäß Fig. 1 abgeändert denken. Bei ihr tritt das Licht nicht durch zwei zur Geschwindigkeit senkrechte Flächen ein und aus, sondern dies geschieht an zwei zur Geschwindigkeit parallelen. Der von A kommende Strahl wird nach seinem Eintritt bei B an einer der Endflächen des Körpers nach C und dort an der anderen Endfläche nach D gespiegelt. Schreiben wir hier dem Körper wieder die Länge $l\,(=BC)$ zu und die Breite b, so braucht der im Sinne der Bewegung laufende Strahl in ihm die Zeit

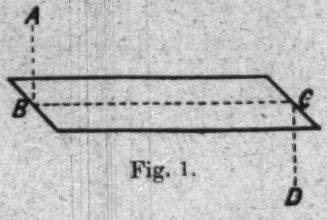


Fig. 1.

$$t_+ = \frac{l}{V-q} + \frac{bn^0}{c} = \frac{ln^0}{c}\left(1+\frac{q}{nc}\right) + \frac{bn^0}{c}\,. \tag{8}$$

Die Strecke, welche er in Luft zurückzulegen hat, wird durch die Bewegung nicht verändert. Ferner bleibt die Schwingungszahl ν^0, die sich auf das mitbewegte System bezieht, bei den Spiegelungs- und Brechungsvorgängen an den *mitbewegten* End- und Grenzflächen des Körpers erhalten. Da ferner vor dem Ein- und nach dem Austritt die Strahlrichtung zur Geschwindigkeit q senkrecht ist[2]), stimmen nach (1a) ν und ν^0 hier überein. Somit ist überhaupt $\nu^0 = \nu$, $n^0 = n$ zu setzen und wir finden nach (8)

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2lq}{c^2}\,. \tag{8a}$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen (4) und (7) ist hier der Brechungsindex ganz herausgefallen. Auch hat τ und damit die Streifenverschiebung das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie beim Fizeauschen Versuch. Dort beschleunigt

1) Vgl. die angeführte Arbeit von Zeeman und Snethlage.

2) Das gilt nur für das Ruhesystem streng; in dem erdfesten System weicht die Strahlrichtung wegen der Aberration um einen kleinen Winkel erster Ordnung davon ab. Doch braucht das in (1a) wegen unserer Beschränkung auf Größen erster Ordnung nicht berücksichtigt zu werden.

nämlich die Mitführung den mit der Bewegung der Materie laufenden Strahl, so daß er die feststehende Strecke l in kürzerer Zeit zurücklegt als im Ruhefall. Hier hingegen laufen alle Teile des Apparates vor dem genannten Strahl fort, und dadurch wird jene Verkürzung aufgehoben und sogar ins Gegenteil verkehrt.

Den tiefsten Grund für die Unabhängigkeit des Zeitunterschieds vom Brechungsindex zeigt aber die Lorentz-Transformation. Ein Glasstab ruhe im Bezugssystem K', seine Endflächen mögen die Gleichungen $x' = 0$ und $x' = 1$ haben. Zur Zeit $t' = -n^0 l : c$ entsenden wir von jeder dieser Flächen eine bestimmte Phase einer sinusförmigen Lichtwelle nach der gegenüberliegenden Fläche. Beide Phasen erreichen ihr Ziel zur Zeit $t' = 0$. Nun beziehen wir diesen Vorgang auf ein System K, gegen welches K' die Geschwindigkeit q in der positiven x'-Richtung hat. Die Transformationsgleichung für die Zeit lautet:

$$t = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left(t' + \frac{q x'}{c^2} \right) .$$

Nur der zweite Summand im Zähler bedingt hier die Zeitdifferenz τ. Für den in der positiven x'-Richtung laufenden Strahl sind nämlich Abgangs- und Ankunftszeit der betrachteten Phase, bezogen auf K

$$-\frac{n^0 l}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \text{und} \quad \frac{q l}{c\sqrt{c^2 - q^2}} .$$

Die Durchlaufungszeit ist die Differenz davon, also in Gliedern erster Ordnung

$$t_+ = \left(n^0 + \frac{q}{c} \right) \frac{l}{c} .$$

Die Zeit, welche das Licht in Fig. 1 für die zu BC senkrechten Wege braucht, wird durch die Transformation nicht in Gliedern erster Ordnung verändert. Stimmen also in beiden Strahlen die relativen Schwingungszahlen überein, so schließen wir aus dem letzten Ausdruck:

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2 l q}{c^2} .$$

§ 4. Der Harreßsche Versuch unterscheidet sich von dem in Fig. 1 beschriebenen nur dadurch, daß die rein trans-

latorische Geschwindigkeit der Glaskörper durch eine Drehung ersetzt ist. Technische Gründe haben zu dieser Änderung geführt. Für die Theorie bedeutet sie eine gewisse Erschwerung, weil mit der Drehung Beschleunigungen verbunden sind. Man weiß aber wohl noch nicht sicher, wie diese auf die optischen Vorgänge in der Materie wirken. Die allgemeine Relativitätstheorie wäre freilich zu Aussagen darüber imstande und wir wollen zunächst zeigen, daß sie keine bemerkbaren Beschleunigungseinflüsse erwarten läßt. Die vorkommenden Zentrifugalkräfte sind nämlich der Größenordnung nach höchstens 10 bis 100 mal so groß wie die Erdanziehung auf denselben Körper. Da nun die Schwerebeschleunigung selbst an weit mächtigeren Himmelskörpern, als es die Erde ist, keinen für die hier zu erreichende Genauigkeit bemerkbaren Einfluß auf die optischen Vorgänge ausübt, so ist auch beim Harreßschen Versuch kein solcher zu erwarten.[1])

Nun braucht man ja freilich Aussagen der allgemeinen Relativitätstheorie noch nicht für unbedingt richtig zu halten. Dann aber fehlt uns jeder Anhalt über die Wirkung der Beschleunigungen und man muß mangels eines Besseren zunächst so rechnen, als gäbe es keine. (Dies tut auch Harzer a. a. O.) Übrigens kämen solche Wirkungen, sofern sie die Bahn des Lichtstrahls beeinflussen, für den zu berechnenden Phasenunterschied nicht in Frage. Nur wenn sie den absoluten Wert der Lichtgeschwindigkeit beträfen, könnten sie, wie sogleich zu beweisen ist, etwas ausmachen.

Wir beginnen nun mit dem angekündigten Beweis, daß alle durch die Drehung hervorgerufenen Änderungen des Strahlenganges relativ zum Apparat für die Interferenzerscheinung in den Gliedern erster Ordnung nichts ausmachen. Wir denken uns den Apparat zunächst in Ruhe und betrachten einen Strahl, welcher vom Punkte P der Trennungsplatte im Sinne der späteren Drehung umlaufend zum Punkte Q dieser Platte gelangt. Sein Weg besteht aus einer Reihe gerader Strecken; die Länge irgendeiner davon bezeichnen wir mit l. $\sum \frac{l}{V} = \sum \frac{ln}{c}$ ist die Zeit, welche er zur Zurücklegung des

1) Diese Bemerkung verdanke ich einem Gespräche mit Hrn. W. Wien.

geschilderten Weges braucht. Auch bei einer Drehung des Apparates gibt es einen Strahl, welcher im Sinne der Drehung umlaufend von dem mitbewegten Punkte P zu dem ebenfalls mitbewegten Punkte Q gelangt. Die Drehung bewirkt einmal eine Veränderung der Relativgeschwindigkeiten V, mit welchen die Strecken l durchlaufen werden (wir rechnen hier vorbehaltlich des Beweises so, als ob auf jeder Strecke lV konstant bliebe), sodann aber infolge der Verlagerung des relativen Strahlenganges Änderungen der Strecken l selbst. Die Gesamtänderung der Durchlaufungszeit beträgt:

$$\sum \delta\left(\frac{1}{V}\right)\cdot l + \sum \frac{n\,\delta l}{c}\,.$$

Hierin ist nun das zweite Glied nach dem Fermatschen Satze vom ausgezeichneten Lichtweg klein von der zweiten Ordnung; denn die Veränderungen δl sind höchstens von der Ordnung q/c. Und damit ist der Beweis geliefert; er gilt unabhängig davon, wie man die Veränderungen δl berechnet.

Nun liegt zwar der weitere Einwand nahe: Die betrachteten Strahlen haben in P und Q verschiedene Richtungen. Für einen auf Unendlich eingestellten Beobachtungsapparat, in dessen Brennebene die Interferenzen erscheinen, sind sie also nicht gleichwertig.[1]) Damit überschreitet man aber den Geltungsbereich der geometrischen Optik. Die in Rede stehenden Richtungsunterschiede sind von der ersten Ordnung in q/c. Für den Rand des Harreßschen Apparates ist q stets kleiner als $2 \cdot 10^3$ cm/sec^{-1}, ein Wert, der etwa 1000 Umdrehungen in der Minute entspräche. Infolgedessen ist der Winkel zwischen beiden Strahlen von der Größenordnung 10^{-7}. Die ausgenutzte Öffnung des Beobachtungsapparates war sicherlich in einem Quadrat von 3,6 cm Seitenlänge enthalten. Denn nach S. 22 der Harreßschen Arbeit sind die Austrittsflächen der Prismen für das Licht solche Quadrate. Der Beobachtungsapparat kann also nur Winkel auflösen, welche von der Größenordnung 10^{-5} oder größer sind. Die hier in Frage kommenden liegen aber, wie gezeigt, wesentlich unter dieser Grenze.

1) Harreß erklärt die Interferenzerscheinung für Planparallelitätsringe. Es muß dahingestellt bleiben, ob er nicht tatsächlich eine andere Interferenzerscheinung eingestellt hatte.

Wir schließen daraus, daß Verlagerungen des relativen Lichtweges für die Berechnung von τ nicht zu berücksichtigen sind.[1])

§ 5. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir zunächst fest: 1. Nach Gleichung (1a) kommt es für die absolute Phasengeschwindigkeit V des Lichts gegen das an der Erde feste Bezugssystem nicht auf die zur Strahlrichtung senkrechte Komponente der Körpergeschwindigkeit an, sondern nur auf die dazu parallele. 2. Hat eine Gerade l den kleinsten Abstand r von der Drehungsachse und bildet ihre Richtung mit dieser den

---

1) Für § 4 liefert uns Hr. Harzer eine erfreuliche Bestätigung in dem folgenden Absatz seiner Arbeit:

„Nimmt man mit Hrn. Harreß an, daß die Strahlen im rotierenden Mittel die geradlinige Gestalt behielten, die sie im ruhenden Mittel haben, und schreibt man dementsprechend die durch die Rotation bewirkte Veränderung nur der durch die Mitführung entstehenden Veränderung der relativen Geschwindigkeit auf den unveränderten Wegen zu, so entsteht die Formel

$$\delta\varphi = \lambda(1-k)\,\omega\,\frac{\Sigma p\,q}{\lambda\,v},$$

die sich inhaltlich von der Formel, die Hr. Harreß auf S. 59 gibt, nur durch die Vertauschung von k mit $1-k$ unterscheidet. . . .

Es war in Hinblick auf den idealen Fall, den der Apparat nach Möglichkeit zu realisieren strebt, eine gewisse Ähnlichkeit dieser Zahlen mit den für den wirklichen Fall geltenden von vornherein zu erwarten; daß sich aber die Annahme über die unveränderliche Gestalt der Strahlen, die für die einzelnen Wege zwischen zwei optisch wirkenden Flächen ganz unzutreffend ist, für die Gesamtheit der Wege mit dem alle Stellen der Rechnung umfassenden hohen Grade der Annäherung als zulässig erweist, ist sehr überraschend. Eine auf einer analytischen Untersuchung beruhende Erklärung dieser nahen Übereinstimmung habe ich nicht gefunden; ich muß sie deshalb in der unbestimmten Bedeutung des Wortes als zufällig bezeichnen."

Soweit Hr. Harzer. Wir haben nur noch die Vermutung hinzuzufügen, daß er auch in seiner Formel, nicht nur bei der Zahlenrechnung, den Einfluß der Krümmung hätte verschwinden sehen, wenn er auch die schon erwähnten Luftstrecken mitberücksichtigt hätte. Die von ihm genannte Gleichung ist, abgesehen von diesem Unterschied, mit unserer Formel (11) gleichlautend. Denn es bedeuten p und q die Strecken l und r, es ist $v = c/n$ und $k = l - n^{-2}$; die von uns berechnete Zeitdifferenz τ ist aber gleich $\delta\varphi\,\frac{\lambda}{v}$. Schließlich ist bei Hrn. Harzer stets $\sin\Theta = 1$.

Winkel Θ, so ist in jedem ihrer Punkte die Komponente der Körpergeschwindigkeit nach ihrer Richtung gleich $\omega r \sin\Theta$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Beweis: Wir wählen die Drehungsachse als z-Achse, den kürzesten Abstand r als y-Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes Die Gerade l hat dann die Gleichungen $y = r$, $x : z = \operatorname{tg}\Theta$. Die Geschwindigkeit q aber hat in irgendeinem Punkte der Geraden die Komponenten $q_x = \omega r$, $q_z = 0$. Daraus schließen wir auf den Winkel zwischen l und q: $\cos(l\,q) = \frac{q_x}{q}\sin\Theta$, also $q\cos(l\,q) = \omega r \sin\Theta$. Die Phasengeschwindigkeit des Lichts gegen das erdfeste Bezugssystem ist infolgedessen nach (1):

$$V = \frac{c}{n^0} + \omega r \sin\Theta\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{9}$$

Von größter Wichtigkeit ist nun die Frage nach der Schwingungszahl ν^0 des Lichts gegen den Glaskörper, da von ihm, wie schon in den oben besprochenen Fällen, der Brechungsindex n^0 abhängt. Wir fragen zuerst: Ändert sich die relative Schwingungszahl, während das Licht von einer Spiegelungsstelle zur anderen fortschreitet? Die Antwort lautet: Nein. Denn bei diesem Vorgang bleibt die Schwingungszahl ν zum erdfesten Bezugssystem jedenfalls erhalten; bestände zwischen zwei raumfesten Punkten ein Unterschied der Schwingungszahlen, so bedeutete das ja eine dauernd wachsende Phasenverschiebung der Schwingungen in ihnen, welche nicht möglich ist. Da aber auf der ganzen geradlinigen Strahlenbahn die Komponente $q\cos\vartheta$ denselben Wert hat, so bleibt nach (1a) auch ν^0 erhalten. Freilich ist der Strahl nicht genau geradlinig; jedenfalls sind aber die vorkommenden Richtungsänderungen klein von der ersten Ordnung in q/c, kommen also in dem zweiten Gliede von (1a), das selbst zu q/c proportional ist, nicht in Betracht. Die Spiegelungen und Brechungen geschehen alle an mitbewegten Flächen, lassen somit auch die relative Schwingungszahl ν^0 ungeändert. Schließlich hat das Licht unmittelbar vor seinem Eintritt und nach seinem Austritt aus den beweglichen Teilen der Versuchsanordnung eine Richtung senkrecht zu der dort herrschenden Geschwindigkeit, so daß hier die relative und die absolute Schwingungszahl ν^0 und ν übereinstimmen. *Somit ist überall im Interferometer* $\nu^0 = \nu$

und $n^0 = n$, wobei unter n der ohne Rücksicht auf die Bewegung zu berechnende Brechungsindex der Glaskörper zu verstehen ist.

§ 6. Die Berechnung des Zeitunterschieds τ können wir nun leicht durchführen. Dividieren wir jede Teilstrecke l des relativen Strahlengangs durch die zugehörige Relativgeschwindigkeit, welche für den mit der Drehung umlaufenden Strahl nach (9) den Betrag

$$V - q\cos(q\,l) = V - \omega r \sin\Theta = \frac{c}{n} - \frac{\omega r}{n^2}\sin\Theta$$

hat, so finden wir für die Zeit, welche dieser Strahl von der Trennung bis zur Wiedervereinigung mit dem anderen braucht:

$$t_+ = \sum \frac{l n}{c} + \frac{\omega}{c^2}\sum r\,l \sin\Theta. \tag{10}$$

Für den Zeitunterschied folgt daraus:

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2\omega}{c^2}\sum r\,l\sin\Theta. \tag{11}$$

Darauf, daß die über alle Teile des Strahls, auch die in Luft liegenden, zu erstreckende Summe auch negative Glieder enthält, macht Hr. Knopf auf S. 440 aufmerksam.

Dieser Zeitunterschied hat eine doppelte Ursache. Einmal nämlich die Mitführung des Lichts durch bewegte Körper, sodann aber die Tatsache, daß jeder Teil des Apparates bei der Drehung vor dem einen Strahl fortläuft, dem anderen aber entgegenkommt. Beide Ursachen zusammen ergeben nach (11) eine vom Brechungsindex unabhängige, somit für alle Körper übereinstimmende Zeitdifferenz. Selbst wenn man, wie Sagnac, den leeren Raum zum Träger der Lichtausbreitung wählt, so daß jede Mitführung fortfällt, bringt die zweite, rein geometrische Ursache noch die gleiche Streifenverschiebung hervor. Harreß hatte in seiner Dissertation nur die erste Ursache in Rechnung gesetzt.

Läßt man den Wert des Mitführungskoeffizienten zunächst unbestimmt (Bezeichnung: x) und setzt man dementsprechend nach (9):

$$V = \frac{c}{n} + x \cdot \omega r \sin\Theta,$$

so findet man statt (11) die entsprechende Formel in der Schreibweise von Hrn. Knopf:

$$\tau = \frac{2\omega}{c^2} \sum [n^2(1-x) \sin\Theta\, r\, l].$$

$l \sin\Theta$ ist die Projektion eines Teils des Strahls, wie er im Ruhefall verläuft, auf eine zur Drehungsachse senkrechte Ebene. $\frac{1}{2} l r \sin\Theta$ ist somit die Dreiecksfläche, welche durch diese Projektion und die geraden Verbindungen ihrer Endpunkte mit dem Durchstoßpunkt der Achse durch die Ebene begrenzt ist. Der Mittelstrahl kehrt zu seinem Ausgangspunkt zurück; für ihn ist $\frac{1}{2} \sum r l \sin\Theta = F$ die von seiner Projektion umschlossene Fläche. Somit läßt sich Gleichung (11) an die früher beim Sagnacschen Versuch gewählte Form schreiben:

$$\tau = \frac{4\omega F}{c^2}.$$

§ 7. Zum Schluß müssen wir noch untersuchen, wie die Breite des zur Interferenz benutzten Strahlenbündels die Erscheinung beeinflußt. Es liegt hier nämlich der ganz ungewöhnliche Fall vor, daß in den beiden Scharen paralleler Strahlen, welche das Fernrohr in einem Punkt vereinigt, der Zeitunterschied τ zwischen je zwei sich entsprechenden schon erheblich veränderlich ist. Darauf hat schon Harreß hingewiesen; er sowohl wie Hr. Knopf geben für die Zeitdifferenz, berechnet für einen zum Mittelstrahl der Fig. 1 bei Harreß parallelen Strahl, dessen Abstand vom Mittelstrahl aber die zur Drehachse senkrechte Komponente δ hat, eine Formel

$$\tau = \tau_0 - f(\delta). \tag{12}$$

τ_0 bedeutet hier den Wert von τ für den Mittelstrahl, f ist eine positive Funktion zweiten Grades, deren Wert in der vorhergehenden Arbeit geometrisch ermittelt ist. Nach Harreß beträgt das zweite Glied für den durchaus möglichen Wert von einem cm für δ 3 Proz. von τ_0.

Unter diesen Umständen genügt es nicht, für die Lichtschwingung im Vereinigungspunkt aller dieser Strahlen den Ansatz

$$e^{i\nu\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right)} + e^{i\nu\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)}$$

zu machen, sondern man muß dafür setzen:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\delta_{\max}} \left[e^{i\nu\left(t+\frac{\tau}{2}\right)} + e^{i\nu\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} \right] d\delta \\
&\qquad = 2 e^{i\nu t} \left[\cos\frac{\nu\tau_0}{2} \int_0^{\delta_{\max}} \cos\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right) d\delta \right. \\
&\qquad \left. + \sin\frac{\nu\tau_0}{2} \int_0^{\delta_{\max}} \sin\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right) d\delta \right].
\end{aligned} \tag{13}
$$

Solange

$$\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right)^2 \ll 1 \tag{14}$$

ist, kann man unter den Integralzeichen den Cosinus mit Eins, den Sinus mit seinem Argument vertauschen und findet dann als Ausdruck für die Schwingung:

$$2\delta_{\max} e^{i\nu t} \left[\cos\frac{\nu\tau_0}{2} + \frac{\nu}{2} \bar{f} \cdot \sin\frac{\nu\tau_0}{2} \right] = 2\delta_{\max} e^{i\nu t} \cos\frac{\nu}{2}(\tau_0 - \bar{f}).$$

$\bar{f}$ ist dabei der Mittelwert von f, gebildet über alle vorkommenden δ. Es ist dann also ganz so, als wäre die Zeitdifferenz τ innerhalb der betrachteten Strahlengesamtheit unveränderlich, hätte aber den über diese Gesamtheit gebildeten Mittelwert.

Ist Bedingung (14) nicht mehr erfüllt, so treten in (13) Fresnelsche Integrale auf, da $f(\delta)$ eine quadratische Funktion ist. Dann ist die Streifenverschiebung nicht mehr proportional zu ω, sondern hängt in weniger einfacher Weise davon ab. Man darf hierin keinen Widerspruch dagegen sehen, daß wir sonst immer nur zu ω proportionale Summanden berücksichtigt haben. Für die Berechnung der Zeitunterschiede τ sind nach wie vor quadratische und höhere Glieder vernachlässigt. Aber die obige Rechnung zeigt eben, daß man bei hinreichender Breite des Strahlenbündels trotzdem eine zu ω nicht mehr proportionale Streifenverschiebung beobachtet.

§ 8. Was kann uns nun der Harreßsche Versuch, wenn er erst bis zu der ganzen erreichbaren Vollendung durchgeführt ist, lehren? Harreß selbst und Hr. Knopf berechnen aus ihm den Mitführungskoeffizienten des Glases und prüfen, wie

weit der gemessene Wert mit der Fresnelschen Formel dafür übereinstimmt. Wir haben hier die Theorie so geformt, daß der Versuch als ein Ersatz für den in Fig. 1 dargestellten erscheint und letzterem eigentlich als Zweck die Bestätigung der Umrechnungsformel für die Zeit in der Lorentz-Transformation zugeschrieben. Doch besteht natürlich zwischen diesen Auffassungen kein Widerspruch. Die Optik der ohne Beschleunigung bewegten Körper ist eine so einheitliche und in sich verflochtene Theorie, daß man sie nur als Ganzes bestätigen oder widerlegen kann. Jede Bestätigung irgendeiner ihrer Aussagen kommt immer dem Ganzen zugute.

Voraussetzung der Theorie ist bisher, daß die mit der Drehung verbundenen Beschleunigungen die Lichtgeschwindigkeit in keiner wahrnehmbaren Weise beeinflussen. Die allgemeine Relativitätstheorie stützt diese Annahme. Ob sie zutrifft, kann nur die sehr wünschenswerte Wiederholung des Versuchs zeigen.

Berlin, Dezember 1919.

(Eingegangen 21. Januar 1920.)

3. *Die Aufrechterhaltung der negativen Erdladung, das Grundproblem der luftelektrischen Forschung;* *von R. Seeliger.*

Die luftelektrische Forschung steht zurzeit einem wesentlichen Teil der Lösung ihres Grundproblems, der Frage nach dem Elektrizitätshaushalt der Atmosphäre, ratlos gegenüber; jedenfalls gewinnt man aus der Literatur[1]) den Eindruck, daß trotz aller Bemühungen eine befriedigende Einsicht in die Sachlage hier noch nicht erreicht ist. Dies kann nun offenbar dreierlei Gründe haben: 1. Kann das bis jetzt zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial unvollständig oder ungenügend sein. 2. Kann unter den im Rahmen unserer heutigen Kenntnisse überhaupt möglichen, d. h. ausdenkbaren Theorien, die eine oder andere, die vielleicht gerade eine Lösung bringen würde, nicht herangezogen worden sein. 3. Kann notwendigerweise die Mitwirkung einer prinzipiell neuen, d. h. bisher noch unbekannten Ursache anzunehmen sein. Ehe man sich zu dieser dritten Alternative entschließt und sich in wilder Hypothesenbildung ergeht, wird man jedenfalls die beiden ersteren nach Möglichkeit durchdiskutieren müssen. Dazu ist aber vor allem notwendig, daß man sozusagen eine vollständige Liste aller überhaupt möglichen Theorien aufstellen und zur Grundlage der weiteren Untersuchung machen kann. Erst wenn dann 1. und 2. mit Sicherheit verneinend beantwortet wären, müßte man wohl 3. bejahen. Zwar liegen in dieser Richtung bereits verschiedene Ansätze vor[2]), eine systematische Diskussion ist aber bisher, soviel mir bekannt, noch nicht durchgeführt worden.

1) Zusammenfassende Bearbeitungen der Literatur geben ein Artikel von E. v. Schweidler u. F. Kohlrausch in L. Graetz' Handbuch der Elektrizität 3. S. 193—276 und ein Artikel von E. v. Schweidler in der Encyclop. d. Math. Wiss. 6. 1, 9 S. 235—365, beide über „Atmosphärische Elektrizität".

2) Vgl. etwa E. v. Schweidler, Encyclop. Art. S. 258 ff. und Wien. Ber. 127. S. 1. 1918.

Es gelingt nun in der Tat in recht einfacher Weise unter Benutzung eines geeigneten Schematismus, den ersten Teil der Aufgabe zu lösen und die genannte vollständige Liste aufzustellen. Wesentlich schwieriger ist dann allerdings die Diskussion dieser einzelnen möglichen Theorien, soweit nicht von vornherein aus der allgemeinen physikalischen Erfahrung heraus ein Teil von ihnen abgelehnt werden kann; denn die Unvollständigkeit der heute zur Verfügung stehenden empirischen Daten macht einerseits eine *quantitative* Diskussion — die allein zur Entscheidung führen könnte — unmöglich, und gibt andererseits, wie dies ja bei geophysikalischen Fragen vielfach der Fall ist, der Hypothesenbildung noch allzuviel Spielraum. Wenn es somit in der Natur der Sache begründet ist, daß eine endgültige Entscheidung heute noch nicht getroffen werden kann, so ist, wie ich glaube, doch ein gewisser Fortschritt darin zu sehen, daß es gelingt, die Zahl und Art der überhaupt in Betracht kommenden Theorien genau zu umschreiben und ganz erheblich einzuengen und die Bejahung der oben erwähnten dritten Alternative als jedenfalls nicht unbedingt notwendig zu erweisen.

Das Problem, um welches es sich hier handelt, hat am klarsten v. Schweidler a. a. O. formuliert durch die Frage nach der Natur des sog. „Kompensations- oder Gegenstromes". In der Atmosphäre strömt normalerweise dauernd positive Ladung von oben nach unten und entsprechend negative von unten nach oben, d. h. es fließt dem Erdkörper aus der Atmosphäre ein positiver Strom zu und zwar von bemerkenswerter örtlicher und zeitlicher Konstanz (ca. $2 \cdot 10^{-16}$ Amp/cm^2 = $6 \cdot 10^{-7}$ CGS./cm^2); dieser Strom ist bedingt durch die natürliche Leitfähigkeit und durch die Existenz eines elektrischen Feldes in der Atmosphäre. Der Zustand kann nun trotz der fortwährenden Tätigkeit dieses sog. „normalen Leitungsstromes" offenbar nur dann stationär sein — daß es sich um einen stationären Zustand handelt und nicht um ein vorübergehendes Phänomen, wird wohl allgemein angenommen und bedingt gerade die hier zu betrachtende Schwierigkeit — wenn die ausgleichende Wirkung des Leitungsstromes kompensiert wird durch einen zweiten Prozeß, den v. Schweidler zunächst ganz allgemein als Kompensationsstrom bezeichnet. Die Frage

nach der Natur und physikalischen Deutung dieses Kompensationsstromes bildet das eingangs erwähnte Problem der luftelektrischen Forschung.

Man kommt nun an Hand einfacher geometrischer Betrachtungen zu einem übersichtlichen und vollständigen Schema aller für die Deutung des Kompensationsstromes überhaupt in Betracht kommenden theoretischen Möglichkeiten, wenn man ausgeht von dem Prinzip der geschlossenen Stromlinien für den stationären Zustand. Leitungsstrom und Kompensationsstrom müssen, zunächst rein geometrisch gesprochen, eine geschlossene Schleife bilden, von der ein Teil durch den von der Atmosphäre zur Erde fließenden normalen Leitungsstrom, der Rest durch den Kompensationsstrom gebildet wird. Dabei wollen wir, um das folgende Schema nicht unnötig zu komplizieren, von vornherein festsetzen, daß wir unter „Strom" stets den Mittelwert der wirklich fließenden Ströme, über die ganze bisherige Beobachtungszeit, d. h. über mehrere Jahre, verstehen. Wir können dies tun, ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beeinträchtigen, machen aber natürlich implizite — andernfalls wäre überhaupt keine Schwierigkeit vorhanden — die durch die Beobachtungsergebnisse wie man heute annimmt und wohl mit Sicherheit annehmen muß, erwiesene Voraussetzung, daß insbesondere das Zeitintegral über den normalen Leitungsstrom von Null verschieden ist. Dagegen sei ausdrücklich hervorgehoben, daß es sich nicht auch um eine analoge räumliche Mittelwertsbildung über die ganze Erdoberfläche handelt, sondern daß wir unter „Strom" die Stromdichte an jeweils einem Beobachtungsort zu verstehen haben. In der geschlossenen Schleife ist die Strom*richtung* in allen Teilen gegeben durch die Richtung Atmosphäre–Erde des positiven Leitungsstromes; das Vorzeichen der im Kompensationsstrom fließenden Ladungen und damit deren Bewegungsrichtung bleibt dagegen noch unbestimmt.

Wir können nun sofort zwei verschiedene Grundformen der Stromschleife unterscheiden und dementsprechend zwei große Klassen von Theorien. Die erste ist charakterisiert durch eine „dreieckige" Schleife; die Verbindung der Punkte A und E, welche die Atmosphäre und die Erde repräsentieren, ist die eine Seite, auf der der Leitungsstrom fließt; im dritten

Eckpunkt P entspringen die Stromlinien der Kompensationsströme. Es deckt sich diese Klasse mit der von v. Schweidler a. a. O. durch den Zusatz „an Ort" bezeichneten Art von Theorien, bei welchen der Kompensationsstrom an demselben Ort wie der Leitungsstrom, nämlich am Beobachtungsort, in den Erdkörper mündet, also wesentlich vertikal gerichtet ist. Die zweite Klasse ist charakterisiert durch eine „viereckige" Stromschleife, deren eine Seite wieder AE ist, deren beide andere Ecken P_1 und P_2 seien. Sie deckt sich mit der v. Schweidlerschen Art, „an entfernter Stelle", bei welcher der Kompensationsstrom nicht am Beobachtungsort die Erde trifft. Demgemäß sind horizontale Komponenten des Kompensationsstromes anzunehmen, teils in der Atmosphäre, teils in der Erde als Erdströme. Noch kompliziertere Formen der Stromschleife anzunehmen, ist offenbar unnötig; dagegen müssen wir der Vollständigkeit wegen als eine dritte mögliche Klasse noch solche für möglich halten, welche durch geometrische Kombination der beiden ersteren Klassen entsteht.

Es ist nun leicht, diese erste Einteilung zu der gewünschten Liste auszubauen, wenn man nur streng systematisch und zwar zunächst sozusagen rein geometrisch vorgeht. Die erste Klasse (I) enthält nämlich, wie man unmittelbar sieht, drei und nur drei Unterklassen, die charakterisiert sind durch die Lage des Punktes P, da dieser außerhalb der Atmosphäre (I 1), in der Atmosphäre (I 2) oder in der Erde (I 3) liegen kann. Ebenso zerfällt die zweite Klasse (II) in eine Reihe von Unterklassen je nach der Lage der Punkte P_1 und P_2 in je einem der drei eben genannten Gebiete. Und zwar gibt es hier ebenfalls nur drei Unterklassen II 12, II 13 und II 23, da die Unterklassen mit Lage der Punkte P_1 und P_2 in demselben Gebiet (II 11, II 22, II 33) zusammenfallen mit den bereits angeführten Unterklassen der Art I. Eine weitere und zwar die letzte Verfeinerung unseres Schemas, welche nun bereits zu den einzelnen möglichen Theorien selbst führt, erhalten wir endlich durch Berücksichtigung des Punktes, den wir bisher ganz unbeachtet gelassen haben, nämlich durch Berücksichtigung des Vorzeichens der in den Kompensationsströmen fließenden Ladungen. Die Zahl der sich so ergebenden geometrischen Möglichkeiten können wir aber von vornherein beschränken

durch die folgenden einfachen physikalischen Überlegungen. Da die Kompensationsströme der Klassen I naturgemäß keine Leitungsströme sein können, so fällt unter den möglichen Kombinationen der Ladungsvorzeichen die eine gerade im normalen Leitungsstrom auf AE realisierte weg, wo gleichzeitig positive Ladung in der einen, negative in der anderen Richtung desselben Schleifenteils strömt, d. h. es kommt für jeden Teil nur entweder positiver oder negativer Ladungstransport in Frage. Demgemäß zerfällt jede der Unterklassen I in je 4 mögliche Theorien. Da aber ferner bei I 2 bzw. I 3 der Punkt P praktisch zusammenfällt mit dem Punkt A bzw. E, so kommt hier nur das Vorzeichen auf den einen Schleifenteil $A(P)E$ bzw. $AE(P)$ in Betracht, die Schleife ist zu einem Zweieck ausgeartet. Wir haben also im ganzen nicht 12, sondern nur 8 mögliche Theorien der Art I, nämlich in leicht verständlicher Bezeichnung die Theorien I 1 pp, I 1 pn, I 1 np, I 1 nn; I 2 p, I 2 n; I 3 p, I 3 n. Für die Theorien der Art II gelangen wir in ganz ähnlicher Weise zu der vollständigen Liste, deren Ableitung wir uns aber ebenfalls von vornherein abkürzen können. In der Unterklasse II 13, in welcher also P_1 außerhalb der Atmosphäre, P_2 in der Erde liegt, ist offenbar das Vorzeichen der im Erdzweig EP_2 strömenden Ladung gleichgültig, da die Erde nur dem Ausgleich der in E und P_2 ankommenden bzw. von dort ausgehenden Ladungen dienen soll; wir haben also hier im ganzen nur 4 mögliche Theorien, nämlich in analoger Bezeichnung wie oben die Theorien II 13 pp, II 13 pn, II 13 np, II 13 nn. In der Unterklasse II 23 mit P_1 in der Atmosphäre und P_2 in der Erde gilt bezüglich des Erdstromes dasselbe wie oben, so daß auch hier 4 mögliche Theorien II 23 pp ... II 23 nn zu verzeichnen wären. Dazu kommen nun aber, soll die wesentliche Vollständigkeit unserer Liste nicht gefährdet werden, noch weitere Möglichkeiten, nämlich die eines Leitungsstromes in der ionisierten Atmosphäre auf AP_1 bzw. P_1P_2; dadurch entstehen 5 weitere mögliche Theorien, die wir bezeichnen wollen durch II 23 $(np)p$, II 23 $(np)n$, II 23 $p(np)$ und II 23 $n(np)$, II 23 (np, np), so daß also im ganzen 9 Theorien der Unterart II 23 denkbar sind. Die dritte Unterklasse II 12 endlich mit P_1 außerhalb der Atmosphäre und P_2 in der Atmosphäre erledigt sich einfach

dadurch, daß sie überhaupt von vornherein abzulehnen ist. Denn es fällt bei ihr die charakteristische Eigenschaft, daß Leitungsstrom und Kompensationsstrom an verschiedenen Orten in den Erdkörper münden, fort. Wenn wir die Kombinationstheorien der Art III aus praktischen Gründen vorerst nicht behandeln und uns auf die einfachen Theorien der Art I und II beschränken, so können wir zusammenfassend nun mit Sicherheit behaupten, daß 21 und nur 21 derartige Theorien denkbar sind. Diese sollen nun der Reihe nach besprochen werden, wobei sich zeigen wird, daß eine große Zahl von ihnen teils auf Grund von Erfahrungstatsachen, teils auf Grund allgemeiner physikalischer Erwägungen abzulehnen ist und nur eine kleine Zahl für eine ernstliche Diskussion übrig bleibt.

Theorien der Klasse I. Kennzeichen ist, daß ein Kompensationsstrom in demselben Punkt in die Erde mündet, in welchem der Leitungsstrom beobachtet wird. Die physikalische Natur der Kompensationsströme läßt sich dahin einschränken, daß es sich dabei nur um Konvektionsströme handeln kann.

I 1. Der Punkt P liegt außerhalb der Atmosphäre.

Die Kompensationsströme kommen aus dem Weltraum oder von einem andern Himmelskörper, bzw. sie strömen von der Erde oder ihrer Atmosphäre dorthin. In erster Linie wird man an korpuskulare Strahlen beiderlei Vorzeichen denken, man wird aber daneben auch Ladungstransport durch Strahlungsdruck, Einfangung geladener Materie durch die Erde usw. in den Bereich der Möglichkeiten ziehen müssen. Das Schema der Stromschleife gibt die Fig. 1.

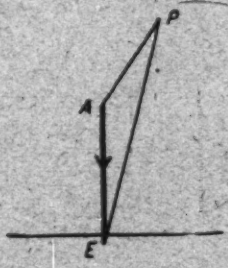


Fig. 1.

I 1 *pp*, I 1 *np*. Strom $E \to P$ positiv. Physikalisch nicht brauchbar, da keinerlei Anzeichen dafür vorhanden sind, daß der Erdkörper positive Strahlen — denn nur um solche könnte es sich handeln — in dem hier geforderten Betrag emittiert.

I 1 *pn*. Strom $P \to A$ positiv, Strom $P \to E$ negativ. Physikalisch liegt diese Annahme einer von Simpson ausgespro-

chenen Theorie[1]) zugrunde, nach welcher von außen, etwa von der Sonne kommende, positive und negative Strahlen die Erde treffen; die leichter absorbierbaren positiven Strahlen bleiben bereits in der Atmosphäre stecken, während die negativen wenigstens zum Teil bis zur Erdoberfläche durchdringen. Wenn nun auch die Existenz des positiven Stromes $P \to A$ durch die Ergebnisse der Nordlichtforschung recht wahrscheinlich gemacht ist, ist die Theorie doch abzulehnen, da der negative Strom $P \to E$ in der hier zu fordernden Stärke sicher nicht vorhanden ist. Es geht dies hervor aus einer auch für das folgende prinzipiell wichtigen Untersuchung von v. Schweidler.[2])

I 1 *n n*. Negativer Strom $A \to P$, negativer Strom $P \to E$. Die Existenz des Stromes $A \to P$ läßt sich, wie wir noch sehen werden, zwar plausibel machen, die Theorie ist aber aus demselben Grund, wie die vorhergehende, abzulehnen.

I 2. Der Punkt P liegt in der Atmosphäre.

Neben den für die Theorien I 2 prinzipiell heranzuziehenden Korpuskularstrahlen kommt für eine Deutung des nun ganz innerhalb der Atmosphäre verlaufenden Kompensationsstromes nur noch in Betracht die Annahme von mechanischen Konvektionsströmen, z. B. durch vertikale Luftbewegungen usw. Das Schema der Stromschleife ist gegeben durch die Fig. 2.

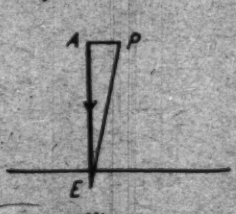


Fig. 2.

I 2 *p*. Strom $E \to P$ positiv. Die Emission einer hinreichend intensiven Korpuskularstrahlung, etwa einer α-Strahlung von radioaktiven in der Erdrinde vorhandenen Substanzen, ist auszuschalten. Dagegen könnte eine Konvektion positiver Raumladung durch aufsteigende Luftströme in Betracht kommen und ist sogar mit Sicherheit nachgewiesen; physikalisch ist diese Theorie identisch mit I 3 *p*.

I 2 *n*. Negativer Strom $P \to E$. Die Deutung durch abwärtsgehende Luftströme scheidet wegen der positiven Raumladung der Atmosphäre aus. Dagegen besteht physikalisch

1) G. C. Simpson, Nature. **69**. S. 270. 1904.
2) E. v. Schweidler, Wien. Ber. **121**. S. 1. 1918.

die Möglichkeit, korpuskulare negative Strahlen aus der Atmosphäre anzunehmen, welche in der Erde absorbiert werden. Diese Annahme liegt auch in der Tat in zwei Theorien vor, nämlich

a) der Theorie von Swann.[1]) Von der Atmosphäre gehen β-Strahlen aus, welche in der Erde absorbiert werden.

b) Nach einer Bemerkung von v. Schweidler[2]) könnte man annehmen, daß die atmosphärische β-Strahlung nicht spontan von radioaktiven Stoffen ausgeht, sondern man könnte sie auch auffassen als anisotrop verteilte Sekundärstrahlung einer in die Atmosphäre von außen eindringenden, sehr harten Impulsstrahlung. Jedenfalls lassen die neueren Beobachtungen über die sogenannte „durchdringende Strahlung" eine solche Annahme nicht von vornherein als aussichtslos erscheinen.[3])

Beide Hypothesen sind nun aber auf Grund der oben zitierten Untersuchung von v. Schweidler, also aus demselben Grund wie I 1 *p n* abzulehnen. Nun gibt es aber noch eine dritte Möglichkeit zur Deutung des negativen Stromes $P \to E$, die benutzt ist in der

c) Theorie von Gerdien.[4]) Negative Ladung soll im Überschuß durch die Niederschläge herabgebracht werden. Auch diese Theorie ist wohl sicher abzulehnen auf Grund der neueren exakten Messungen der Niederschlagselektrizität, welche die Ergebnisse jener ersten Beobachtungen nicht bestätigten, sondern gerade das Gegenteil ergaben.

I 3. *Der Punkt P liegt in der Erde.*

Bezüglich der Natur der Kompensationsströme gilt dasselbe wie oben unter I 2. Das Schema der Stromschleife ist gegeben in Fig. 3.

I 3 *n*. Deckt sich mit I 2 *n* und ist aber wie dieses abzulehnen.

---

1) W. F. G. Swann, Terr. Magn. 20. 105. 1915; 21. 1916.
2) v. Schweidler, Wien. Ber. 127. 1. 1918.
3) Vgl. R. Seeliger, Münch. Ber. 1. 1918.
4) H. Gerdien, Phys. Ztschr. 6. 647. 1905; vgl. auch R. Seeliger, Wien. Ber. 125. 1. 1916.

I 3 *p*. Deckt sich mit I 2 *p*. Ernstliche Beachtung verdient hier die von Ebert[1]) aufgestellte Theorie der sog. Bodenatmung, nach welcher aus den Erdkapillaren die Bodenluft mit einem beträchtlichen Überschuß positiver Elektrizität beladen austritt und zwar infolge der stärkeren Adsorption negativer Ladungsträger an die Wände der Kapillaren. Da qualitativ die Ebertsche Theorie heute als festbegründet anzusehen ist, kann über ihre Leistungsfähigkeit nur eine quantitative Diskussion entscheiden; dabei handelt es sich um zwei Punkte, nämlich um die quantitative Ergiebigkeit der Bodenatmung und um die Frage, ob und wie die positiven Ladungen in die höheren Schichten der Atmosphäre gelangen.

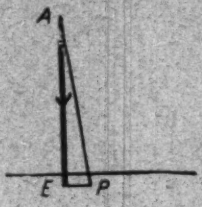


Fig. 3.

Theorien der Klasse II. Die Theorien, zu deren Besprechung wir nun übergehen, sind, wie bereits erwähnt, dadurch gekennzeichnet, daß der Kompensationsstrom nicht in demselben Punkt wie der Leitungsstrom in die Erde mündet. Es bringt dies eine erhebliche Vergrößerung der Zahl der auch physikalisch nicht ohne weiteres abzulehnenden Möglichkeiten mit sich, da man nun den Kompensationsstrom auf Teilen der Erdoberfläche münden lassen kann, von denen noch keine Beobachtungen vorliegen (z. B. auf dem offenen Meer) oder vor allem, in denen besondere physikalische Verhältnisse durch anderweitige Überlegungen zu erwarten sind (z. B. in hohen Breiten). Die Theorien der Art II werden also in der Hauptsache — und darin liegt teils ihre vorteilhafte Vielseitigkeit, teils ihre unangenehme Dehnbarkeit — die Möglichkeiten umfassen, in denen die Unvollständigkeit des Beobachtungsmaterials, und zwar bezüglich der geographischen Verbreitung der Beobachtungsorte, eine Rolle spielt.

II 13. Punkt P_1 liegt außerhalb der Atmosphäre, Punkt P_2 in der Erde.

Bezüglich der Deutung der Kompensationsströme gilt dasselbe wie bei den Theorien der Art. I 1. Das Schema der Stromschleife gibt die Fig. 4.

1) H. Ebert, Phys. Ztschr. 5. 135. 1904. Wegen zahlreicher sich anschließender Arbeiten vgl. die Besprechung bei v. Schweidler und Kohlrausch, a. a. O. S. 272 ff.

II 13 *n n*. Negativer Strom $A \to P_1$, negativer Strom $P_1 \to P_2$. Die Existenz des Stromes $A P_1$ ist jedenfalls nicht von vornherein abzulehnen, wie wir später sehen werden. Bezüglich des Stromes $P_1 P_2$, der also in einer Einstrahlung von Elektronen bestehen müßte, können wir die aus der Untersuchung von v. Schweidler folgende und den bisherigen Theorien so verderbliche Aussage der Nichtexistenz eines solchen Stromes nun dadurch bedeutungslos machen, daß wir den Punkt P_2 prinzipiell an einen Ort verlegen, für welchen noch keine Messungen nach dem Vorgang v. Schweidlers vorliegen.[1]) Es wäre das allerdings an sich nicht mehr als eine reine Willkürlichkeit; für einen Fall aber läßt sich durch anderweitig gewonnene Einsichten ein solches Vorgehen immerhin, wenn auch nicht strenge rechtfertigen, so doch stützen, nämlich für eine Verlegung von P_2 in die Polargebiete der Erde. Dort nämlich läßt die Korpuskulartheorie des Polarlichts[2]) den Einfall von Elektronen großer Geschwindigkeit auf die Erdoberfläche wenigstens nicht als ausgeschlossen erscheinen. Zusammenfassend liegen die Verhältnisse jedenfalls so, daß die eben behandelte Möglichkeit nicht von vornherein abgelehnt werden kann.

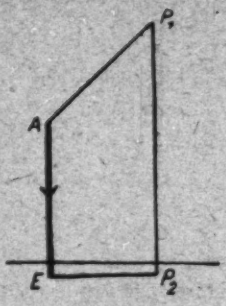


Fig. 4.

II 13 *p n*. Positiver Strom $P_1 \to A$, negativer Strom $P_1 \to P_2$. Es tritt an die Stelle eines negativen von der Atmosphäre ausgehenden ein positiver in dieselbe eintretender Strom. Da dessen Existenz (vgl. I 1 *p n*) ebenfalls nicht unmöglich erscheint, ist auch diese Theorie nicht von vornherein abzulehnen.

II 13 *n p*. Strom $A \to P_1$ negativ, Strom $P_2 \to P_1$ positiv. Die Theorie ist abzulehnen, da auch bei Verlegung von P_2 in unbekannte Gebiete der Erdoberfläche sich keinerlei plausible Gründe für eine genügend intensive Emission positiver Strahlen

---

1) Hierauf hat v. Schweidler a. a. O. S. 16 selbst schon ausdrücklich hingewiesen.

2) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von L. Vegard, Jahrb. Rad. u. Elektr. 14. S. 383. 1917.

von ausgezeichneten Punkten der Erdoberfläche beibringen lassen.[1])

II 13 *p p*. Strom $P_1 \to A$ positiv, Strom $P_2 \to P_1$ positiv. Ist aus demselben Grund wie die vorhergehende Theorie abzulehnen.

II 23. Punkt P_1 in der Atmosphäre, Punkt P_2 in der Erde.

Der Deutung der Kompensationsströme ist nun besonders in dieser Unterklasse der weiteste Spielraum gelassen. Korpuskulare Strahlen und mechanische Konvektion durch Luftströmungen müssen wir ebenso wie bei den Theorien der Art I 2 natürlich generell auch hier als möglich erklären; es kommt nun aber neu hinzu, daß wir nicht von vornherein auch die Deutung als Leitungsströme in der ionisierten Atmosphäre wie bei I 2 ausschließen können, einem Umstand, dem wir auch bereits (S. 468) durch Aufnahme der 4 Möglichkeiten II 23 (*n p*) *p* ... II 23 *n* (*n p*) Rechnung getragen haben. Denn da P_1 und P_2 in uns noch unbekannten Gebieten liegen können, in denen wir allgemein, d. h. ohne physikalische Diskussion, auch über das elektrische Feld nichts aussagen können, so ist die Möglichkeit der Ausbildung von Leitungsströmen mit kompensierender Wirkung jedenfalls nicht ohne weiteres wie bisher zu verneinen. Das Schema der Stromschleife ist gegeben durch die Fig. 5.

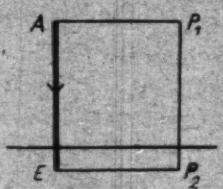


Fig. 5.

II 23 *n n*, II 23 *p n*. Positiver bzw. negativer Strom auf $A P_1$, negativer Strom $P_1 \to P_2$. Beide Möglichkeiten sind, ganz abgesehen von der Deutung des Stromes auf $A P_1$, abzulehnen wegen des negativen Stromes auf $P_1 P_2$. Dieser könnte nur gedeutet werden als mechanischer Konvektionsstrom oder als Korpuskularstrahlenstrom, etwa im Sinne der Swannschen Theorie (S. 471). Nun ist es natürlich möglich, den Punkt P_2 in Gebiete der Erdoberfläche zu legen, für welche noch keinerlei Beobachtungen vorliegen. Derartige Annahmen wären aber

1) Von allzugewagten Hypothesen, wie z. B. der Emission positiver Ladung bei Vulkanausbrüchen, wollen wir hier in dieser tunlichst nüchternen Untersuchung natürlich absehen.

wie man bei näherem Zusehen erkennt, nichts weiter als reine Willkürlichkeiten, zu deren Stütze auch nicht die geringsten Gründe sich würden anführen lassen.

II 23 *n p*. Ist aus Gründen derselben Art abzulehnen.

II 23 *p p*. Positive Ströme $P_1 \to A$ und $P_2 \to P$. Deutet man die Ströme durch korpuskulare Strahlen, so ist diese Möglichkeit aus denselben Gründen wie bei den drei ersten abzulehnen. Dagegen kommt dieser Möglichkeit eine gewisse Bedeutung zu, wenn man die Ströme als mechanische Konvektionsströme deutet und für $P_2 \to P_1$ die Ebertsche Theorie zu Hilfe nimmt. Wenn dann zwar auch eine prinzipiell neue Möglichkeit in dieser Kombination nicht enthalten ist, so ist sie doch zur Ergänzung der Ebertschen Theorie I 3 *p* notwendig und nützlich[1]) in allen Fällen, wo diese für den Beobachtungsort *E* selbst versagen würde; so z. B. wenn *E* auf dem Meer liegt.

II 23 (*n p*) *n* bis II 23 (*n p*) (*n p*). Sämtliche derartige Möglichkeiten, welche den Kompensationsstrom ganz oder teilweise als Leitungsstrom deuten, sind abzulehnen, teils aus den soeben genannten Gründen, teils weil die zur Unterhaltung des Leitungsstromes auf $P_1 P_2$ notwendigen elektromotorischen Kräfte und großen Leitfähigkeiten fehlen. Es hat die Verhältnisse Swann[2]) durchdiskutiert und ist zu negativen Resultaten gekommen. Zu bemerken ist allerdings, daß wir über die Leitfähigkeit der höchsten Luftschichten zwar nur sehr wenig wissen, daß aber verschiedene Umstände (kräftige Ionisation durch die durchdringende Strahlung, durch die Sonnenstrahlen und durch korpuskulare Strahlen; große freie Weglänge, Ladungsträger vermutlich zum Teil freie Elektronen, deshalb große Beweglichkeit) und vielleicht auch einige Versuche über die Ausbreitung funkentelegraphischer Signale dafür zu sprechen scheinen, daß die Leitfähigkeit dort tatsächlich sehr groß ist. Im Grenzfall würden dann die hier betrachteten Stromschleifen übergehen in die Stromschleifen der ersten Art, insofern das Stück $A P_1$ physikalisch einer metallischen Verbindung entsprechen würde.

---

1) Vgl. E. v. Schweidler, Enzykl. Art., S. 259.

2) W. F. Swann, Terr. Magn. 20. S. 107 f. u. 111 f. 1915. Der Inhalt des zweiten Teils der ausführlichen Arbeit von Swann war mir sowohl im Original wie in Referaten nicht zugänglich.

Fassen wir nun das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen zusammen. Wir konnten bereits auf Grund unserer ersten groben Diskussion von den 21 möglichen einfachen Theorien die Mehrzahl als unbrauchbar ablehnen; nur bei drei Theorien war eine Ablehnung wenn überhaupt, so jedenfalls nicht ohne weiteres möglich. Es sind dies die Theorien:

I 3p mit der Ergänzung II 23pp, charakterisiert durch die Ebertsche Deutung eines positiven aufsteigenden Kompensationsstromes infolge Erdabsorption und Bodenatmung.

II 13pn; II 13nn, charakterisiert durch die Umgehung des v. Schweidlerschen Einwandes vermöge einer Verlegung der Auftreffstelle von negativen Korpuskularstrahlen in die Polargebiete der Erde.

Diese drei Theorien bieten jedenfalls a priori nicht zu verneinende Möglichkeiten einer Lösung und verdienen also eine eingehendere Diskussion. Was zunächst die beiden Theorien der Art II anlangt, so wird die Entscheidung natürlich letzten Endes zu geben sein durch die Vornahme von Beobachtungen in den Polargebieten und zwar durch Wiederholung der fundamentalen Versuche von v. Schweidler. Es scheint mir bereits darin ein Erfolg unserer systematischen Diskussion zu liegen, daß sich nun mit vollständiger Bestimmtheit ein einfaches experimentum crucis angeben läßt. Vorerst allerdings wird man auf anderem Wege versuchen müssen, Aussagen zu machen. Da das experimentum crucis durch theoretische Betrachtungen natürlich nie zu ersetzen ist, muß man sich damit zufrieden geben, nachzusehen, ob etwa irgendwo die fraglichen Theorien in Widerspruch mit anderweitigen bisher vorliegenden Erfahrungen und Ansichten stehen. Soviel ich sehe, muß diese Frage wenigstens nach der qualitativen Seite hin verneint werden. Zunächst benötigen beide das Einfallen eines Elektronenstromes auf die Erdoberfläche und zwar nur in den Polargebieten der Erde. Diese Konzentration auf ausgezeichnete Gebiete der Erdoberfläche wird aber ebenso wie die Existenz eines Elektronenstromes überhaupt, durch die neueren Untersuchungen über die Polarlichter (vgl. den S. 473 zitierten Bericht von Vegard), zumindest wahrscheinlich gemacht. Man könnte nun versuchen, nach einem Widerspruch der Theorie

mit der Erfahrung auf folgendem Wege, vermutlich dem einzig möglichen, zu suchen. Wenn in den Polargebieten Elektronen auf die Erde treffen, so müßte nach den Voraussetzungen der Theorie der Absorptionskoeffizient so klein sein, daß mehr als die Hälfte der Strahlen zur Erde durchdringt. Ist δ die Dichte der Atmosphäre in der Höhe h über dem Boden, α der Absorptionskoeffizient der Luft nach dem Massenproportionalitätsgesetz bezogen auf die Masseneinheit, so ist

$$\ln \frac{J_0}{J_h} = \alpha \int_h^\infty \delta \, dh,$$

so daß die am Erdboden ankommende Intensität in Bruchteilen der in die Atmosphäre von außen eindringenden ist

$$J = J_0 e^{-\alpha m},$$

wenn m die Masse der Atmosphäre über 1 cm² ist. Nun soll sein $J > 0{,}5\, J_0$, also muß sein

$$\alpha m < \ln 2 = 0{,}7,$$

da m von der Größenordnung 10^3 ist, so ergibt sich für α als obere Grenze

$$\alpha < 0{,}7 \cdot 10^{-3}. \tag{1}$$

Andererseits muß der Einfall der Elektronen wiederum im Sinne der betrachteten Theorie innerhalb einer Polarkalotte erfolgen, in denen die Schweidlerschen Versuche noch nicht gemacht sind. Nun ist der Winkel α_m der Nordlichtzone nach Störmers Theorie[1]) gegeben durch

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \alpha_m &= \sqrt{\frac{2R}{c}}, \\ c &= \sqrt{\frac{n}{H\varrho}}, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

wenn R der Erdradius in cm ($= 6{,}4 \cdot 10^8$), n das magnetische Moment der Erde ($= 8{,}52 \cdot 10^{25}$) ist und $H\varrho$ in bekannter Weise die Geschwindigkeit der Elektronen definiert,

$$H\varrho = \frac{m v}{e} \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{3}$$

---

1) Vgl. L. Vegard, a. a. O., S. 435.

Wenn man den Absorptionskoeffizient α als Funktion von v kennt, so erhält man aus (1) eine untere Grenze v_∞ für v und könnte zusehen, ob der aus (2) und (3) mit $v = v_\infty$ folgende Wert von α_∞ nicht etwa in bekannte geographische Breiten reicht; wäre dies der Fall, so wäre die Theorie abzulehnen. Leider ist aber für den angegebenen α-Wert die Geschwindigkeit so nahe der Lichtgeschwindigkeit, daß Erfahrung wie Theorie hier noch ganz im Stiche lassen. Wegen der ganz außerordentlich hohen, aus Gl. (1) jedenfalls zu folgernden Werte der Geschwindigkeit allein kann man aber keineswegs die Theorie ablehnen, da man in der Theorie des Nordlichts mit ähnlich hohen Werten zu rechnen hat; hypothetisches, aber keiner Erfahrung widersprechendes darf im Sinne der vorliegenden Betrachtungen nicht zur Ablehnung führen.

Was den positiven in die Atmosphäre einströmenden bzw. negativen aus ihr austretenden Teil des Kompensationsstromes anlangt, so ist die Möglichkeit der Existenz beider ebenfalls nicht a priori abzulehnen. Für den Fall des positiven Stromes ist dies im Anschluß an die Vegardsche, neuerdings von Stark[1]) auf ganz anderem Wege gestützte Theorie des Nordlichts ohne weiteres klar. Auch die Existenz eines negativen Stromes ist unter Zugrundelegung einer an sich plausiblen Hypothese keineswegs ausgeschlossen und scheint mir sogar insofern beachtenswert zu sein, als sie wenigstens für diesen einen Teil des Kompensationsstromes Unabhängigkeit von Vorgängen in der Tropo- und Stratosphäre plausibel macht und damit einen Hinweis auf die merkwürdige, eingangs erwähnte Konstanz und vielleicht auch auf die Ursache der jährlichen Periode (Wintermaximum) des Leitungsstromes geben kann. Es ist als sicher anzunehmen, daß die äußersten Schichten der Atmosphäre stark ionisiert sind.[2]) Ferner deuten neuere Erfahrungen an ionisierten Gasen darauf hin[3]), daß dort die negativen Träger zum großen Teil als freie Elektronen existieren können und daß diese im thermischen Gleichgewicht mit den

1) J. Stark, Die Naturwissenschaften 6. S. 145. 1918.

2) Einen Bericht über die interessante einschlägige Literatur werde ich a. a. O. geben.

3) Vgl. R. Seeliger, Die Ionisation der Gase. Graetz, Handb. d. Elektr. 3.

Gasmolekülen sind, also eine rund 30 mal größere mittlere Geschwindigkeit besitzen als die Gasmoleküle. Da zugleich ihre freie Weglänge sehr groß ist, so wird ein Teil der Elektronen ohne Zweifel den Anziehungsbereich und die Atmosphäre für immer verlassen und als negativer Strom in den Weltraum ausstrahlen. Eine einfache Rechnung ergibt, daß bei einer Temperatur von rund 30° abs. bereits für den größten Teil der Elektronen dies der Fall sein wird.

Die zweite oben S. 476 als noch möglich angeführte Theorie war nun die von Ebert. Über die quantitative Brauchbarkeit derselben existiert eine lebhafte Diskussion, die jedenfalls nicht eindeutig zu ungunsten der Theorie ausgefallen ist bis auf einen Punkt, der in der Tat eine ernstliche Schwierigkeit einzuschließen scheint.[1]) Ebert muß annehmen, daß die positiven Raumladungen durch mechanische Konvektionsströme von der nächsten Nähe der Erdoberfläche in die Atmosphäre fortgeschafft werden; ist v die Konvektionsgeschwindigkeit, ϱ die Ladungsdichte, so müßte also $\varrho \cdot v$ = Leitungsstrom sein und es ist nun allerdings fraglich, ob in größerer Entfernung vom Boden $\varrho \cdot v$ genügend große Werte hat. Mangels brauchbarer Daten über die Größe der vertikalen Luftbewegung kann man hier allgemein eine Entscheidung nicht treffen und muß in der Tat die Frage noch offen lassen; es scheint aber auf alle Fälle nicht möglich zu sein, die Ebertsche Theorie für größere Höhen aufrecht zu erhalten. Swann hat nämlich a. a. O. die Grundlagen der Ebertschen Theorie von einem neuen Gesichtspunkt aus diskutiert; er berechnet die Relaxationszeit einer aufsteigenden geladenen Luftmasse und findet aus dem Wert $3 \cdot 10^{-4}$ für die Leitfähigkeit, daß in etwa 10 Minuten die Ladung auf $^1/_{10}$ gesunken sein wird; dies entspricht bei einer Aufsteigegeschwindigkeit der Luftmasse von 1 m/sec. einem Weg von nur 600 m. Die Überlegungen von Swann sind aber nicht streng und führen bei genauerer Rechnung zu Resultaten, die erheblich günstiger für die Ebertsche Theorie sind; prinzipiell jedoch wird hierdurch nichts

---

1) Man vgl. die ausführliche Darstellung bei v. Schweidler und Kohlrausch a. a. O. S. 272—278.

geändert und es scheint nach wie vor unmöglich, bis zu Höhen von auch nur wenigen Kilometern Konvektionsströme zur Kompensation heranziehen zu können, um so weniger also natürlich bis zu einer Höhe von 9 km, wo aus Potentialgradient und Ionendichte die Existenz des Leitungsstromes noch unmittelbar sichergestellt ist.

Zum Schluß müssen wir nun noch auf die früher bereits kurz erwähnten sogenannten Kombinationstheorien eingehen, die zur Vervollständigung unserer Liste natürlich heranzuziehen sind. Von unserem Standpunkt aus sind diese Theorien charakterisiert durch kompliziertere polygonale Stromschleifen, die sich zusammensetzen aus den einfachen bisher besprochenen Schleifen; geometrisch ist die Zahl der möglichen Kombinationen, wie man sofort sieht, natürlich eine sehr große, sie läßt sich aber in ähnlicher Weise, wie bei den einfachen Theorien, von von vornherein erheblich reduzieren. Dabei kann man die Leistung dieser Kombinationen ganz allgemein darin sehen, daß sie (durch räumliches Übereinandersetzen von zwei Stromschleifen) den Punkt A der unteren Schleife in tieferen Schichten der Atmosphäre anzunehmen gestatten und so die Möglichkeit geben, Schwierigkeiten zu vermeiden, die mit einer über die ganze bisher der direkten Beobachtung zugängliche Schichthöhe von 0 bis ca. 9 km ausgedehnten Vertikalerstreckung der einfachen Schleife verbunden sind. Man könnte also daran denken, auf diesem Weg z. B. die Ebertsche Theorie bezüglich höherer Luftschichten, in welche der mechanisch-konvektive Transport positiver Ladungen nicht mehr hinaufreicht, gewissermaßen zu entlasten. Die eingehendere Diskussion zeigt, daß 8 (bzw. 12) derartige Kompensationstheorien mit zwei Schleifen möglich sind (wenn man die beschränkenden Folgerungen unserer bisherigen Betrachtungen bereits berücksichtigt), nämlich die Kombinationen von I 2 (I 3) und II 2 mit I 1′, I 2′, II 22, II 23, wobei die den Typen I 1 und I 2 rein geometrisch entsprechenden Typen mit gestrichenen Zahlen bezeichnet sind. Als Beispiel diene das Schema Fig. 6 für die Kombination I 3 mit I 1′.

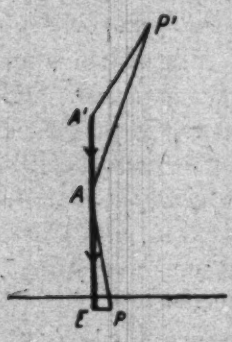


Fig. 6.

Soviel ich sehe, ist aber keine dieser 8 Kombinationen dazu geeignet, aus der Schwierigkeit herauszuhelfen. Rechnet man, was hier sicher genügt, nach der auf der isothermen Barometerformel fußenden einfachen Absorptionsgleichung[1]):

$$J = J_0 \cdot e^{-\frac{a}{b} \cdot e^{-b \cdot h}},$$

so erkennt man, daß es z. B. nicht möglich ist, in dem für den Anschluß an die Ebertschen Konvektionsströme in Betracht kommenden Höhen von einigen Kilometern eine genügend starke Absorption zu konstruieren, d. h. dorthin einen steilen Intensitätsabfall einer von oben kommenden korpuskularen Strahlung zu verlegen und zugleich mit dem Schweidlerschen Versuch auf dem Erdboden nicht in Konflikt zu kommen. Es ist mir wenigstens nicht gelungen, eine befriedigende Lösung zu finden, wenn ich auch die Möglichkeit einer solchen noch nicht generell verneinen kann.

Zusammenfassung.

Nimmt man wie üblich an, daß der ionenelektrische Zustand der Erdatmosphäre ein stationärer ist, so muß die aus dem normalen Leitungsstrom und dem v. Schweidlerschen Kompensationsstrom bestehende Stromschleife geschlossen sein. Dies erlaubt, eine vollständige Liste aller für eine Deutung des Kompensationsstromes überhaupt in Betracht kommenden theoretischen Annahmen aufzustellen, die im ganzen aus 21 einfachen und 8 aus diesen durch Kombination gebildeten Theorien besteht. Die nähere Diskussion scheidet von diesen die meisten aus, so daß nur zwei einfache Theorien (und vielleicht einige Kombinationstheorien) übrig bleiben. Für die Richtigkeit der beiden einfachen Theorien läßt sich ein mit den heutigen Mitteln zu erledigendes experimentum crucis angeben, das darin besteht, nachzusehen, ob auch in den Polargebieten der Erde kein Elektronenstrom die Erdoberfläche trifft. Die Kombinationstheorien bestehen in einer immerhin möglichen, wenn auch wenig wahrscheinlichen Ergänzung der Ebertschen Theorie für die höheren Schichten der Troposphäre.

1) P. Lenard, Heidelbg. Akad. 1918. Nr. 5. S. 128.

(Eingegangen 5. Januar 1920.)

4. *Erwiderung auf Hrn. Sommerfelds Bemerkungen über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie;* von H. Weyl.

Mit Hrn. Sommerfeld bin ich darin einig, daß meine Behandlung des in Rede stehenden Problems für die Praxis der drahtlosen Telegraphie nichts Neues bietet; hier wird man sich nach wie vor der grundlegenden, von Hrn. Sommerfeld gewonnenen Resultate zu bedienen haben. Was ich versprach, war lediglich eine sachgemäßere Methode der mathematischen Behandlung und eine gewisse Klärung des ganzen Vorgangs. Immerhin besteht, wenn ich nicht irre, zwischen Hrn. Sommerfeld und mir in einem Punkte eine wesentliche Meinungsverschiedenheit.

1. Nicht dem Sommerfeldschen *Begriff* der Oberflächenwelle streite ich die sachliche Berechtigung ab, sondern der Behauptung, daß eine derartige Oberflächenwelle in dem Vorgang, den wir beide untersuchen, tatsächlich enthalten sei. Der Umstand, daß eine mathematische Methode die einen einheitlichen physikalischen Vorgang darstellende Funktion in mehrere Summanden spaltet, gibt gewiß noch kein Recht zu der Ansicht, daß das Phänomen re vera aus diesen Teilvorgängen als selbständigen Wesenheiten zusammengesetzt sei. Der „künstliche" Charakter der Sommerfeldschen Zerlegung scheint mir namentlich aus folgenden beiden Umständen hervorzugehen:

a) die drei einzelnen Bestandteile, insbesondere die Oberflächenwelle, haben eine Singularität auf der Achse $r = 0$, während der Gesamtvorgang dort regulär ist (*darum* hielt ich es zum Zwecke einer „natürlichen" Diskussion für angezeigt, die Wellenfortpflanzung im ganzen oberen Halbraum zu betrachten);

b) wo die Abtrennung der Oberflächenwelle bei der Diskussion von Hrn. Sommerfeld überhaupt aufrecht erhalten wird (bei großer numerischer Entfernung), verschwindet ihr Beitrag (wegen der exponentiellen Abnahme) vollständig in der asymptotischen Entwicklung; aus dem anschaulichen Charakter des Gesamtvorgangs kann also in keinem Fall die Existenz der Oberflächenwelle abgelesen werden; die Bemerkungen auf S. 720 der Sommerfeldschen Arbeit über eine gewisse „Unstimmigkeit" schienen mir recht deutlich das Unbefriedigende der Situation zu bezeichnen.

2. Es schien mir wichtig, hervorzuheben, daß es sich bei der ganzen Untersuchung um den Grenzfall $\lim n$ (Brechungsindex) $= \infty$ handelt, um das Analogon des Gibbsschen Phänomens. Der Fall eines endlichen festen n (asymptotische Entwicklung nach Potenzen der reziproken Entfernung), den ich in § 2 rasch erledige, wird in § 6 der Sommerfeldschen Arbeit gestreift; aber nicht diese Entwicklung wird, wie es der Übergang zu § 7 ankündigt, dann in § 7 weitergeführt, sondern von da ab steht allein der Grenzfall $n = \infty$ in Frage. Innerhalb seiner tritt erst die Fallunterscheidung zwischen mäßiger und großer numerischer Entfernung ein. Ich kann zwischen diesen beiden Fällen keinen anderen Unterschied zugeben, als ihn etwa auch das Verhalten der Funktion $\mathrm{Si}(x)$ für mäßige und unendlich große x zeigt: die asymptotische Formel gibt an, wie die Funktionsbewegung im Unendlichen „ausläuft". — Wie beim Gibbsschen Phänomen automatisch die Größe nx als Argument auftritt [vgl. S. 489 meiner Arbeit], wenn man eine gleichmäßig gültige Grenzformel für $n = \infty$ haben will, so bei unserm Problem die „numerische Entfernung" $r_1 = r/|n|^3$ an Stelle von r [und $z/|n|$ an Stelle von z]; darin kommt für mich ihre grundsätzliche Bedeutung hinreichend klar zum Ausdruck. Dadurch, daß ich Gl. (23) durch Umrahmung als das Wichtigste und das Schlußresultat kennzeichnete, auf das Analogon des Gibbsschen Phänomens hinwies und zur anschaulichen Diskussion aufforderte, glaubte ich für den Leser genug getan zu haben.

3. Namentlich im Falle eines festen endlichen n trägt die Betrachtung des ganzen oberen Halbraums sehr zur physikalischen Klärung des Vorgangs bei. Die asymptotische Ent-

wicklung auf S. 487 unten meiner Note stellt, wenn man sie beim ersten Gliede abbricht, den Vorgang mit einem Fehler dar, der in jenem ganzen Bereich gleichmäßig von der Größenordnung $1/R$ ist, beim Abbrechen nach dem zweiten Glied mit einem Fehler von der Größenordnung $1/R^2$, usf.; die Nachbarschaft der Trennungsebene nimmt da durchaus keine Sonderstellung ein. Die von mir am Schluß des § 2 reproduzierte Formel (33a) der Sommerfeldschen Arbeit findet durch diese Entwicklung ihre natürliche Erklärung. Es sei gestattet, folgende Bemerkung anzufügen. Die „numerische Entfernung" ϱ wird, wenn man diesen Begriff auf den ganzen oberen Halbraum ausdehnen will, am besten erklärt als der absolute Betrag der von mir auf S. 496 eingeführten Größe w:

$$\varrho = |w| = |R - r\cos\alpha - z\sin\alpha|.$$

Die Entwicklung des § 2 gilt nun nicht nur bei festem endlichen n, sondern gleichmäßig für *alle* n im Sinne einer asymptotischen Darstellung für *große* ϱ; es ist nämlich, wenn man mit dem ersten Gliede abbricht, der Fehler (gleichmäßig für alle n) $\leqq \frac{\text{Const.}}{\varrho}$, beim Abbrechen nach dem zweiten Gliede $\leqq \frac{\text{Const.}}{\varrho^2}$, usf., wie sich leicht beweisen läßt.

So glaube ich, ist die von mir in § 2 entwickelte Methode die sachgemäße zur Behandlung des Problems für *alle Werte von n und große ϱ*; die in § 4 angegebene hat dieselbe Bedeutung für *alle ϱ und große n*. Die Wichtigkeit des physikalischen Problems schien mir die Mitteilung dieser Methode zu rechtfertigen. Im übrigen weiß ich sehr wohl, wie viel leichter das Herumbessern an der mathematischen Behandlung eines physikalischen Problems ist, als seine erste Bezwingung.

(Eingegangen 2. März 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

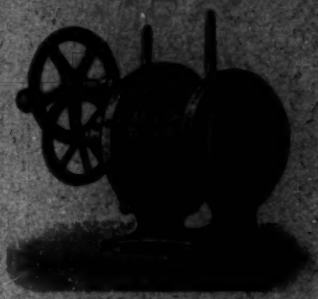
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P.

System Gaede, D. R. P. angemeldet

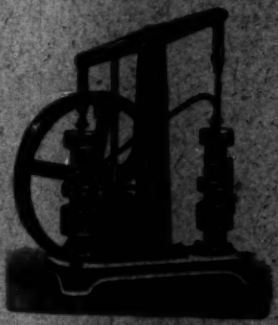


Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

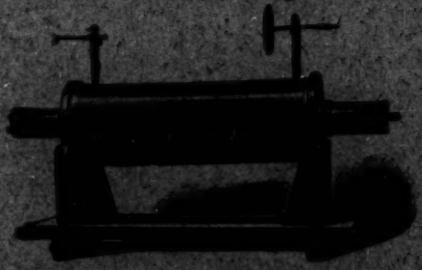
Trockene Schieberluftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

		Seite
1.	H. Barkhausen und H. Lichte. Quantitative Unterwasserschallversuche	485
2.	H. Dember und M. Uibe. Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdschattens in der Atmosphäre	517
3.	Günther Thilo. Der Strahlungsdruck auf Kreiszylinder aus beliebigem Material	531
4.	J. Wallot. Kinematische und energetische Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen	569

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 5.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1920. № 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Quantitative Unterwasserschallversuche;* *von H. Barkhausen und H. Lichte.*

(Mitteilungen aus dem Laboratorium der Torpedoinspektion.)

I. Das Problem.

Die Schallerzeugung im Wasser und die im Vergleich zur Luft ziemlich gute Fähigkeit des Wassers, den Schall auf große Entfernungen zu übertragen, ist seit langem bekannt. Schon Leonardo da Vinci hatte die Erfahrung gemacht, daß man Schiffe auf See mittels einer in das Wasser gesteckten Tuba hört. Er schreibt darüber: „Wenn Du Dein Schiff anhalten wirst und den Kopf eines Sprachrohres auf das Wasser setzen und das andere Ende an Dein Ohr, so wirst Du Schiffe hören, die recht weit von Dir entfernt sind.“ [1]) Es sei ferner auf die Versuche von Beudant (1820), sowie von Sturm und Colladon [2]) auf dem Genfer See (1827) hingewiesen, die mit ganz einfachen Mitteln schon eine Reichweite von 15 km, später sogar von 35 km erzielten. In neuerer Zeit, seit etwa 20 Jahren, sind die Unterwasserschallsignale auch praktisch in der Marine zum Ansteuern von mit Unterwasserglocken ausgerüsteten Feuerschiffen verwandt worden und zwar mit gutem Erfolge. In der Kriegsmarine erhielten sie eine ganz besondere Bedeutung mit der erhöhten Verwendungsfähigkeit der Unterseeboote. Waren sie doch für diese im getauchten Zustande zunächst das einzige Mittel, sich mit der Außenwelt zu verständigen.

Längere Zeit dachte man sogar in der Marine an die

1) Leonardo da Vinci, Der Denker, Forscher und Poet. Auswahl von Marie Herzfeld. S. 43. Fortpflanzung des Schalles in flüssigen und in festen Körpern. 3. Aufl. Jena 1911. Eugen Diederichs.

2) Colladon et Sturm: Ann. chim. et phys. (2) **36**. S. 113, 225. 1827; Pogg. Ann. **12**. S. 39, 161. 1828. Beudant: von Colladon und Sturm erwähnt.

Möglichkeit, die drahtlose Telegraphie mit elektromagnetischen Wellen durch die Unterwasserschalltelegraphie (U. T.), die militärisch manche Vorteile bieten würde, zu verdrängen. Waren doch schon mit den ersten einfachen Apparaten gelegentlich Reichweiten von 100 km und mehr erzielt worden. Wenn man diese Reichweiten nicht dauernd erhielt, so schob man die Schuld auf die Unvollkommenheit der Apparate, der Sender und Empfänger. Als Empfänger wurden nämlich Mikrophonempfänger verwandt, von denen bekannt ist, daß sie in der Empfindlichkeit stark schwanken. Selbst die besten in der Fernsprechtechnik verwandten Mikrophone schwanken um 200—300 Proz. und bei Spezialausführungen kann man durch sorgfältige Einstellung, die man einfach durch Probieren ermitteln muß, oft enorme Empfindlichkeiten erzielen, die das 10—100fache der normalen betragen. Die anfangs benutzten Mikrophone waren einstellbar und daher besonders schwankend.

Auch auf Unregelmäßigkeiten am Sender führte man die beobachteten starken Schwankungen in der Reichweite der U.T. zurück. Es wurden meist Sirenen verwandt, bei denen sich die rotierenden aufeinanderschleifenden Teile stark abnutzten. An „Verwehungen" des Schalles, wie sie in der Luft vorkommen, hatte man beim Wasser nicht gedacht. Sie schienen hier unmöglich zu sein.

Der Beginn des Krieges, mit dem der eine von uns auch als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter bei der Torpedoinspektion eintrat, gab der U.T. eine erhöhte Bedeutung. Es schien da erforderlich, zunächst einmal die grundlegende Frage zu klären, welchen Einfluß das Wasser bei der Ausbreitung des Schalles habe. Denn hiervon hing ja die ganze Entwicklungsmöglichkeit der U.T. ab.

Bei jedem Ausbreitungsvorgang hat man zwischen zwei Arten der Energieabnahme zu unterscheiden:

1. Der durch die räumliche Ausbreitung, d. h. die Verteilung der Energie auf immer größer werdende Flächen. Bei Kugelwellen folgt hieraus eine quadratische Abnahme mit der Entfernung vom Sender. Bei dieser Ausbreitungsart bleibt die Energie an sich erhalten, im Gegensatz zu der

2. Abnahme der Energie durch Absorption, Zerstreuung oder dgl. In diesem Falle wird überall im Medium ein Teil

der Schallenergie in Energie anderer Form, beispielsweise Wärme umgewandelt, oder durch unregelmäßige Zerstreuung oder dgl. der weiteren Ausbreitung entzogen. Das wesentliche ist, daß wir dann pro Kilometer immer dieselbe Abnahme auf einen bestimmten Bruchteil haben, ganz gleichgültig, ob die Entfernung vom Sender groß oder klein ist. Die Abnahme erfolgt nach einer Exponentialfunktion.

Im allgemeinen wirken beide Faktoren zusammen. Dann überwiegt bei kleinen Entfernungen die quadratische Abnahme, bei großen Entfernungen die exponentielle. Solange das quadratische Gesetz noch gültig ist, läßt sich die Reichweite durch Verbesserung der Apparate noch wesentlich erhöhen. Eine Steigerung der Senderleistung oder der Empfängerempfindlichkeit auf das 100fache ergibt eine 10fache Reichweite, d. h. beispielsweise von 10 km auf 100 km. Sobald aber die exponentielle Abnahme überwiegt, ist praktisch durch eine Verbesserung der Apparate fast gar nichts mehr zu gewinnen. Nehmen wir z. B. eine Abnahme auf die Hälfte pro km an, so ergibt sich für n km eine Abnahme auf $(^1/_2)^n$, d. i. für $n = 10$ km auf $^1/_{1000}$. In diesem Falle würde also eine Steigerung der Senderenergie oder Empfängerempfindlichkeit auf das 1000fache nur eine Steigerung der Reichweite um 10 km, d. h. z. B. von 10 auf 20 km, bewirken. Eine nochmalige Steigerung der Senderleistung auf das 1000fache, d. h. also auf das 1000000fache der ursprünglichen, würde wieder nur 10 km weiter, also auf 30 km reichen. Man sieht, daß dann 100 km niemals zu erreichen sind.

Auf Grund dieser Überlegungen hielten wir eine genaue Untersuchung der Ausbreitung des Schalles im Wasser für erforderlich, und zwar kam es weniger auf die Bestimmung der maximalen Reichweite an, die ja bisher schon oft gemessen war, als auf die viel schwierigere Untersuchung, nach welchem Gesetze die Abnahme der Schallenergie auf dem ganzen Wege erfolge.

II. Apparate und Meßverfahren.

1. Sender.

Zur Ausführung der Versuche standen seinerzeit verschiedene Sender und Empfänger zur Verfügung. Wenn wir

uns zunächst mit den Sendern befassen, so traf es sich sehr glücklich, daß gerade zu der Zeit, in der mit den Versuchen begonnen wurde, zwei *elektrisch betriebene Schallsender*, der Fessenden Oszillator der Submarine Signal Co. in Boston und der Elektromagnetsender der Signal-Gesellschaft m. b. H. in Kiel, bekannt wurden. Beide Sender sind im wesentlichen große Telephone, nur nach anderen Gesichtspunkten konstruiert. Die Membran wird elektromagnetisch durch Wechselstrom in Schwingungen versetzt und gibt ihre Energie als Schall an das Wasser ab. Die Membran und das sie erregende mechanische System haben deutlich ausgesprochene Eigenschwingungen, kommen also nur bei Resonanz stark ins

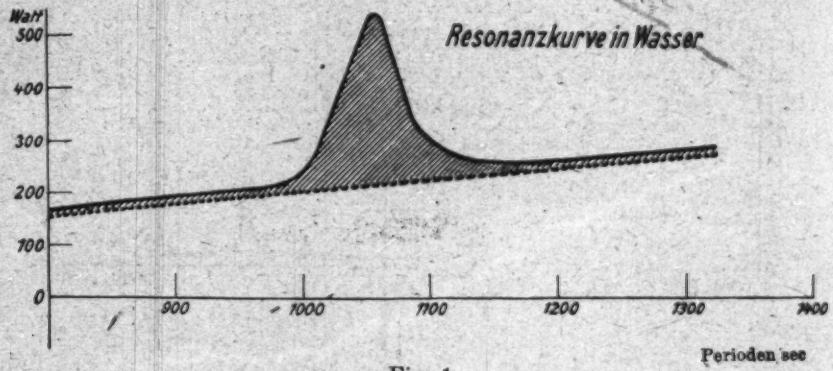


Fig. 1.

Schwingen. Es zeigte sich, daß die zugeführte elektrische Leistung, die an einem eingeschalteten Wattmeter unmittelbar abgelesen werden konnte, in gleicher Weise bei Resonanz stark anstieg, wie aus Fig. 1 zu ersehen ist. Da bei der Aufnahme dieser Kurve die Stromstärke absichtlich konstant gehalten wurde, sollte man ohne mechanische Schwingungen die punktierte Linie erwarten, da die Kupfer- und Eisenverluste mit der Frequenz langsam ansteigen. Die schraffiert gezeichnete Fläche, die eine normale Resonanzkurve bildet, überlagert sich diesen Verlusten. *Sie stellt die durch die mechanischen Schwingungen verursachten Verluste dar, die zum Teil durch innere Dämpfung verloren gehen, zum größten Teil aber akustisch ausgestrahlt werden.* Daß der erstere Teil

sehr klein war, ergab sich durch den Vergleich mit der Aufnahme der Resonanzkurve in Luft (Fig. 2), die wegen des Fehlens der Strahlungsdämpfung außerordentlich scharf war, also anzeigte, daß die innere Dämpfung sehr viel kleiner war. Für genaue Bestimmungen kann ihr prozentualer Anteil leicht in Rechnung gesetzt werden.[1])

Beide Apparate waren mit Gleichstrom polarisiert; die magnetische Anzugskraft war daher proportional dem Produkt aus der Gleichstrom- und der Wechselstromstärke. *Dann mußte die ausgestrahlte Leistung quadratisch mit dem Produkt dieser beiden Stromstärken wachsen.* Diese Folgerung fand sich auch experimentell weitgehend bestätigt. Verminderung allein der Wechselstromstärke auf $1/n$ verminderte den Aus-

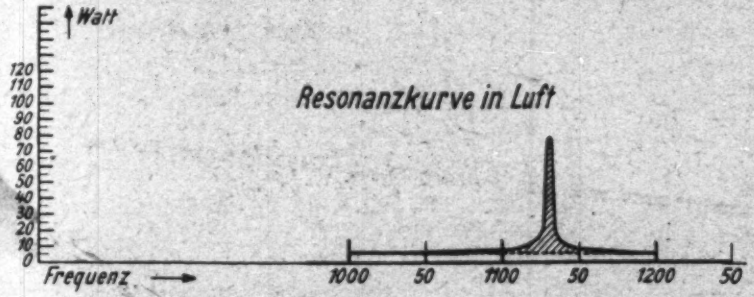


Fig. 2.

schlag am Wattmeter auf $1/n^2$, und zwar sowohl in der Resonanz wie außerhalb derselben. Man erhielt also wieder genau die Fig. 1, nur mit einem um $1/n^2$ verminderten Strommaßstab. Verminderung der Gleichstromstärke auf $1/n$ verminderte dagegen nur die Größe der schraffierten Fläche auf $1/n^2$, so daß die schwächer werdende mechanische Resonanzerscheinung gegenüber den konstanten elektrischen Verlusten bald gar nicht mehr hervortrat.

Das quadratische Gesetz fand sich weitgehend gut bestätigt. Nur bei großen Stromstärken trat schließlich Sättigung ein. Beim Fessenden Oszillator änderte sich gelegentlich auch

1) Diese Fragen sind inzwischen von den Herren Hahnemann und Hecht genauer untersucht worden. Vgl. Phys. Zeitschr. 20. S. 104, 245. 1919.

die Resonanzlage mit der Stromstärke, wenn die Vorspannung seiner inneren Membranen ungünstig gewählt wurde. Die Elastizität der sich durchbiegenden Membran, die hier für die Resonanzlage maßgebend ist, ist nämlich vom Ausschlag abhängig. Daher treten auch gelegentlich sogenannte „Kipperscheinungen" auf, ein plötzliches Umspringen des Schwingungszustandes bei einer gleichmäßigen Änderung der Frequenz, und zwar bei zu-

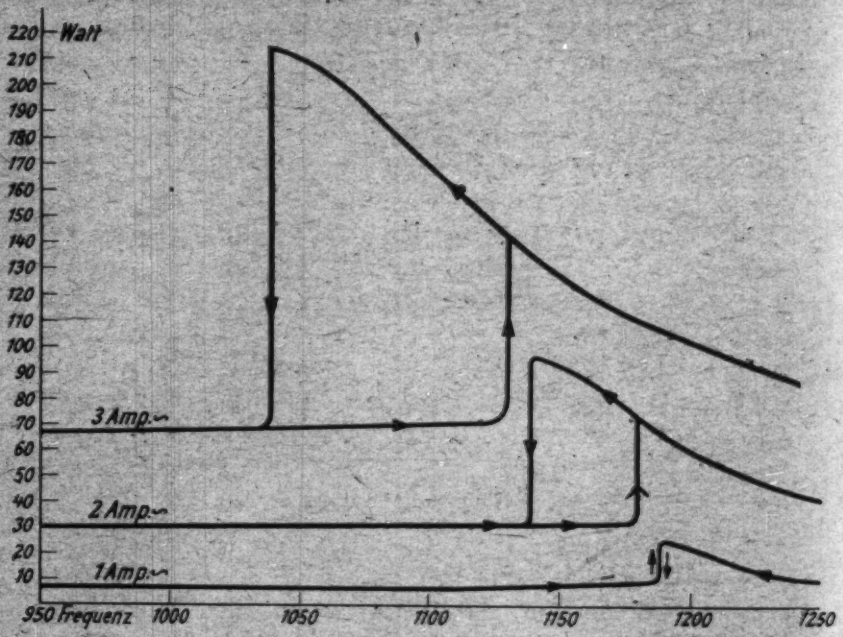


Fig. 3.

nehmender Frequenz an einer andern Stelle als bei abnehmender (Fig. 3). Die gleichen Erscheinungen sind bei elektrischen Schwingungskreisen mit Eisenkernspulen bekannt.[1]) Auch bei diesen ist die Selbstinduktion und damit die Resonanzlage von der Stromstärke abhängig. — Beim Sender der Signal-Gesellschaft wurde niemals eine Verschiebung bemerkt. Bei diesen werden als elastische Zwischenglieder longitudinal beanspruchte Stäbe benutzt, deren Elastizität bekanntlich bis an die Grenze

1) Vgl. Barkhausen, Labile Zustände elektrischer Systeme. Verh. d. D. Phys. Ges. XI. S. 267. 1909.

der Zerreißfähigkeit konstant ist. Daher ist der Sender der Signal-Gesellschaft zu Meßzwecken hervorragend geeignet.

Der mechanisch-akustische Schwingungsvorgang wurde auch rechnerisch untersucht[1]) und gute Übereinstimmung mit den Messungen gefunden. Besonders gab die folgende Erscheinung eine gute Bestätigung.

Bei Druckschwankungen von 1 Atm. berechnet sich die akustisch ausgestrahlte Leistung im Wasser zu 0,3 Watt/cm², so daß eine Membran von 1000 cm² „wirksamer Fläche" 300 Watt ausstrahlt. Höhere negative Druckschwankungen sind aber, falls der Sender nicht tief untergetaucht wird, unmöglich, da sonst *Vakuumbildung* eintritt, das Wasser sich von der Membran loslöst. In der Tat beobachtete man eine starke, schaumartige Blasenbildung an der Sendermembran, wenn die am Wattmeter angezeigte Leistungsdifferenz 300 Watt überschritt. Gleichzeitig schwankte der Zeiger des Instrumentes unregelmäßig hin und her, während er sonst ruhig feststand. Tauchte man den Sender tiefer unter, trat das Schwanken erst bei einer höheren Leistung ein. So konnte also experimentell das Eintreten einer bestimmten Druckschwankung sicher festgestellt werden und da sich dafür die akustisch ausgestrahlte Leistung in gleicher Höhe errechnete wie die am Wattmeter angezeigte Differenz, ist ihre Identität sichergestellt.

Hieraus folgt übrigens weiter ein wichtiges Konstruktionsprinzip, nämlich daß die Membran eines Senders eine durch die Senderleistung und die Eintauchtiefe bestimmte Größe nicht unterschreiten darf, damit keine Blasenbildung eintritt.

Daß die in Fig. 1 schraffierte Leistungsdifferenz tatsächlich akustisch ausgestrahlt wurde, wurde schließlich noch geprüft an einem aperiodischem Telephon, das in der Nähe des Senders ins Wasser gehängt wurde und auf ein Duddelgalvanometer geschaltet war. Die Ausschläge an diesem Galvanometer sind proportional dem Quadrat der durchfließenden Stromstärke, in unserem Fall also dem Quadrat der Schwingungsweite der Telephonmembran, d. h. direkt proportional der das Telephon treffenden akustischen Leistung.

---

1) Vgl. hierzu Hahnemann und Hecht, Phys. Zeitschr. 17. S. 601. 1916 und 18. S. 261. 1917.

In der Tat erhielten wir bei Änderungen der Frequenz des den Sender speisenden Wechselstromes am Galvanometer eine Resonanzkurve von derselben Form wie die in Fig. 1 gezeichnete schraffierte Fläche. Auch blieb bei Änderung der Gleich- oder Wechselstromstärke am Sender der maximale Ausschlag am Duddelgalvanometer stets proportional der maximalen Erhöhung des Wattverbrauches am Sender; das Verhältnis beider ist konstant wie die folgende Tabelle zeigt.

Differenz im Wattverbrauch	Ausschlag am Galvanometer	Verhältnis beider
280	45°	6,2
95	18°	5,3
160	30°	5,3
45	9,5°	4,7

Das war ein weiterer Beweis dafür, daß die Differenz im Wattverbrauch tatsächlich als Schallenergie ausgestrahlt wurde.

Durch diese Messungen wurde wohl zum ersten Male, wie uns scheint, *in einwandsfreier Weise die von einer Schallquelle akustisch ausgestrahlte Leistung festgestellt.* Dies war auch praktisch in zweierlei Hinsicht wichtig. Zunächst ergab sich hieraus der Wirkungsgrad der Sender in der Resonanzlage zu etwa 50% (vgl. Fig. 1). Eine wesentliche Erhöhung der Lautstärke war also nicht mehr durch Verbesserung der Apparate, sondern nur durch Steigerung der zugeführten Leistung möglich. Und zweitens konnte mit einem einmal geeichten Sender durch einfaches Regulieren der Stromstärken jede gewünschte Lautstärke quantitativ genau hergestellt werden, und zwar herab bis zu den kleinsten Lautstärken. Im allgemeinen wurde der Gleichstrom konstant gehalten und der Wechselstrom verändert. Dann ergab z. B. ein Sender 4 Watt ausgestrahlte Leistung pro 1 Amp.^{2} Wechselstrom, also 100 Watt bei 5 Amp., $^4/_{100}$ Watt bei $^1/_{10}$ Amp., $4 \cdot 10^{-6}$ Watt bei 10^{-3} Amp. usw. Hiervon wurde bei der Empfängerprüfung und bei den Reichweitenversuchen weitgehendst Gebrauch gemacht.

Außer den elektrischen Sendern wurden gelegentlich auch mit Druckwasser betriebene, von der Signal-Gesellschaft hergestellte *Sirenen* benutzt. Bei diesen kann die ausgestrahlte

Schalleistung nicht gemessen und somit auch nicht auf ihre Konstanz geprüft werden. Sie kann nur unter der wohl kaum exakt bestehenden Voraussetzung berechnet werden, daß der pulsierend austretende Wasserstrom zerlegt werden kann in einen gleichförmigen akustisch unwirksamen und einen sinusförmigen, hin und zurückflutenden Anteil, dessen Amplitude A etwa gleich der mittleren, gleichförmigen Strömung zu setzen ist, da ja der Wasserstrom zeitweise ganz null wird. Die Rechnung sei hier nur kurz angedeutet.

Das Geschwindigkeitspotential eines von einer Schallquelle ausgehenden Zuges von harmonischen Wellen ist

$$\varphi = -\frac{A}{4\pi r}\cos \varkappa (a t - r).$$

Daher ist der gesamte durch eine Kugel vom Radius r hin und her pulsierende Strom

$$4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A \cos \varkappa a t,$$

wenn $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ ist. A ist der Maximalbetrag der an der Schallquelle zugeführten Strömung. Nach Raleigh[1]) beträgt nun in diesem Fall die von der Schallquelle in den Raum ausgestrahlte Leistung

$$W = \frac{\varrho \varkappa^2 a A^2}{8\pi} = 1{,}05 \frac{n^2}{10^5} A^2 \text{ erg/sec}.$$

Setzen wir A in lit/sec ein, so erhalten wir

$$W = 1{,}05 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 A^2_{\text{lit/sec}} \text{ Watt}.$$

Bei den benutzten Sirenen war A etwa 10 lit/sec, also die ausgestrahlte Leistung bei der Frequenz $n = 1000$/sec etwa 100 Watt. Da der Betriebsdruck etwa 6 Atm. betrug, berechnet sich der Wirkungsgrad zu nur 2 Proz. Die Rechnung ist daher nur mit Vorsicht hinzunehmen, da durch andere mitschwingende Teile, z. B. das Zuleitungsrohr, auch noch Schall erzeugt werden kann.

---

1) Raleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen. II. S. 128 ff. 1880.

Ein Vergleich der beiden zur Verfügung stehenden Sendertypen, der freilich wegen des sehr verschiedenen Toncharakters recht ungenau ist, ergab für beide die gleiche Größenordnung der ausgestrahlten Schallleistung (300 Watt).

2. Empfänger.

Als Empfänger wurden aus Gründen der Einfachheit und Bequemlichkeit in der Hauptsache *Mikronenempfänger* benutzt, in einer Ausführung, wie sie im wesentlichen auch auf Handelsschiffen zum Abhören von Unterwasserglockensignalen benutzt werden. Die Mikrophone sind in Bronzekapseln wasserdicht eingeschlossen (Fig. 4). Ein Teil der Kapselwand

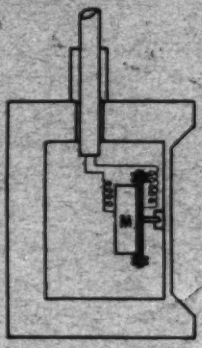


Fig. 4.

wird gebildet aus der die Schallwellen aufnehmenden Membran, mit der das eigentliche Mikrophon M akustisch leitend in Verbindung steht. Die Stromzuführung übernimmt ein wasserdicht in die Kapsel eingezogenes Gummiaderkabel. Die Mikrophone konnte man vom Empfangsschiff aus am Kabel leicht beliebig tief ins Wasser hängen. Ihre Schaltung ist aus Fig. 5 zu ersehen. Der Gleichstrom J wurde zwei bis drei Trockenelementen E entnommen und durch einen Regulierwiderstand R_r auf 50 Milliampere einreguliert. Die durch die Schallwellen entstehenden Stromschwankungen wurden durch den Transformator T dem Fernhörer F zugeführt. Die *Lautstärkemessung* geschah nach der Parallelohmmethode, indem der Widerstand R so lange verkleinert wurde, bis der Senderton gerade nicht mehr im Fernhörer wahrnehmbar war. Diese

Einstellung war auf etwa 20 Proz. genau, Nebengeräusche im Mikrophon oder am Meßort verursachten freilich oft wesentlich größere Fehler. Die „Lautstärke" wurde berechnet nach der Formel

$$L = 1 + \frac{1000}{R},$$

indem der Kombinationswiderstand T parallel $F = \frac{T \cdot F}{T + F}$ für Wechselstrom etwa 1000 Ohm betrug.[1]) F war ein 1000-ohmiger Fernhörer mit einem Wechselstromwiderstande

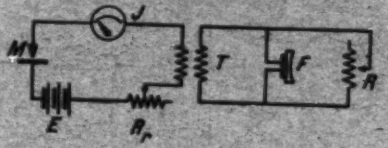


Fig. 5.

von etwa 3000 Ohm. Die so berechnete „Lautstärke" ist zunächst nur ein Maß für die vom Mikrophon erzeugte Wechselstromstärke und es war zu prüfen, welche akustische das Mikrophon treffende „Wasserlautstärke" dieser entsprach. Ein roher Versuch zeigte schon, daß hier sehr große Fehler unvermeidlich sind. Eine geringe Umlagerung der Mikrophonkontakte, wie sie oft bei den geringsten Erschütterungen schon eintrat, konnte die gemessene „Lautstärke" um das zwei- bis dreifache ändern, obwohl die Wasserlautstärke genau konstant gehalten wurde. Es hat in diesem Falle gar keinen Zweck, eine möglichst genaue Einzelmessung zu machen. Dagegen erhält man einigermaßen brauchbare Resultate, aus denen sich auch Gesetzmäßigkeiten ableiten lassen, wenn man das Mittel aus sehr vielen Messungen, die unregelmäßig durcheinander liegen, nimmt. So wurde die Beziehung zwischen berechneter und Wasserlautstärke in folgender Weise geprüft. Sechs Empfänger wurden in 1—5 m Abstand vom Sender ins Wasser gehängt. Zum Empfangstelephon parallel lagen abwechselnd

1) Die übliche Rechnung, bei der nur die Stromverzweigung zwischen R und F betrachtet wird, ist falsch. Bei kleinerem Widerstande T reguliert R z. B. praktisch erst von da ab, wo es kleiner als T wird.

durcheinander die Widerstände $R = 1, 10, 100, \infty$ Ohm, was also berechneten Lautstärken von 1000, 100, 10, 1 entspricht. Für jede Widerstandsstufe wurde mehrmals diejenige Senderstromstärke bestimmt, bei der man gerade noch auf dem Empfänger einen Ton hörte. Obwohl die so bestimmten Senderstromstärken unter denselben Bedingungen oft mehr als 1 : 3 voneinander abwichen, ließ sich doch deutlich erkennen, daß die Änderungen der Senderstromstärke durchweg geringer waren als die zugehörigen Lautstärken. Bei tiefen Perioden war die Senderstromstärke sehr nahe der Wurzel aus der nach obiger Formel berechneten Lautstärke proportional, d. h. eine Änderung von R im Verhältnis 1 : 100 trat schon bei einer Änderung der Stromstärke von 1 : 10 ein. Hiernach wäre die berechnete Lautstärke nicht ein Maß für die Amplituden, sondern für deren Quadrat, d. h. für die akustische Leistung im Wasser. Bei höheren Periodenzahlen war aber mehr das Umgekehrte der Fall.

Mit einem geeichten Sender, bei dem die ausgestrahlte Leistung pro Ampere bekannt war, konnte so auch eine *absolute Eichung* der Empfänger vorgenommen werden unter der Annahme, daß die Ausbreitung der Schallenergie in geringen Abständen vom Sender quadratisch vor sich geht, die Schalldichte sich also aus der Senderleistung dividiert durch die Oberfläche der Kugel mit dem Empfängerabstand als Radius berechnen läßt.[1]) Daß der Sender nach allen Seiten gleich stark wirkte, wurde durch Drehen des Senders nachgewiesen. Es ergab sich, daß eine Schalldichte von der Größenordnung 10^{-15} Watt/cm^2 am Ort des Mikrophons erforderlich war, um einen hörbaren Ton zu erzeugen Das menschliche Ohr braucht etwa 10^{-18} Watt/cm^2. Das steht in guter Übereinstimmung mit der beobachteten Tatsache, daß der Schall unter Wasser in dem Luftraum z. B. eines Unterseebootes mit dem bloßen Ohr etwas schlechter empfangen

1) Streng genommen müssen hierbei Sender und Empfänger von allen reflektierenden Wänden, also von dem Grund und der Wasseroberfläche einen Abstand haben, der groß gegen ihren gegenseitigen Abstand ist. Dieser muß andererseits groß gegen die Senderabmessungen sein. Diese Bedingungen sind schwer zu erfüllen und waren es bei der Eichung auch nicht, so daß nur die Größenordnung richtig ist.

wird als mit der Unterwasserschallapparatur. Es geht ja nur etwa $^1/_{1000}$ des Schalles vom Wasser in die Luft über.

Wegen der großen Inkonstanz der Mikrophone wurden, wo es die Verhältnisse gestatteten und es auf sehr genaue Messungen ankam, besonders bei den ersten genauen Versuchsreihen neben dem Mikrophon auch die vorher erwähnten elektrischen *Sender als Empfänger* benutzt. Die Wirkungsweise der elektrischen Sender als Empfänger ist dieselbe, wie die eines angesprochenen Telephons. Infolge der Membranschwingungen und der dadurch bewirkten Änderung des magnetischen Flusses werden in der Magnetspule des Apparates elektromotorische Kräfte induziert, die in einem unmittelbar angeschalteten Telephon einen Ton erzeugen. Die Lautstärke wurde auch hier durch Schwächung des Stromes bis zum Verschwinden des Tones gemessen. Da Sender und zugehöriges Telephon zusammen nur 40 Ohm wirksamen Widerstand hatten, wurde die Schwächung nicht durch Parallelohm, sondern durch einen Vorschaltwiderstand hergestellt (Fig. 6).

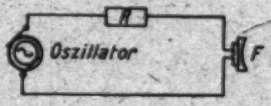


Fig. 6.

Die Lautstärke berechnet sich dann nach der Formel

$$L = 1 + \frac{R}{40}.$$

$R = 0$ ergibt die Lautstärke 1, d. h. die kleinste, eben noch hörbare Lautstärke. Bei sehr großen Lautstärken, nur wenige Meter vom Sender entfernt, konnte der akustisch induzierte Empfangsstrom unmittelbar durch ein an Stelle des Fernhörers F eingeschaltetes Milliamperemeter gemessen werden. Diese sehr genaue Messung wurde nochmals zur Prüfung der Theorien benutzt. Wie zu erwarten, ergab sich Proportionalität dieses Stromes mit der Senderwechselstromstärke, sowie der Erregerstromstärke des Senders und der des Empfängers. Nur bei sehr großen Stromstärken traten Sättigungserscheinungen ein. Es ist zu beachten, daß neben dem Sender jetzt auch

der Empfänger eine ausgesprochene Resonanz besaß, und beide im allgemeinen nicht genau übereinstimmten. Das letztere war bis zum gewissen Grade eine Erleichterung. Wurde nämlich eine mittlere Frequenz eingestellt, so konnte diese in ziemlich weiten Grenzen geändert werden, ohne daß der Empfangsstrom sich änderte.

Die Empfindlichkeit des Senders als Empfänger war etwa zehnmal geringer als die guter Mikrophone.[1]) Dafür war aber die sicher gewährleistete Konstanz der Messung ein sehr großer Vorteil. Freilich brachte die Verwendung der Sender als Empfänger erhebliche Schwierigkeiten mit sich. Wegen des großen Gewichtes — ein Sender wiegt 250 kg — war er nur am Kran ins Wasser zu lassen. Ferner erfordert er 6 Amp. Gleichstromerregung; diese Versuche konnten also nur gemacht werden von Schiffen aus, die elektrische Maschinen an Bord hatten.

3. Meßverfahren.

Zur Durchführung der oben genannten Versuche über die Schallausbreitung waren zwei Stationen erforderlich, eine Sende- und eine Empfangsstation, von denen die eine an Land, die andere auf einem Schiff oder beide auf Schiffen untergebracht waren. Eine Station war gewöhnlich fest, d. h. sie änderte ihren Standort nicht, während die zweite Station beweglich war. Die Abstandsbestimmungen zwischen beiden Stationen wurden gemacht entweder durch Peilungen von Bord aus nach Landmarken oder einfach durch Ablaufen eines Schiffes mit konstanter bekannter Geschwindigkeit von der Gegenstation und Zeitmessung. Wo es möglich war, wurden beide Methoden kombiniert und aus den nach beiden Methoden gefundenen Werten der Mittelwert genommen. Versetzung durch Wind und Strom wurde nach Möglichkeit berücksichtigt. Die Fehler in der Entfernungsbestimmung betrugen etwa 5—10 Proz.

Da ein großer Teil der Empfangsmessungen mit Mikrophonen gemacht werden mußte, wurden zur Verminderung der Fehler sämtliche Lautstärkemessungen unter Benutzung mehrerer Empfangsapparaturen von mehreren Beobachtern,

1) Zu den späteren genauen Messungen wurden zum Teil weniger empfindliche, aber dafür etwas konstantere Mikrophone benutzt.

mindestens zwei, gleichzeitig ausgeführt. Die von den verschiedenen Beobachtern auf verschiedenen Empfangsapparaturen gemessenen Werte wurden dann zu Mittelwerten vereinigt.

Um die Genauigkeit noch zu vergrößern, wurde für jeden Beobachtungsort, d. h. für jeden Abstand vom Sender, in dem die Lautstärke gemessen wurde, mit verschiedenen Stromstärken, die durch verschiedene Morsezeichen gekennzeichnet waren, gesendet und für jede Stromstärke die Lautstärke bestimmt. Aus allen so erhaltenen Werten wurden die Lautstärken pro Ampere-Senderstrom gebildet und aus diesen Werten wieder der Mittelwert gebildet. Die Stromstärken wurden dabei in den Grenzen 1 : 70, die ausgestrahlte Schallleistung also fast wie 1 : 5000 geändert. Diese Methode ist sehr zuverlässig. Prinzipielle Fehler der Parallelohmmethode fallen bei ihr fast ganz heraus; denn es werden bei ihr die Mikrophone in allen Entfernungen, wenigstens zum Teil, mit derselben Lautstärke, insbesondere auch mit der geringsten wahrnehmbaren Lautstärke beansprucht. Dadurch wurde ferner gleichzeitig festgestellt, welche geringste Schalleistung für jede Entfernung erforderlich war.

Um sich ein Bild von der Genauigkeit der Methode machen zu können, seien in der folgenden Tabelle die an einem Punkt mit verschiedenen Mikrophonempfängern gemessenen Werte mitgeteilt.

Ampere	*G*-Empfänger			*M*-Empfänger		
	P_1	P_2	*L*/Amp.	P_1	P_2	*L*/Amp.
14	10	7	9	15	15	5
8	10	8	14	20	20	6
4	30	30	8	50	40	5,5
2	40	40	12,5	50	70	8,3
1	50	80	15	300	120	6,5
0,5	200	300	10	10000 (?)	—	2 (?)
			Mittel = 11			Mittel = 6,5

Die Senderstromstärke wurde von 14 bis 0,5 Amp. geändert. Unter P_1 und P_2 sind die mit zwei Empfängern von zwei Beobachtern aus mehreren Messungen ermittelten Parallelohmwerte und unter *L*/Amp. die daraus ermittelten Lautstärken pro Amp. mitgeteilt. Die so ermittelten Werte weichen

trotz der Ungenauigkeit der Methode und der Schwierigkeit der Messung nicht zu sehr voneinander ab.

Zum Vergleich sei auch eine Meßreihe mitgeteilt, bei der ein Sender als Empfänger diente.

Amp.	R_1	R_2	$\frac{R_1 + R_2}{2 \text{ Amp.}}$	
14	8540	7040	556	Sender gesättigt
8	3540	4040	474	
4	2040	3040	635	
2	1540	2040	895	
1	840	940	890	
0,5	290	240	1060	
0,2	140	—	700	
			Mittel = 759	

Die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Zahlen bedeuten die von verschiedenen Beobachtern gemessenen Widerstandswerte, bei denen Verschwinden der Lautstärke eintrat. In der letzten Reihe sind die Mittelwerte aus beiden Messungen dividiert durch die Amperezahl enthalten.

Die beiden mitgeteilten Tabellen ergeben, daß innerhalb der Versuchsfehler sowohl beim Empfang mit Mikrophonen[1]) wie mit Oszillator die Lautstärke proportional der Senderstromstärke zunimmt, daß also die Lautstärke dividiert durch die Senderstromstärke für eine bestimmte Entfernung als konstant angenommen werden kann, obwohl die Senderstromstärke wie 1 : 70 geändert wurde. Die teils erheblichen Abweichungen vom Mittelwerte fallen ganz unregelmäßig und zeigen keine Abhängigkeit von der Stromstärke. Sie sind durch die Unsicherheit der Hörmessung bedingt.

III. Ergebnis der Versuche.

1. Abnahmegesetz.

Die ersten systematischen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Lautstärke von der Entfernung wurden in der beschriebenen Weise am 17. und 18. Mai 1915 in der Eckern-

1) Die oben mitgeteilte Abweichung der Mikrophone von der Proportionalität wurde hier zum Teil dadurch kompensiert, daß der Sender bei 14 und 8 Ampere schon etwas übersättigt war.

förder Bucht angestellt. Der Abstand wurde etwa von Kilometer zu Kilometer geändert.

In den folgenden Tabellen sei der Anschaulichkeit wegen eine vollständige Meßreihe mitgeteilt. Die Tabellen a bis h enthalten die an den einzelnen Punkten gemessenen Lautstärken. Die erste Spalte jeder Tabelle enthält die Stromstärke, mit der der Sender betrieben wurde, die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Werte bedeuten die von zwei Beobachtern mit einem Oszillator gemessenen Lautstärken. Aus je zwei zusammengehörigen Werten der von beiden Beobachtern gemessenen Lautstärken wurde der Mittelwert gebildet und durch die Amperezahl dividiert. Der so entstandene Wert ist in Spalte 4 enthalten. Die Spalten 5—7 und 8—10 geben entsprechende Messungen mit zwei Mikrophonempfängern wieder. Aus den für jeden einzelnen Punkt und für jeden Empfänger gefundenen Werten für die Lautstärke pro Ampere wurden die Mittelwerte gebildet.

18. Mai 1915 9—12 Uhr vormittags 2 Versuchsreihen.

R = Vorschaltwiderstand + 40 Ohm.

P = Parallelwiderstand. $L = \frac{L_1 + L_2}{2}$.

$L_1 = 1 + \frac{1000}{P_1}$, $L_2 = 1 + \frac{1000}{P_2}$

a) Entfernung 0,93 km.

Amp.	Oszillator			*G*-Empfänger			*M*-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	10040	—	717	3	—	24	3	—	24
8	5040	—	630	4	—	31	8	—	16
4	4040	—	1010	5	—	50	4	—	62
2	2040	—	1030	10	—	50	40	—	12
1	1040	—	1040	16	—	66	70	—	14
0,5	640	—	1280	500	—	6	K. E.	—	(2)
0,2	440	—	2200	200	—	30	„	—	(5)
	Mittel = 1142			Mittel = 37			Mittel = 26		

b) Entfernung 2,16 km.

Amp.	Oszillator R_1	Oszillator R_2	Oszillator $\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	G-Empfänger P_1	G-Empfänger P_2	G-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$	M-Empfänger P_1	M-Empfänger P_2	M-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	8540	7040	556	10	7	9	15	15	5
8	3540	4040	474	10	8	14	20	20	6
4	2040	3040	635	30	30	8	50	40	5,5
2	1540	2040	895	40	40	12,5	50	70	8,3
1	840	940	890	50	80	15	300	120	6,5
0,5	290	240	1060	200	300	10	10000	—	2 (?)
0,2	140	—	700				(?)		
		Mittel = 759			Mittel = 11			Mittel = 6,5	

c) Entfernung 3,24 km.

Amp.	Oszillator R_1	Oszillator R_2	Oszillator $\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	G-Empfänger P_1	G-Empfänger P_2	G-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$	M-Empfänger P_1	M-Empfänger P_2	M-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	3540	5040	307	20	20	4	40	30	2,1
8	2040	2040	255	40	30	3,7	40	30	3,7
4	940	1040	247	60(?)	—(?)	4	50	50	5,2
2	540	790	333	40	60	10	300	80	4,2
1	290	440	365	1000	100	6,5	—	1000	2
0,5	—	240	480	—	1000	4	—	—	—
0,2	—	(?)		—	10000	5,5			
		Mittel = 331			Mittel = 5,4			Mittel = 3,4	

d) Entfernung 4,07 km.

Amp.	Oszillator R_1	Oszillator R_2	Oszillator $\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	G-Empfänger P_1	G-Empfänger P_2	G-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$	M-Empfänger P_1	M-Empfänger P_2	M-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	2040	2340	163	20	15	4,1	20	20	4
8	1040	1040	130	30	30	4	40	30	3,7
4	440	—	110	30	80	5,5	40	90	5
2	540	—	270	100	90	5,7	200	150	3,4
1	240	—	240	1000	—	2	—	—	—
0,5	40	—	88						
0,2	—	—	—						
		Mittel = 165			Mittel = 4,2			Mittel = 4,02	

e) Entfernung 4,99 km.

Amp.	Oszillator			*G*-Empfänger			*M*-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	1040	1040	74	20	20	3,6	30	40	2
8	640	440	67,5	50	60	2,3	100	80	1,5
4	190	240	17,5	200	200	1,5	200	300	1,2
2	40	40	20	300	500	1,8	250	600	1,9
1	140	—	140	1000	—	2	—	—	
0,5	—	—	—	10000	—	2	—	7 (?)	
			Mittel = 68,8			Mittel = 2,2			Mittel = 1,6

f) Entfernung 6,18 km.

Amp.	Oszillator			*G*-Empfänger			*M*-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	240	240	17	100	100	0,8	200	200	0,5
8	40	40	5	—	200	0,75	10000	300	0,3
4	—	—	—	1000	300	0,8	1000	300	0,8
2	—	—	—		1000	1	10000	300	1,3
			Mittel = 11			Mittel = 0,8			Mittel = 0,7

g) Entfernung 7,12 km.

Amp.	Oszillator			*G*-Empfänger			*M*-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	40	80	4	150	150	0,5	300	200	0,3
8	40	—	5	300	400	0,49	300	500	0,46
4	—	—		500 (?)	600	0,7	500	500	0,75
			Mittel = 4,5			Mittel = 0,5			Mittel = 0,5

h) Entfernung 7,96 km.

Amp.	Oszillator			*G*-Empfänger			*M*-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	—	—	—	500		0,2	500	—	0,2
8	—	—	—	500	10000	0,25	500	10000	0,25
4	—	—	—	10000	—	0,27	—	—	
						Mittel = 0,25			Mittel = 0,23

i) Zusammenstellung der Lautstärken pro 1 Amp.

Für den Oszillator ist $L/\text{Amp.} = \frac{1}{40} \frac{R_1 + R_2}{2\,\text{Amp.}}$ gesetzt.

km	Oszillator	G-Empfänger	M-Empfänger	$\frac{GE + ME}{2}$
0,93	28,5	37	26	31
2,16	19	11	6,5	9
3,24	8,2	5,4	2,4	4,4
4,07	4,1	4,2	4,0	4,1
4,99	1,6	2,2	1,6	1,9
6,18	0,28	0,8	0,7	0,8
7,12	0,11	0,5	0,5	0,5
7,96	—	0,25	0,23	0,24

Die auf diese Weise für die einzelnen Punkte gefundenen Werte sind in Tab. i zusammengestellt. Die für den Oszillator gefundenen Werte sind durch 40 zu dividieren, um „Lautstärke" zu erhalten. In Spalte 5 der Tab. i sind die für den G-Empfänger und den M-Empfänger gefundenen Werte noch einmal zu Mittelwerten vereinigt.

Die hier mitgeteilte Tab. i und eine zweite, hier nicht mitgeteilte Versuchsreihe bilden die Grundlage für die Fig. 7. In dieser Figur ist die Abhängigkeit der Lautstärke von der Entfernung graphisch dargestellt. Als Abszissen sind die Entfernungen in gewöhnlichem, linearem Maßstabe, als Ordinaten die Lautstärken in logarithmischem Maßstabe dargestellt. Die an zwei verschiedenen Tagen von zwei verschiedenen Beobachtern gemessenen Werte lassen als Mittel überraschend genau einen geradlinigen Verlauf der Kurven in der Figur erkennen. Ein geradliniger Verlauf bei logarithmischem Maßstabe bedeutet aber, daß die Lautstärke auf jeden Kilometer um einen gewissen Bruchteil geschwächt wird und zwar immer um denselben Bruchteil, ganz gleich, ob man etwa von 1 auf 2 km oder von 6 auf 7 km geht. Durch diese Messungen war der sichere Beweis erbracht, daß *von quadratischer Abnahme keine Rede sein kann, die Abnahme vielmehr ein Absorptionsgesetz befolgt*, und zwar ergab sich bei diesem Versuch die sehr starke Absorption von 2,3 : 1 pro Kilometer. Beim Fort-

schreiten um je 3 km sinkt die Lautstärke also auf 1 : 2,8³, d. h. auf rund den zehnten Teil. In Übereinstimmung mit diesem Ergebnis wurde beobachtet, daß zur Überbrückung von

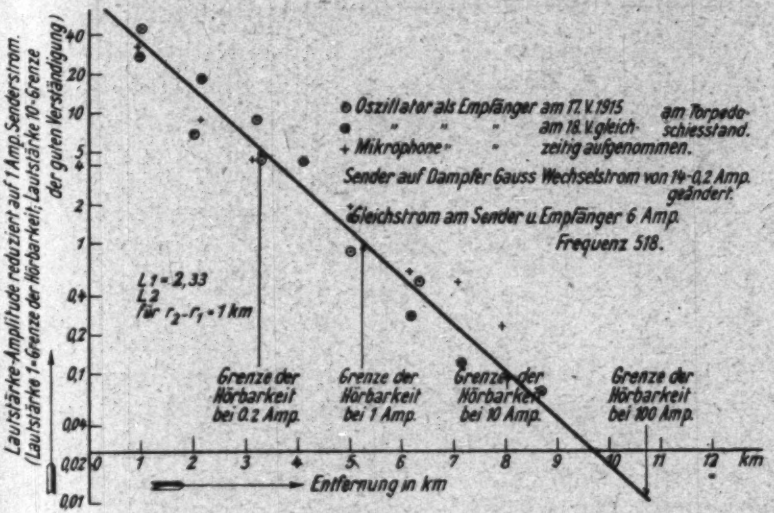


Fig 7.

8 km 10 Ampere am Sender erforderlich waren, zur Überbrückung von 5 km nur noch 1 Ampere und für 3 km $^1/_5$ Ampere Senderstrom ausreichte. Die aufgewandte Leistung wächst quadratisch mit der Stromstärke und es waren für 8 km ein Kilowatt, für 5 km 10 Watt, für 3 km 0,4 Watt, d. h. $^1/_{2500}$ der Leistung für 8 km erforderlich. Für 11 km wären hiernach 100 Kilowatt, für 14 km 10000 Kilowatt erforderlich gewesen. *Es war also als praktisch vollkommen unmöglich nachgewiesen, selbst bei wesentlicher Verbesserung der Apparate eine irgendwie größere Reichweite zu erzielen.*

2. Einfluß der Wassertiefe.

Nach diesen ersten Versuchen herrschte zunächst große Ratlosigkeit. So geringe Reichweiten waren bis dahin noch nie beobachtet worden. Man konnte sich den Grund dieser starken Abnahme überhaupt nicht erklären und vermutete, daß die Wassertiefe oder die Beschaffenheit des Bodens vielleicht

die Schuld sein könnten. Es wurde deshalb eine Wiederholung der Versuche unter den verschiedensten Bedingungen vorgenommen.

Wir wollen zunächst die Ergebnisse einiger Versuche mitteilen, die im Juni 1915 bei verschiedenen Wassertiefen in der Danziger Bucht angestellt wurden. Da das Abnahmegesetz bereits bekannt war, wurden nur Stichproben auf 4 und 8 Seemeilen und in möglichst weiter Entfernung gemacht. Sie

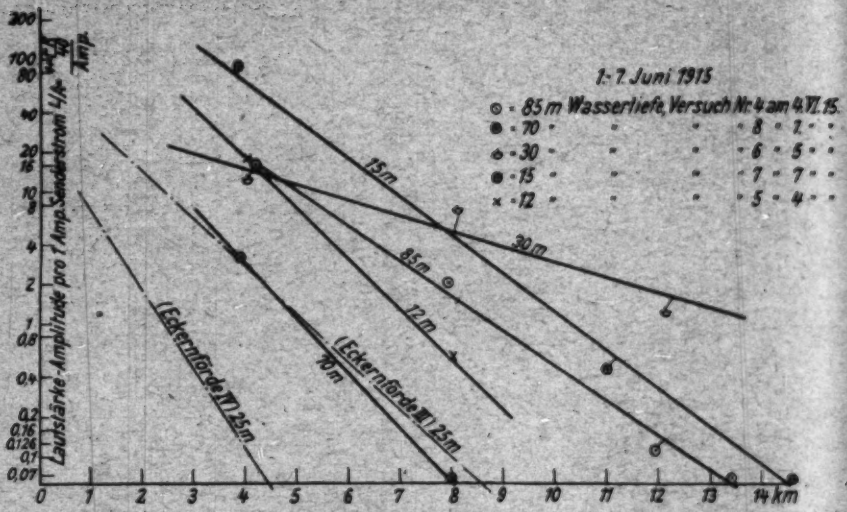


Fig. 8.

wurden ausgeführt bei 12, 15, 30, 70 und 85 m Wassertiefe (Fig. 8). Die Messungen sind nicht sehr genau, lassen aber doch den Schluß zu, daß *die verschiedene Wassertiefe sicher nicht die Ursache für die starke Dämpfung*, die auch hier auftrat, *sein konnte.*

Es war schon bei den Eckernförder Versuchen beobachtet worden, daß sich die Lautstärke innerhalb einiger Minuten langsam änderte, auch wenn der Oszillator als Empfänger benutzt wurde, die Apparate also nicht die Ursache dafür sein konnten. Das trat hier in noch höherem Maße ein. Es kamen Lautstärkenunterschiede von 1 : 5 vor. Bei tiefem Wasser hörte man ferner oft ein langes Nachhallen wie in einer Kirche. Morsezeichen kamen dann sehr verschwommen an und waren

schwer oder gar nicht zu entziffern. Es herrschte an diesen Tagen Sonnenschein und meist glatte See. Temperaturmessungen mit einem elektrischen Thermometer ergaben in größeren Tiefen um 6 bis 8° kälteres Wasser als an der Oberfläche. Vgl. hierzu den folgenden Abschnitt.

Während also bei Wassertiefen zwischen 10 und 100 m keine Unterschiede zwischen den verschiedenen Tiefen hinsichtlich der Dämpfung des Schalles festgestellt wurde, liegen die Verhältnisse anders, wenn der Schall größere Strecken flachen Wassers durchläuft.

Der obere Teil der Fig. 9 zeigt die äußeren Bedingungen des in Landnähe ausgeführten Versuches. Der Sender stand in 3 km Abstand von der Landungsbrücke. Gegeben wurde mit 517 Perioden und zwei verschiedenen Stromstärken. 3 Mikrophone wurden von einem Ruderboot aus ins Wasser gehängt. Die Lautstärke wurde wie früher angegeben gemessen, die Tiefe wurde durch Lotung festgestellt, die Entfernung an der Landungsbrücke durch Abschreiten, die Entfernungen zwischen der Landungsbrücke und der ausgelegten Markierungsboje durch Abrudern mit konstanter Geschwindigkeit nach der Zeit bestimmt. Die Zwischenwerte wurden geschätzt. Daher sind die Entfernungen nicht sehr genau, nur der Größenordnung nach richtig.

Die untere Kurve der Fig. 9 zeigt die von See her anfangs langsam, später schnell abnehmende Lautstärke.

Der Schall wird also beim Durchlaufen größerer Längen flachen Wassers sehr stark geschwächt Bei 517 Perioden, d. h. rund 3 m Wellenlänge, geht die Schallautstärke bei einer Wassertiefe von 3 m, d. h. von einer Wellenlänge, beim Durchlaufen von 100 m auf den vierten Teil, bei 2 m Wassertiefe auf den sechzehnten Teil zurück. Bei 4 bis 5 m Wassertiefe ist die Schwächung wesentlich geringer, schätzungsweise $^1/_2$ für 100 m.

Auf 1 km Länge würde die Schwächung von 100 m Länge 10mal nacheinander eintreten. Bei 2 m Wassertiefe würde dann die Lautstärke auf $(^1/_{10})^{10}$, bei 3 m Wassertiefe auf $(^1/_4)^{10}$, bei 4 m Wassertiefe auf $(^1/_2)^{10} = {}^1/_{1000}$ geschwächt werden. Hiernach ist mit einiger Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß bei

einer Wassertiefe von über 9 m, d. h. von über 3 Wellenlängen, der Einfluß auf die Schwächung des Schalles zu vernachlässigen ist. In der Tat zeigen die vorher mitgeteilten Reichweiten-

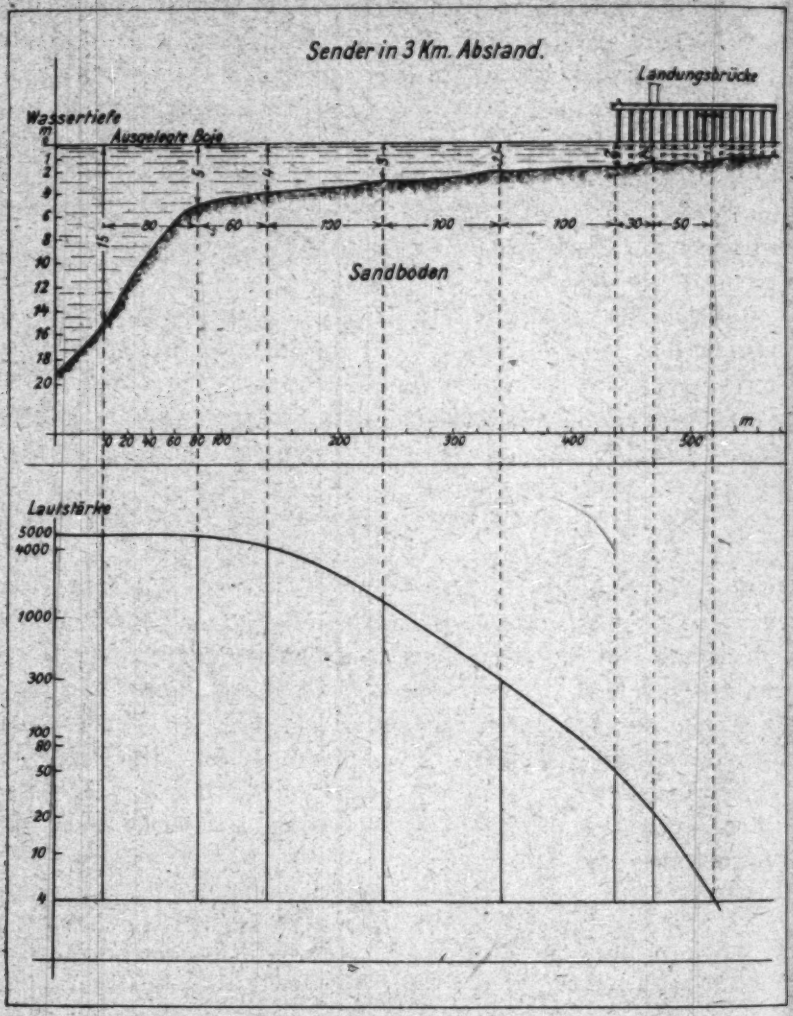


Fig. 9.

versuche, daß zwischen 12 und 80 m Wassertiefe kein merklicher Unterschied in der Dämpfung des Schalles eintritt. Spätere Versuche ergaben meist eine Schwächung, wenn der Schall über Sandbänke laufen mußte, die weniger als 6 m Wasser hatten.

Die Tatsache, daß bei geringer Wassertiefe eine sehr starke Dämpfung eintritt, ist wohl dadurch zu erklären, daß Sandboden den Schall sehr stark dämpft und nicht durchläßt. Das wurde auch experimentell bewiesen, indem Mikrophone am Strande eingegraben wurden. Schläge gegen einen im Boden gesteckten Metallstab waren in unmittelbarer Nähe sehr laut zu hören, aber schon in einer Entfernung von wenigen Metern nicht mehr. Würde sich der Schall auch im Sandboden fortpflanzen, so müßte auch in der Nähe des Bodens im Wasser eine größere Lautstärke herrschen. Das Gegenteil ist aber der Fall, die Lautstärke ist unmittelbar am Boden geringer.

Nach verschiedenen Versuchen ist die Lautstärke unabhängig von der Tiefe, in der sich Sender oder Empfänger befinden, so lange sie nicht unmittelbar auf dem Meeresboden liegen oder von der Wasseroberfläche weniger als eine Wellenlänge entfernt sind. Wenn sich Sender oder Empfänger der Oberfläche mehr als eine Wellenlänge (bei 500 Perioden gleich 3 m) nähern, so nimmt die Lautstärke merklich ab. Direkt an der Oberfläche ist die Lautstärke Null. Bei $^1/_3$ Wellenlänge sinkt sie auf $^1/_4$ des Wertes, den sie bei 3 oder 10 m hat. Das ist theoretisch auch etwa zu erwarten, da die Mikrophone auf Druckschwankungen ansprechen, die ja in der Oberfläche Null sind. Versucht man freilich die ganze Schallausbreitung im Wasser rechnerisch darzustellen, so findet man, wenn man die Oberfläche als akustisch weich betrachtet, d. h. die Grenzbedingung Schalldruck = 0 einführt, daß in größerer Entfernung vom Sender überhaupt keine Lautstärke mehr vorhanden sein sollte.

3. Die Ursache für die Dämpfung.

Durch diese und zahlreiche spätere Versuche wurde einwandfrei festgestellt, daß lediglich der Zustand des Wassers selbst die alle Hoffnungen zerstörende starke Dämpfung des Schalles bedingen müsse. Es gelang jetzt noch, dies theoretisch zu begründen.[1]) Es sind die Ungleichförmigkeiten von

1) H. Lichte, Physik. Zeitschr. 11. S. 385. 1919.
Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, daß eine Dämpfung infolge innerer Reibung des Wassers nicht in Frage kommt. Rayleigh, Theorie

Temperatur und Salzgehalt, die die Schallgeschwindigkeit im Wasser fast ebenso stark beeinflussen, wie Temperatur und Wind in der Luft. Es tritt daher *erstens* bei horizontalen Schichtungen eine Krümmung der Schallstrahlen verbunden mit einer Abwanderung der Energie nach oben oder unten ein. Diese ist in Luft bekanntlich die Ursache dafür, daß man mit dem Winde viel weiter hört, als gegen den Wind. (Der Wind ist oben stets stärker als am Boden.) Im Wasser folgt daraus, daß im Sommer, wenn das Wasser oben wärmer ist als unten, die Schallenergie nach unten abwandert, im Winter entsprechend nach oben. Da nun der Boden den Schall nur wenig, die Oberfläche dagegen praktisch vollkommen reflektiert, so muß die Reichweite im Sommer kleiner sein als im Winter. Diese Folgerung fand sich durch die zahlreichen während der folgenden Jahre angestellten Versuche durchaus bestätigt.

Zweitens wird aber jede vertikale Wand verschiedener Beschaffenheit eine Reflexion oder bei unregelmäßiger Form eine Zerstreuung des Schalles bewirken. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie beim Nebel. Die Wassertropfen sind an sich durchsichtig, aber die diffuse Zerstreuung läßt das Licht nicht durch. Wenn beim Schall auch die Inhomogenitäten wesentlich geringer sind, so muß doch eine ununterbrochene Folge solcher Unregelmäßigkeiten insgesamt eine starke Wirkung ausüben, besonders beim Wasser, wo ein Teil der zerstreuten Energie durch den nahen Boden verschluckt wird. Daß in Luft sehr starke Inhomogenitäten, wie z. B. heiße Flammenwände, den

---

des Schalles II. S. 368 ff., berechnet den Dämpfungskoeffizienten bei Vorhandensein von innerer Reibung

$$\alpha = \frac{8\pi^2\mu}{3\varrho a^3} n^2,$$

wenn μ der Reibungskoeffizient, ϱ die Dichte, a die Schallgeschwindigkeit und n die Frequenz bedeuten.

Für Wasser ist

$$\varrho = 1, \quad a = 1{,}44 \cdot 10^5, \quad \mu = 0{,}01;$$

daraus berechnet sich

$$\alpha = n^2 \cdot 10^{-16},$$

und wenn wir $n = 1000$ annehmen

$$\alpha = 10^{-10};$$

d. h. es tritt eine Abnahme der Amplitude auf $1/e$, also eine Intensitätsverminderung auf fast $^1/_{10}$ erst nach 100000 km auf.

Schall nicht durchlassen, hat Tyndall gezeigt.[1]) Ebenso ist das wirbelige Schraubenwasser großer Schiffe für den Unterwasserschall fast undurchlässig.

Eine Zeitlang wurden auch bei den Reichweiteversuchen Temperatur und Salzgehalt des Wassers mit elektrischen Apparaten in verschiedenen Tiefen gemessen. Fig. 10 zeigt z. B. die Abnahme der Temperatur mit der Wassertiefe im Sommer an drei verschiedenen Punkten. Die daraus rechnerisch zu folgernde Dämpfung ist noch größer als die gemessene, auch wenn man berücksichtigt, daß der nach unten hin zunehmende Salzgehalt den Temperatureinfluß zum Teil kompensiert.

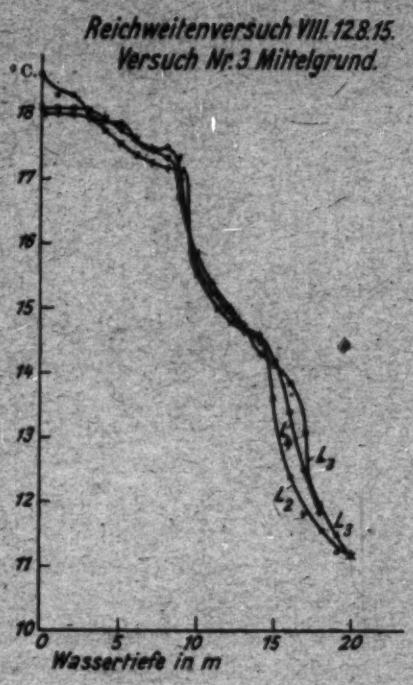


Fig. 10.

Hieraus erklären sich auch die außerordentlich verschiedenen Reichweiten, die bald nur wenige Kilometer, bald über 100 km betrugen. Bei einer fest verlegten Sender- und Empfangsanlage war im Sommer mit der größten Senderleistung von 300 Watt oft ein Empfang auf den 8 und sogar nur 6 km entfernten Empfängern nicht möglich, während im Winter gelegentlich eine ausgestrahlte Schalleistung von nur 0,01 Watt noch auf 15 km, dem weitesten Empfänger deutlich gehört wurde. Bei rein quadratischer Abnahme der Energie berechnet sich in diesem Falle die Schalldichte am Empfangsort zu $0{,}4 \cdot 10^{-15}$ Watt/cm^2. Da dieser Schalldichte tatsächlich etwa die Grenzlautstärke der Mikrophone entspricht, wie im II. Abschnitt angegeben, muß hier die Dämpfung ganz verschwindend gewesen sein, wenn nicht durch die obere und

1) J. Tyndall, On Sound. 4. Aufl. 1883.

untere enge Begrenzung des Wassers ein anderes Ausbreitungsgesetz als das quadratische bestanden hat (Sprachrohrwirkung).

Bei quadratischer Ausbreitung würde ein 1-Kilowatt-Sender noch in 1000 km Abstand eine Schalldichte von 10^{-14} Watt/cm² erzeugen. Ohne Dämpfung könnte man also Reichweiten von weit über 1000 km erwarten! Normalerweise herrscht aber ein so starker „Nebel", daß die Reichweite kaum 10 bis 20 km beträgt.

Wenn, wie bei den anfangs aufgestellten Versuchen, die Dämpfung des Wassers quantitativ festgestellt wird, so kann man diese mit in Rechnung setzen und bei bekannter Senderleistung die Schalldichte für jede Entfernung ausrechnen. Tut man dies für die größte Reichweite, bei der mit Mikrophonen noch Zeichen hörbar waren, so erhält man immer eine Schalldichte von der Größenordnung 10^{-15} Watt/cm² in guter Übereinstimmung mit der im II. Abschnitt mitgeteilten absoluten Eichung der Empfänger.

4. Örtliche Einflüsse.

Wenn die Verteilung von Temperatur und Salzgehalt einen so starken Einfluß hat, wird es auch verständlich, daß die Reichweiten in nahe beieinander liegenden Gegenden stark schwanken können. Mit genau denselben Apparaten und genau denselben Anordnungen war z. B. bei einem Versuch, der sich in nordöstlicher Richtung von Boje Mittelgrund A (westliche Ostsee) erstreckte (am 23. Juli 1915) schon auf 2 km kein Empfang mehr möglich, während bei einem Versuch, der am nächsten Tage von Boje Kiel-Leuchtfeuer in nördlicher Richtung sich erstreckte, auf 15 km noch gut empfangen wurde und auf 9 km noch eine sehr große Lautstärke herrschte. Bei dem zweiten Versuch nahm die Lautstärke bis 9 km etwa proportional der Entfernung ab, d. h. so, als ob überhaupt keine dämpfende Wirkung vorhanden sei. Von 9 km ab setzte aber eine nicht unerhebliche Dämpfung ein, so daß bei 15 km schon wesentlich schwächerer und bei 20 km gar kein Empfang mehr war. Im allgemeinen wurden frei von Küsten und Sandbänken größere Reichweiten erzielt, als in engen Buchten. Der Grund dafür ist sicher in der gleichmäßigeren Temperatur oder wenigstens in der gleichmäßigeren Schichtung der Temperatur im freien Wasser zu suchen. In Küstengegenden stauen sich

gerade die Strömungen und werden besonders stark. Insbesondere tritt hier Wirbelbildung ein, während im freien Wasser mehr Potentialströmung herrscht. Der Schall wird daher diffus zerstreut und vom Boden absorbiert. Gelegentlich wurde freilich auch beobachtet, daß in Landnähe die Reichweiten größer waren als in größeren Abständen von Land. Besonders ungünstig müssen hiernach die Flußmündungen sein, zumal hier auch noch der verschiedene Salzgehalt hinzukommt.

5. Einfluß der Frequenz.

Ungleichförmigkeiten im Wasser müssen vom Schall um so leichter überwunden werden, je größer die Wellenlänge, je tiefer also die Frequenz ist. Umgekehrt muß der ungünstige Einfluß zu geringer Wassertiefe gerade bei den langen Wellen zuerst hervortreten. Es war daher auf alle Fälle wichtig, den Einfluß der Frequenz auf die Ausbreitung zu untersuchen, zumal eine andere Frequenz die einzige Möglichkeit bot, die Dämpfung des Wassers und damit die Reichweite zu ändern. Es schien zunächst einmal wichtig, mit leicht zu beschaffenden Mitteln zu untersuchen, ob irgendein Gang der Reichweite mit der Frequenz bestehe. Es stand hierzu ein elektromagnetischer Sender für 1000 Perioden und ein solcher für 230 Perioden und ferner eine Sirene zur Verfügung. Letztere wurde durch einen besonderen Elektromotor in Umdrehungen versetzt, so daß man durch Ändern der Tourenzahl Tonhöhen von 1500 bis 2500 Schwingungen pro Sekunde einstellen konnte. Außerdem konnte auf der Empfangsseite durch Einschalten eines elektrischen Schwingungskreises vor das Telephon auf die Grund- und Obertöne der Sirene abgestimmt werden, so daß die Abnahme der Lautstärke für beide gleichzeitig gemessen werden konnte. Die Mikrophonempfänger waren für die tiefen und die hohen Frequenzen wesentlich weniger empfindlich. Doch war dies nicht von Bedeutung, da ja das Abnahmegesetz, nicht die Reichweite festgestellt werden sollte. Die elektromagnetischen Sender wurden wieder mit verschiedenen Stromstärken betrieben. Bei der Sirene war eine quantitativ meßbare Abschwächung nicht möglich, so daß sie nur mit voller Lautstärke benutzt wurde. Der Druck des Betriebswassers wurde genau konstant gehalten.

Für eine Versuchsreihe sind die Werte in Fig. 11 zusammengestellt. Abszissen und Ordinaten sind gewählt wie bei den früheren Kurven. Die Neigung der Linien, die die Größe der Dämpfung darstellen, sind bei allen Kurven im wesentlichen dieselben, zeigen insbesondere keinen Gang mit der Frequenz.

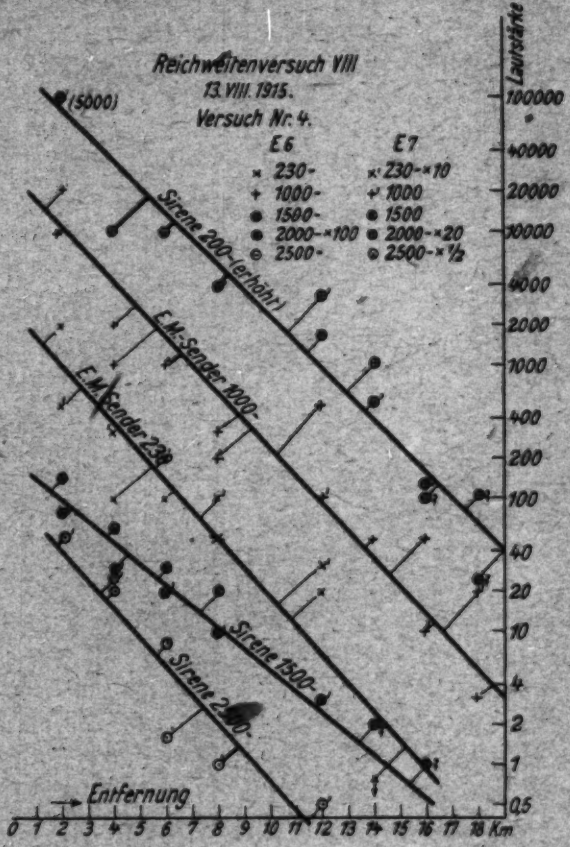


Fig. 11.

Die mittlere Frequenz 1500 erscheint (zufällig) am wenigsten gedämpft. Ein wesentlicher Vorteil der höheren Frequenzen bestand dagegen für die praktische Anwendung darin, daß sie durch Störungen aller Art wesentlich besser hindurchgehört werden.

Es wurden später auch Versuche mit ganz tiefen, direkt kaum hörbaren Frequenzen (50 Perioden pro Sekunde) gemacht.

Aus theoretischen Überlegungen sollte man für diese eine geringere Dämpfung erwarten. Auch pflanzen sich ganz langsame Schwingungen ja durch den Erdboden sehr weit fort, wie man an den Erdbebenwellen und den Aufzeichnungen von Maschinenerschütterungen durch die Seismographen erkennen kann. — Die praktischen Schwierigkeiten erwiesen sich aber als recht groß. Die eigens hierfür gebauten elektromagnetischen Sender strahlten nur geringe Leistung, etwa 10 Watt, aus. Die Mikrophonempfänger sind für diese tiefen Perioden sehr unempfindlich. Es wurde daher ein zweiter Sender als elektromagnetischer Empfänger benutzt. Der Ton selbst wurde durch besondere Mittel, die hier nicht näher angegeben werden können, hörbar gemacht. Neben den Tönen hatte man enorme Störungen durch den geringsten Seegang oder irgendeine Bewegung im Schiff, daher erzielte man nur Reichweiten von etwa 1 km. Innerhalb der Fehlergrenze war die Abnahme quadratisch, damit ist aber nicht gesagt, daß keine Dämpfung vorhanden ist, denn eine nicht übermäßig große Dämpfung tritt erst bei größerer Entfernung merklich in Erscheinung. Wegen der praktischen Schwierigkeiten konnten die Versuche nicht zu Ende geführt werden.

Zusammenfassung.

1. Die von einem elektromagnetischen Sender tatsächlich akustisch ausgestrahlte Leistung wurde bis auf etwa 10 Proz. genau bestimmt.

2. Die Grenzlautstärke von Unterwassermikrophonen entspricht etwa einer Schalldichte von 10^{-15} Watt/cm^2.

3. Die Ausbreitung des Schalles auf große Entfernungen erfolgt (wie in der Luft) nicht nach dem Gesetz des Quadrates der Entfernungen, sondern nach einem Dämpfungsgesetz, d. h. die Lautstärke sinkt immer auf einen bestimmten Bruchteil, wenn man um eine bestimmte Strecke weitergeht.

4. Die Ursache hierfür sind (wie in der Luft) akustische Ungleichförmigkeiten, insbesondere eine unregelmäßige Temperaturverteilung.

5. Die Folgerung hieraus, daß die Reichweite des Unterwasserschalls im Sommer im allgemeinen wesentlich geringer ist als im Winter, wird durch die Versuche bestätigt.

6. Die normalen Reichweiten in der freien Ostsee betrugen im Sommer etwa 10 km, im Winter 20 km. In der Nähe der Küsten waren sie geringer. Gelegentlich wurden mit denselben Apparaten nur 2 km, anderseits über 100 km erreicht; bei quadratischer Ausbreitung ohne Dämpfung würde sich eine Reichweite von über 1000 km ergeben.

7. Die Größe der Dämpfung ist innerhalb der hörbaren Frequenzen unabhängig von der Frequenz. Für ganz tiefe Frequenzen konnten die Versuche wegen der praktischen Schwierigkeiten nicht zum Abschluß gebracht werden.

8. Aus dem Dämpfungsgesetz folgt, daß eine Verbesserung der Apparate nur einen unwesentlichen Einfluß auf die Reichweite haben kann. Diese ist vielmehr praktisch nur von dem Zustande des Wassers abhängig.

Dresden und Kiel, Dezember 1919.

(Eingegangen 16. Januar 1920.)

2. *Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdschattens in der Atmosphäre;* *von H. Dember und M. Uibe.*

Achter Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.[1])

1. Die Erde wirft im Strahlengang des Sonnenlichts einen Schattenkegel, der als Dämmerungserscheinung[2]) in der Erdatmosphäre und bei Mondfinsternissen auf der Mondscheibe sichtbar ist. Die Aufgabe, den Anfang und das Ende einer der verhältnismäßig seltenen Mondfinsternisse zu berechnen, ist schon lange und mit großer Exaktheit gelöst. Dagegen sind von der täglich zweimal sichtbaren Erscheinung des Erdschattens in der Atmosphäre nur sehr wenige und vereinzelte zahlenmäßige Beobachtungen vorhanden. Die theoretischen Lösungsversuche der Fragen, wie die Höhe des obersten Schattenrandes[3]) von der Sonnendepression abhängt und ob von dieser allein, sind über erste Ansätze nicht hinausgekommen. Es ist dies um so merkwürdiger, als es eine sehr auffällige Erscheinung bildet, daß der Schatten, z. B. des Abends, viel schneller aufsteigt, als die Sonne sinkt. Es liegen dazu Beobachtungen vor, besonders von Hellmann und Heim, die zeigen, daß der Schattenrand bereits bei einem Sonnenstand von 7—8° unter dem Horizont durch den Zenit geht. Ebensowenig ist eine Antwort auf die Frage gefunden worden, wodurch die von Tag zu Tag veränderliche Geschwindigkeit bedingt ist, mit welcher der Schatten des Morgens ab- und des Abends aufsteigt.

Sucht man die Umstände zu erkennen, die sich der Lösung des Problems entgegenstellen, indem man den Ver-

1) Aus den Leipziger Berichten 1919.

2) Dunkles Segment oder Gegendämmerung, zuerst beschrieben von Joh. Casp. Funccius, De Coloribus Coeli, Ulm 1716 und von J. J. de Mairan, Mem. de l'Acad. des Sciences 1731.

3) Erster östlicher oder westlicher Dämmerungsbogen.

such macht, eine rein astronomisch-geometrische Theorie aufzustellen, so sieht man, daß die Hauptursache darin besteht, daß es nicht auf die allgemeine Form des — bisher fast immer vorausgesetzten — schattenauffangenden Schirmes ankommt, sondern nur auf die absolute Entfernung des obersten Schattenrandes vom Beobachter. Ändert sich diese Entfernung, so ändert sich auch bei gleichbleibender Sonnentiefe der Winkel, unter welchem der Schattenrand über dem Horizont gesehen wird. Durch Sonnendepression und diesen Höhenwinkel ist die Entfernung des Schattenrandes geometrisch festgelegt, da die Dimensionen der Erde bekannt sind. Die so errechnete geometrische Beziehung gibt nach Einsetzung der beobachteten Höhe und der Sonnendepression eine zahlenmäßig ausreichende Beschreibugg des Phänomens, aber keine physikalische Erklärung, warum der Schatten gerade die bestimmte beobachtete Höhe besitzt.

Führt man in die geometrische Beziehung die für die einzelnen Sonnendepressionen gemessenen Schattenrandhöhen ein, so erhält man das sehr auffällige Resultat, daß sich der Schattenrand mit wachsender Sonnendepression zuerst vom Beobachter schnell entfernt und später wieder nähert. Nach einer Anmerkung in der „Meteorologischen Optik" von J. Pernter und F. M. Exner hat H. Mohn[1]) eine astronomisch-geometrische Berechnung der Bewegung des Erdschattens gegeben, worin er eine äußerste Schicht lichtreflektierender Teilchen annimmt, welche die Erdoberfläche konzentrisch umgibt. Das Bestehen einer solchen Schicht ist nach allem, was wir über die Verteilung der Helligkeit am Himmel und von der Form des sichtbaren Himmelsgewölbes wissen, nicht wahrscheinlich. Es läßt sich leider aus der kurzen Bemerkung Exners nicht sehen, wie Mohn unter sich vergleichbare Werte für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter berechnet und auch nicht, wieweit eine Übereinstimmung seiner Theorie mit den Beobachtungen besteht. Eine rein astronomisch-geometrische Theorie kann, weil sie die physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre außer acht läßt, nicht mehr leisten als eine Zahlrenreihe sorgfältiger Beobachtungen des Zusammenhanges zwischen Sonnendepression und Schattenrand-

1) H. Mohn, Hannband der Meteorolog. Z. S. 1906. Das Original ist uns nicht zugänglich.

höhe, zumal eine solche Theorie eine Erklärung der täglichen Variationen hilflos gegenübersteht.

Ein Ansatz zu einer physikalischen Theorie liegt von Felix Exner[1]) vor. Er stellt durch eine Erweiterung der Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels ein Integral für die Himmelshelligkeit H in verschiedenen Höhen über dem Horizont auf. Für einen bestimmten Höhenwinkel φ über dem Horizont muß dann $dH/d\varphi$ einen Sprung erleiden, und zwar an der Grenze des Erdschattens gegen den von den Sonnenstrahlen noch direkt beleuchteten Himmel; denn nach der ursprünglichen Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels ist die Helligkeit im Erdschattenraum gleich Null, da nur das Licht berücksichtigt wird, welches die vom Sonnenlicht direkt getroffenen Luftmolekeln aussenden und nicht dasjenige, welches jeder einzelnen Molekel von allen anderen zugestrahlt wird. In der Betrachtung kommen keine geometrischen Beziehungen vor, welche die Dimensionen der schattenwerfenden Erde selbst einführen, und damit fehlt auch ein Maß für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter.

Stellt man an die Stelle der nach Rayleigh ausgewerteten Helligkeiten die für die Horizonthelligkeiten gut stimmenden[2]) mit Hilfe der Wienerschen Theorie gerechneten, so wäre diese Theorie für Sonnenstände unter dem Horizont und durch Einführung der Erddimensionen zu erweitern, so daß sich auch die Helligkeit im Erdschattenraum ergibt. Die Gleichungen werden jedoch unhandlich und sie enthalten außerdem eine so große Anzahl von Konstanten, deren Größe in den unteren atmosphärischen Schichten nicht nur unbekannt, sondern auch schwer zu bestimmen ist, daß eine befriedigende Darstellung auf solche Weise vorläufig nicht erreichbar erscheint, zumal auch mit untergehender und untergegangener Sonne eine Verschiebung der hauptsächlich wirksamen Lichtwellenlängen eintritt, worauf die Theorie keine Rücksicht nimmt. Die folgenden Ausführungen werden überdies zeigen, daß von allen mathematischen und experimentellen Schwierigkeiten abgesehen, die von Exner vorgeschlagene Methode

1) Felix M. Exner, Pernter-Exners Meteorolog. Optik, S. 790.

2) Vgl. den 5. dieser Berichte: M. Uibe, Leipziger Inaug.-Diss. 1919. Abhandlungen der math.-phys. Klasse der S. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. 35. Nr. VI. 1918.

den Umstand der variablen absoluten Schattenrandentfernung außer acht läßt und deswegen nicht zum Ziele führen kann.

Ein gangbarer Weg bietet sich in der experimentellen Festlegung der *Entfernung* des Schattenrandes vom Beobachter unter Angabe der physikalischen Gründe für deren Variation und in der Benutzung einer astronomisch-geometrischen Beziehung zwischen der Höhe des Schattenrandes und der Sonnendepression, unter Berücksichtigung der Refraktion der Sonnenstrahlen.

Nach den Ergebnissen vorangehender Berichte[1]) hat sich die Anschauung bewährt, daß die Entfernung der äußersten sichtbaren Grenze des klaren Himmelsgewölbes und damit dessen Form durch die Größe der maximalen Sichtweite in jeder einzelnen Höhe über dem Horizont festgelegt ist. Als Mittel, diese Sichtweiten zu messen, haben wir die Helligkeit der anvisierten Stelle des Himmels — oder besser ausgedrückt der gesamten leuchtenden Luftsäule in einer bestimmten Richtung — angegeben, und zwar besteht für die klare blaue Atmosphäre die einfache Beziehung

$$S = c\sqrt{H}, \tag{1}$$

worin S die maximale Lichtweite, c eine Konstante und H die photometrisch festzustellende Himmelshelligkeit bedeutet. Die Beziehung ist bisher nur für klare Luft als gültig gefunden worden und sie muß ihre Gültigkeit verlieren, wenn die dem Horizont nahen Schichten getrübt sind und wenn sehr große, blendende Helligkeiten in Frage kommen.

Wir wollen als Grundlage der folgenden Entwicklungen die Vorstellung festhalten, *daß der obere Rand des Erdschattens am Endpunkte der maximalen Sichtweite des dem Schattenrande unmittelbar anliegenden Schattenraumes gesehen wird und daß die Helligkeit der in diesem Raum liegenden Luftmasse ein Maß für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter ist.*

2. In der Fig. 1 sei $ETNP$ ein die Erdkugel TOG in T tangierender, durch die Refraktion gekrümmter Lichtstrahl, der vom obersten Rand der untergegangenen Sonne S kommt. Der Strahl tritt bei E in die optisch wirksame Atmosphäre EH_2ZPH_1 ein und bei P wieder aus. Die Gesamtrefraktion,

1) Vgl. den 6. und 7. dieser Berichte: Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. **69.** S. 391—509. 1917. Ann. d. Phys. **61.** S. 313 und S. 353. 1920.

welche der Strahl beim Durchgang durch die Atmosphäre von E bis P erleidet, ist gleich der doppelten maximalen Refraktion, die ein Strahl in der Atmosphäre erfahren kann, also gleich der doppelten Horizontalrefraktion Δ_0. Der Winkel, unter dem sich die beiden in E und P an die Bahn, die wir als kreisförmig annehmen wollen, gezogenen Tangenten

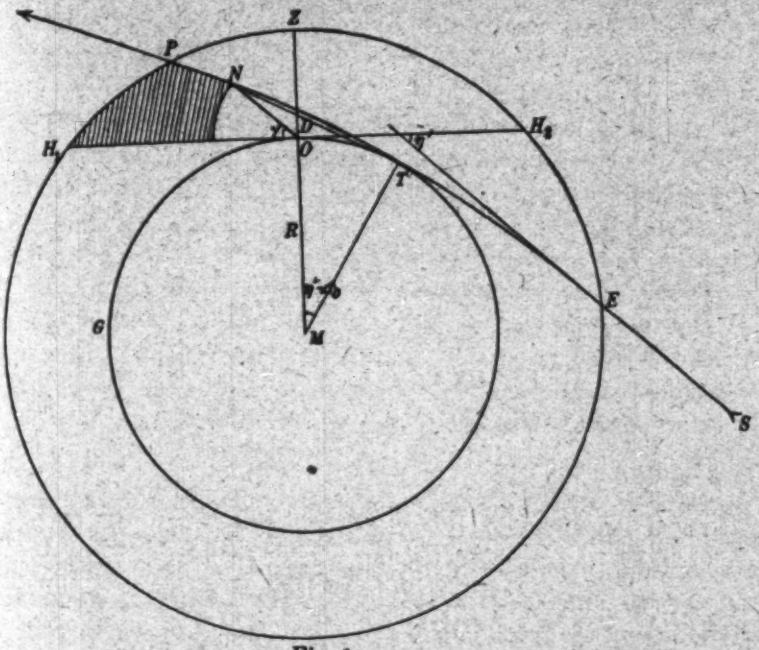


Fig. 1.

schneiden, ist gleich $2\,\Delta_0$. Es sei N der Schattenrand, dessen Erhebung über dem Horizont durch den Winkel $NOH_1 = \gamma$ vom Standpunkt des Beobachters in O gemessen wird. H_1 und H_2 sind die Schnittpunkte des äußersten Randes der optischen Atmosphäre mit der durch O gelegten Horizontalen. Die Refraktion, welche der Lichtstrahl auf der Strecke TN erfährt, sei Δ_1, so daß die Gesamtrefraktion des Strahles von E bis N gleich $\Delta_0 + \Delta_1$ ist.

Ist η' der Depressionswinkel des obersten Sonnenrandes unter dem Horizont, so ist der Winkel $TMO = \eta' - \Delta_0$, wenn M der Mittelpunkt der Erde ist. Die Verbindungslinie $\overline{NT}$ schneidet die Verlängerung $\overline{MO} = R$ des Erdradius im Punkte D. Im Dreieck DTM ist nun der Winkel

$$DTM = 90^0 - \frac{\Delta_1}{2},$$

was man leicht sieht, wenn berücksichtigt wird, daß die Verbindungslinie $\overline{NT}$ mit der Tangente bei T den Winkel $\Delta_1/2$ und die letztere mit der Tangente an den Lichtstrahl im Punkte N den Winkel Δ_1 bildet. Es ist

$$\overline{MD} = R \frac{\cos\frac{\Delta_1}{2}}{\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}$$

und da

$$\overline{OD} = \overline{MD} - R,$$

so wird

$$\overline{OD} = R \frac{\cos\frac{\Delta_1}{2} - \cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Wir können nun $\overline{OD}$ auch im Dreiecke ONP ausdrücken. In diesem ist

$$\overline{OD} = \overline{ON} \frac{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Wird dies dem obigen Ausdruck für $\overline{OD}$ gleich gesetzt, so erhält man für den Abstand des Schattenrandes vom Beobachter

$$(2) \qquad \overline{ON} = R \cdot \frac{\cos\frac{\Delta_1}{2} - \cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Die Horizontalrefraktion Δ_0 beträgt 35′, so daß $\Delta_1/2$ sicherlich stets kleiner als 17,5′ ist. Den cos 17,5′ können wir mit hinreichender Genauigkeit gleich 1 setzen und es wird

$$(3) \qquad \overline{ON} = R \frac{1 - \cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} = \frac{2R\sin^2\frac{\eta' - \left(\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Hierin ist nun Δ_1 durch das bekannte Δ_0, und η' durch eine astronomische Zeitbestimmung auszudrücken.[1]) Es ist weiter

$$\eta' = \eta - \varrho,$$

1) Von der Refraktion auf der Strecke $\overline{NO}$ sehen wir ab.

worin η die Depression des Sonnenmittelpunktes und η der scheinbare Radius der Sonne ist.

Zur Bestimmung der Abhängigkeit des Winkels Δ_1 von Δ_0 können wir von der Beziehung ausgehen

$$\overline{TN} = 2r \sin\frac{\Delta_1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{TE} = 2r \sin\frac{\Delta_0}{2},$$

worin r der Radius der Kreisbahn des Lichtstrahles $ETNP$ ist. Es folgt

$$\overline{TN} : \overline{TE} = \sin\frac{\Delta_1}{2} : \sin\frac{\Delta_0}{2}. \tag{4}$$

Die Strecke $\overline{TE}$ verhält sich zum Kreisbogen $\overset{\frown}{TE}$ wie

$$2r \sin\frac{\Delta_0}{2} : r\,\Delta_0,$$

daher ist

$$\overline{TE} = \overset{\frown}{TE} \cdot \frac{2\sin\frac{\Delta_0}{2}}{\Delta_0}.$$

Im Dreieck NOT ergibt sich für $\overline{TN}$ der Wert

$$\overline{TN} = 2R \cdot \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen und (4) folgt

$$\frac{\overline{TN}}{\overline{TE}} = \frac{\sin\frac{\Delta_1}{2}}{\sin\frac{\Delta_0}{2}} = R \cdot \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right) \cdot \Delta_0}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right) \cdot \overset{\frown}{TE} \sin\frac{\Delta_0}{2}}$$

und daraus die gesuchte Beziehung

$$\sin\frac{\Delta_1}{2} = \Delta_0 \frac{R}{\overset{\frown}{TE}} \cdot \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}. \tag{5}$$

Zur Berechnung der Länge des Bogens $\overset{\frown}{TE}$, d. h. der Hälfte des maximalen Lichtweges eines Strahles in der Atmosphäre, benutzen wir die schon von Lambert angewandte Methode der Berechnung der Höhe der optisch wirksamen Atmosphäre aus dem Depressionswinkel der Sonne beim Schluß der astronomischen Dämmerung ($\eta = \sim 18^0$) und man

erhält so für $\widehat{TE}$ einen Wert von rund 1000 km. Der gleiche gleiche Wert folgt, wenn man die Höhe der optischen Atmosphäre zu 70—80 km annimmt nach Beobachtungen, die O. Jesse[1]) an den höchsten leuchtenden Wolken angestellt hat. Diese Höhe entspricht auch der obersten Schicht der Stratosphäre und der Höhe der Atmosphärenschicht, in welcher die Sternschnuppen zuerst aufleuchten. J. Maurer[2]) setzt in seiner Extinktionstheorie das Verhältnis von Atmosphärenhöhe zu Erdradius gleich $^1/_{100}$, nimmt also, mit dem obigen fast übereinstimmend, als Höhe der optisch wirksamen Atmosphäre den Wert 64 km an.

Unter Berücksichtigung der Kleinheit von $\Delta_1/2$ und des Erdradius $R = 6370$ km erhält man bei einem $\Delta_0 = 35'$

$$\Delta_1 = 446' \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2}\,\sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}. \tag{6}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich Δ_1 für je zwei zusammengehörige Werte von η' und γ durch sukzessive Annäherung schnell berechnen. Der so erhaltene Wert ist in die Gleichung (3) einzusetzen. Zur Berechnung von η haben wir mit Hilfe eines Sextanten und eines künstlichen Horizonts, der aus flüssigem Holzteer bestand, die Ortszeit aus Sonnenhöhenmessungen bestimmt. Ist φ die geographische Breite des Beobachtungsortes (Vilaflor liegt in $\varphi = 28^0\,11'$ n., $\lambda = 1^h\,6^m\,28^s$ w.), z die wahre Zenitdistanz der Sonne, δ ihre Deklination, t der Stundenwinkel vom wahren Mittag aus gerechnet, T die mittlere Ortszeit und G die Zeitgleichung, so gelten die bekannten Beziehungen

$$\begin{cases} \cos(90^0 + \eta) = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t \\ \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - \varphi)\cdot\sin(\sigma - \delta)}{\cos\sigma \cdot \cos(\sigma - z)}};\quad \sigma = \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta + z) \\ t = T - G. \end{cases} \tag{7}$$

Ist der Standort des Beobachters in der Höhe h über der Oberfläche der Erdkugel, z. B. im Luftballon oder auf Bergen,

1) O. Jesse, Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin. **40.** S. 1031. 1890; **26.** S. 467. 1891. Zitiert nach Mascart, Traité d'Optique.

2) Vgl. G. Müller, Photometrie der Gestirne. S. 231. 1897.

so nimmt die Gleichung (3), nach einer analogen Ableitung, die Gestalt an

$$(3a)\quad \overline{ON} = \frac{2R\sin^2\dfrac{\eta' - \left(\Delta_0 + \dfrac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \dfrac{\Delta_1}{2}\right)} - \frac{h\cdot\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \dfrac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \dfrac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Auch hier bleibt vorausgesetzt, daß die Meeresoberfläche und nicht Landerhebungen den Schattenrand werfen. Die Gleichung (6) für Δ_1 behält mit genügender Annäherung ihre Form bei, auch wenn der Beobachter sich in einer Höhe von 1500 m über dem Meere befindet, wie wir in Vilaflor.

Die vorangehenden astronomisch-geometrischen Beziehungen (3, 3a, 6 und 7) beherrschen zahlenmäßig die gesamte Erscheinung des Erdschattens in der Atmosphäre. Es bleibt nun noch übrig, die Entfernung $\overline{ON}$ des Schattenrandes vom Beobachter physikalisch zu deuten und sie der Messung zugänglich zu machen.

3. Nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang befindet sich der Beobachter innerhalb des Erdschattens und er sieht diesen unten am Horizont tief dunkelblau mit scharfem oberen Rande *vor* dem Himmelgewölbe stehen. Mit tiefer sinkender Sonne färbt sich der Schatten, d. h. die Luftmasse vor dem Beobachter, dunkelviolett, dann hellblau[1]), der äußere Rand wird, höher steigend, verwaschen unn schließlich bei etwa 14° Höhe über dem Horizont ist der dann graublaue Schatten in der subtropischen Breite Teneriffas mit bloßem Auge nicht mehr vom übrigen Himmel zu unterscheiden.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Schatten auf- oder absteigt, ist bedeutend größer als die Geschwindigkeit, mit der die Sonne unter- oder aufgeht. Die Tabelle 1 gibt zusammengehörige Werte von η und γ. Die Werte für γ bei $\eta < 2^0$ sind mit denen anderer Beobachter nicht vergleichbar, da bei unseren Beobachtungen unter diesen Depressionen nicht die Meeresoberfläche, sondern die Gebirge der Insel den Schattenrand werfen.

1) Mehrere schöne farbige Darstellungen siehe bei A. Heim, Luftfarben. Zürich 1912.

Das schnelle Aufsteigen wird meist in der Weise erklärt, daß der Erdschatten auf das Himmelsgewölbe wie auf einen festen Projektionsschirm geworfen wird, wodurch sich allerdings qualitativ bei der im Verhältnis zu den Erddimensionen geringen Entfernung des Himmelsgewölbes vom Beobachter ein schnelles Aufsteigen des Schattens folgern läßt. Diese verbreitete Anschauung ist aber ganz besonders aus dem Grunde nicht haltbar, weil sich bei der flachen Form des Himmelsgewölbes[1]) der Schattenrand dem Beobachter ständig nähern müßte und sich nicht anfangs entfernen, wie es die geometrische Beziehung (3) für die Strecke $\overline{ON}$, nach Einsetzung beobachteter zusammengehöriger Werte von η' und γ, für die Beobachtungen in der Nähe des Horizonts fordert.

Der subjektive, bei klarem Wetter zwingende Eindruck, daß der Erdschatten *körperlich vor* dem darüber helleren Himmelsgewölbe steht und sich nicht flächenhaft auf das Gewölbe projiziert, führt dazu, die Sichtweitentheorie[2]) auch auf das Innere des Schattens anzuwenden. Dann folgt ohne weiteres, weil die Helligkeit innerhalb des Schattenraumes geringer ist als außerhalb desselben, daß der Schatten für das Auge vor dem Himmelsgewölbe stehen muß, da wegen der Dunkelheit die Sichtweite im Schattenraum geringer ist als außerhalb in der erleuchteten Luft. *Danach sehen wir, im Schattenraum stehend, in die Tiefe desselben hinein, und zwar gerade so weit, wie es die Helligkeit der Luftmolekeln innerhalb dieses Raumes bedingt und den Schattenrand sehen wir am Ende der maximalen Sichtweite des Schattenraumes.*

Dort, wo der Erdschattenkegel von der Kugelfläche geschnitten wird, die mit der maximalen Sichtweite als Radius um den Standpunkt des Beobachters geschlagen ist, erblicken wir den Schattenrand und dort zeigen ihn auch unsere Meßinstrumente an.

Die Fig. 2 gibt eine schematische Darstellung des Schattens. Die Buchstaben NOZ haben die gleiche Bedeutung wie in der Fig. 1. H_2ZH_4 ist aber hier nicht die Grenze der optischen Atmosphäre, sondern die Begrenzung des vom Beobachter von O aus gesehenen abgeplatteten Himmelsgewölbes.

1) Vgl. den 3., 6. und 7. dieser Berichte a. a. O. **69.** S. 139—148, 391—411 und 485—509. 1907. Ann. d. Phys. **55.** S. 387 u. a. a. O.

2) Vgl. Bericht Nr. 6.

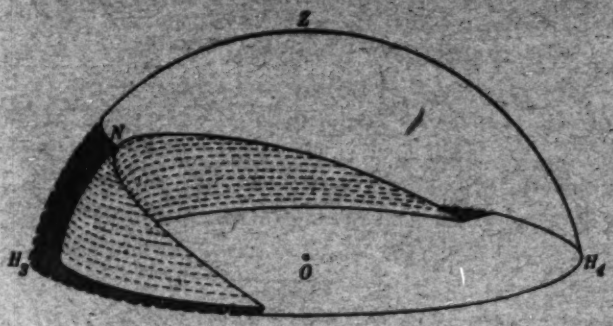


Fig. 2.

Es ist nun die Entfernung vom Beobachter bis zum Schattenrand

$$\overline{ON} = c\sqrt{H}$$

nach Gleichung (1) und daher nach Gleichung (3) bzw. (3a)

$$(8) \qquad c\sqrt{H} = R\frac{2\sin^2\frac{\eta' - \left(\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}$$

oder für Höhen h über dem Meere

$$(8a) \qquad c\sqrt{H} = R\frac{2\sin^2\frac{\eta' - \left(\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} - \frac{h\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

4. Der aufsteigende Schatten erscheint nicht schwarz, sondern er zeigt selbst dicht über dem Horizont eine dunkelblaue Farbe mit photometrisch gut meßbarer Helligkeit. Die Luft des Schattenraumes zwischen dem Beobachter und der Grenze der optischen Atmosphäre erhält diffuses Licht, vorzüglich blaues und violettes von dem beleuchteten Teil des Himmels und dann Licht, welches vom Erdboden reflektiert wird. Mit sinkender Sonne müßte der Schattenraum dunkler werden, weil die Gesamthelligkeit des Himmels abnimmt, wobei vorausgesetzt ist, daß nur die Ursachen, welche die allgemeine Himmelshelligkeit bedingen, die Schattenhelle beeinflussen. Die absolute Helligkeit des Schattens nimmt jedoch, wie unsere Messungen zeigen, nach Sonnenuntergang anfangs

zu, wie es das Auge auch zur Empfindung bringt, trotzdem andere Stellen des Himmels, z. B. der Zenit, schnell an Helligkeit verlieren. Tab. 1 zeigt einen solchen Helligkeitsabfall

Tabelle 1.

6. Juli 1918.

η	H_z	γ	η	H_z	γ
0° 57,5′		2,0°	2° 48,8′		5,8°
1 21,0	47,0		2 51,8	7,0	
1 32,8	38,0	3,0	2 54,7		7,8
1 52,5	30,0	3,9	3 18,5	4,0	
2 7,7	19,0	4,2	3 53,4	1,2	10,0
2 31,3	12,8				

im Zenit nach Sonnenuntergang, zugleich die Höhe γ, des Erdschattenrandes als Funktion der Sonnendepression η. H_z ist die Helligkeit im Zenit in willkürlichen Einheiten, lichtelektrisch gemessen. Da beim Anwachsen der Helligkeit des Schattenraumes die Sonne untergegangen ist — wenn wir den Schatten abends betrachten — die diffuse Himmelsstrahlung sowie der Bodenreflex dieser Strahlung mit sinkender Sonne abnimmt, so muß eine neue Lichtquelle dem Schattenraum Licht zustrahlen, und zwar eine, die so beschaffen ist, daß ihre Strahlung mit sinkender Sonne, d. h. aufsteigendem Erdschatten, zunimmt. Als derartige Lichtquelle kann nur das „erste Purpurlicht" in Betracht kommen. In den Subtropen ist ein gut sichtbarer Erdschatten regelmäßig von einem hell strahlenden ersten Purpurlicht der Gegenseite begleitet. Wie helleuchtend in den Subtropen das erste Purpurlicht ist, geht auch daraus hervor, daß es, was von Miethe und Lehmann beobachtet wurde, einen zweiten, schwachen Erdschatten hervorrufen kann.

Nach den Beobachtungen, die Miethe und Lehmann[1]) in Ägypten (Assuan) ausgeführt haben, in einer geographischen Breite, die mit derjenigen Teneriffas fast gleich ist und wo sehr ähnliche klimatische Verhältnisse herrschen, nimmt das erste Purpurlicht des Abends bei einer Sonnendepression von 1,8° seinen Anfang, erreicht das Maximum der Helligkeit

1) O. Miethe u. H. Lehmann, Meteorolog. Z. S. S. 97ff. 1909.

bei 3° und ist bei $\eta = 6{,}3°$ zu Ende. Es steht also nach dem Vorangehenden zu erwarten, daß der Erdschatten bei etwa 3° Sonnendepression seine größte Helligkeit und damit — wenn die Theorie richtig ist — seine größte Entfernung erreicht. Unsere Messungen zeigen, daß der geforderte Parallelismus zwischen Entfernung und Helligkeit des Schattens besteht. Vgl. Tab. 2.

Tabelle 2.

11. Oktober 1918, abends.

η'	η	Δ_1	$\overline{ON}$	H
2° 0,55′	3° 18′	7,4′		0,68
2 52,81	6 37	11,1	41,8 km	0,86
3 39,18	10 42	14,1	51,6	1,00
3 55,01	13 12	14,9	48,9	0,72

H ist mit dem lichtelektrischen Photometer 1° unter dem Schattenrand in willkürlichen Einheiten gemessen. Aus den ersten Werten ist $\overline{ON}$ nicht berechnet worden, da die geringe Dicke der Schattenschicht über den Beobachtern (300 m) nicht die Gewähr leistete, daß die Meeresoberfläche und nicht Gebirgskämme der Insel den Schatten warfen.

Beim Abnehmen der Helligkeit des Schattenraumes nähert sich der Schattenrand dem Beobachter wegen der verminderten Sichtweite. Der an ihn schnell heranrückende Schattenrand bekommt infolge seines geringer werdenden Abstandes eine so stark wachsende Winkelgeschwindigkeit, daß es möglich wird, daß der Schattenrand bereits bei einer Sonnendepression von 7° durch den Zenit geht. Es ist hiernach das Dunklerwerden des Schattens und das dadurch bedingte Näherrücken des Randes die direkte Ursache für das schnelle Hochsteigen.

Bei $\gamma = 14$ bis 15° war bei allen unseren Beobachtungen der Erdschattenrand nicht mehr wahrnehmbar. Wohl nur ganz ausnahmsweise und unter hervorragend günstigen Umständen wird der Schatten über 15° beobachtet.[1]) Ein solcher atmosphärischer Umstand braucht nicht etwa besondere Reinheit

1) G. Hellmann, vgl. Pernter-Exner, S. 756. — A. Heim, a. a. O. S. 75.

der Luft zu sein, es scheint vielmehr, daß ein empfindlicher Farbkontrast zwischen Schatten und erleuchtetem Himmel notwendig ist.

Da sich die optischen Eigenschaften der Atmosphäre und damit die Sichtweiten von Tag zu Tag ändern, so erklärt sich auch die verschiedene Geschwindigkeit des Aufsteigens des Schattenrandes aus der täglichen Veränderung der maximalen Sichtweiten.

Vilaflor (Chasna) auf Teneriffa, 18. April 1919.

(Eingegangen 27. Januar 1920.)

3. *Der Strahlungsdruck auf Kreiszylinder aus beliebigem Material; von Günther Thilo.*

(Breslauer Dissertation.)

§ 1. Einleitung.

Das Problem der Beugung ebener, elektromagnetischer, polarisierter Wellen an Kreiszylindern ist behandelt worden von v. Ignatowsky[1]), Seitz[2]) und Schaefer und Großmann.[3]) Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem von einer ebenen, polarisierten, elektromagnetischen Welle auf einen unendlich langen Kreiszylinder ausgeübten Strahlungsdruck, und zwar sei die elektrische Kraft der einfallenden Welle entweder parallel oder senkrecht zur Zylinderachse polarisiert. Die Dielektrizitätskonstante ε, die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit σ des Zylinders seien beliebig. Es sei bemerkt, daß die im folgenden abgeleitete Formel für den Strahlungsdruck nicht nur für einen, sondern für beliebig viele koaxiale Zylinder unverändert gilt, nur sind im letzteren Falle die Koeffizienten a_n komplizierter gebaut. Der Strahlungsdruck wird für einen Wasserzylinder von 1 cm Radius als Funktion der Wellenlänge der einfallenden Strahlung in einem größeren Intervall numerisch berechnet, um seinen Zusammenhang mit den Eigenschwingungen des Zylinders zu beleuchten. Im Anhang werden die Formeln für das durch zwei koaxiale Zylinder gestörte Feld abgeleitet.

1. Teil.

Die elektrische Kraft ist parallel der Zylinderachse polarisiert (im folgenden als ∥ Fall bezeichnet).

§ 2. Das Feld im ∥ Falle.

Es wird ein rechtshändiges Koordinatensystem zugrunde gelegt (vgl. Fig. 1). Die Achse des ∞ langen Zylinders falle

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. S. 495. 1905.
2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. S. 746. 1905; 19. S. 554. 1906.
3) Cl. Schaefer, Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe. XII. Heft 4. S. 349; Cl. Schaefer u. F. Großmann, Ann. d. Phys. 31. S. 455. 1910.

mit der z-Achse zusammen, der Zylinderradius sei ϱ_1. Die einfallende ebene Welle, deren elektrische Kraft $\parallel$ der z-Achse polarisiert sei, schreite in Richtung der abnehmenden x fort.

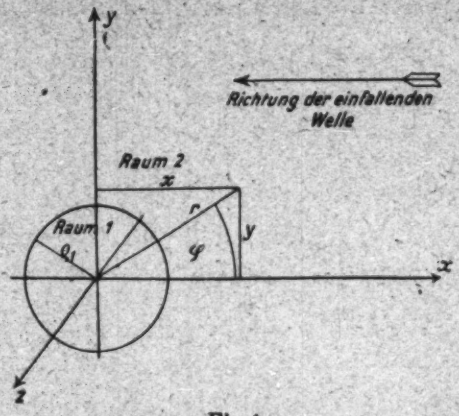


Fig 1.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten in Zylinderkoordinaten (r, φ, z):

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\varphi = \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r}, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{E}_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle wird $\mathfrak{E}_r = 0$, $\mathfrak{E}_\varphi = 0$, $\mathfrak{H}_z = 0$, und es verschwinden alle Ableitungen nach z, da der Zylinder ∞ lang ist. Damit gehen die Gleichungen (1) über in:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \varphi}. \end{cases}$$ [1]

1) Der Index z kann als überflüssig weggelassen werden.

Elimination von $\mathfrak{H}_r$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ gibt:

$$(3)\qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial\varphi^2}.$$

Um zu einer Integration von (3) zu kommen, setze man

$$(4)\qquad \mathfrak{E}=e^{int}\sum_0^\infty{}_m R_m\cos m\varphi,$$

wo m eine positive, ganze Zahl ist. Dies in (3) eingesetzt gibt:

$$\sum_m\left[R_m''+\frac{1}{r}R_m'+\left\{\frac{\varepsilon\mu n^2}{c^2}-\frac{4\pi i\mu n\sigma}{c^2}-\frac{m^2}{r^2}\right\}R_m\right]\cos m\varphi=0.$$

Da diese Gleichung für jedes φ gelten muß, muß jeder einzelne Summand 0 werden, also ist, wenn

$$(5)\qquad \frac{\varepsilon\mu n^2}{c^2}-\frac{4\pi i\mu n\sigma}{c^2}=k^2$$

ist,

$$(6)\qquad \frac{d^2R_m}{d(kr)^2}+\frac{1}{kr}\frac{dR_m}{d(kr)}+\left\{1-\frac{m^2}{k^2r^2}\right\}R_m=0.$$

Das ist aber die Besselsche Differentialgleichung von der Ordnung m und dem Argument kr. Sie wird gelöst durch die Besselschen Funktionen 1. und 2. Art $J_m(kr)$ und $K_m(kr)$ Das allgemeine Integral von (3) lautet also:

$$(7)\qquad \mathfrak{E}=e^{int}\sum_0^\infty{}_m\{b_m J_m(kr)+a_m K_m(kr)\}\cos m\varphi.$$

Das Innere des Zylinders werde als Innenraum (Raum 1), der übrige Raum als Außenraum (Raum 2) bezeichnet. Die Materialkonstanten im Raume 1 seien ε_1, μ_1, σ_1, die Koeffizienten werden mit a', b', die elektrische Kraft mit $\mathfrak{E}_1$ bezeichnet. Entsprechend im Raume 2: ε_2, μ_2, σ_2, a'', b'', $\mathfrak{E}_2$. [1] Raum 2 sei das Vakuum, also

$$\varepsilon_2=\mu_2=1,\qquad \sigma_2=0,\qquad k_2=\frac{n}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

Es ist also:

$$\mathfrak{E}_1=e^{int}\sum_0^\infty{}_m(b_m' J_m+a_m' K_m)\cos m\varphi.$$

Für $r=0$ wird $K_m(kr)=\infty$, da aber $(\mathfrak{E}_1)_{r=0}$ endlich bleiben muß, so folgt $a_m'=0$. Also:

1) Die Bezeichnung der Indizes ist *umgekehrt* wie in der Schaefer-Großmannschen Arbeit (s. a. O.), da bei der Behandlung zweier koaxialer Zylinder später drei Räume auftreten.

$$\mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^{\infty} {}' b_m' J_m \cos m\varphi. \tag{8}$$

Die elektrische Kraft $\mathfrak{E}_2$ setzt sich zusammen aus der einfallenden und der vom Zylinder abgebeugten Welle, also $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_b$. $\mathfrak{E}_e$ und $\mathfrak{E}_b$ müssen natürlich der Gleichung (3) gehorchen. Also:

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} {}' \{b_m^e J_m + a_m^e K_m\} \cos m\varphi + e^{int} \sum_0^{\infty} {}' \{b_m^b J_m + a_m^b K_m\} \cos\varphi$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten dienen folgende Grenzbedingungen:

Die tangentialen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind bei $r = \varrho_1$ stetig:

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{E}_1)_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_1}, \\ (\mathfrak{H}_{\varphi_1})_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_1}, \\ \text{oder nach (2):} \\ \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1} = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Ferner muß für $r = \infty$ die vom Zylinder hervorgebrachte Störung verschwunden sein, d. h. es darf dort nur die einfallende Welle vorhanden sein, also:

$$(\mathfrak{E}_2)_{r=\infty} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+x)} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+r\cos\varphi)} = e^{int} \cdot e^{ikr\cos\varphi} = (\mathfrak{E}_e)_{r=\infty}.$$

Die Entwickelung von e^{ikr} nach Besselschen Funktionen entnehme ich dem Lehrbuch von Gray-Matthews.[1])

$$e^{ikr\cos\varphi} = J_0(kr) + \sum_1^{\infty} 2i^m J_m(kr) \cos m\varphi.$$

Also ist

$$(\mathfrak{E}_e)_{r=\infty} = e^{int}\{J_0(kr) + \sum_1^{\infty} 2i^m J_m(kr) \cos m\varphi\},$$

d. h.

$$a_m^e = 0, \quad b_0^e = 1, \quad b_m^e = 2i^m. \tag{10}$$

$\mathfrak{E}_b$ stellt die vom Zylinder nach außen fortschreitende Beugungswelle dar, b_m^b und a_m^b müssen also so bestimmt

1) Gray and Matthews, Treatise on Bessel functions. S. 18. Formel 39.

werden, daß diese Bedingung, d. h. eben nach außen fortschreitende (von $r = 0$ aus divergierende) Zylinderwellen, erfüllt ist. Ich entnehme die Bedingungsgleichung einer Arbeit von A. Sommerfeld.[1]) Ist $\Delta u + k^2 u = 0$ die Schwingungsgleichung, so lautet die Bedingungsgleichung für nach außen fortschreitende Zylinderwellen:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + iku \right\} = 0. \quad (11)$$

[2])

Setzt man $\mathfrak{E} = e^{int} \cdot u(r, \varphi)$ in (3) ein, so ergibt sich: $\Delta u + k^2 u = 0$. Im vorliegenden Falle ist also:

$$u = \sum_0^\infty{}_m \{b_m{}^b J_m + a_m{}^b K_m\} \cos m\varphi .$$

Dies in (11) eingesetzt gibt:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt{r} \{k b_m{}^b J_m' + k a_m{}^b K_m' + ik b_m{}^b J_m + ik a_m{}^b K_m\} = 0, \quad (12)$$

denn das Σ fällt wieder weg (vgl. S. 533). Bei großen Werten des Arguments kann man für J_m und K_m folgende asymptotischen Werte benutzen[3]):

$$\begin{cases} J_m(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(\frac{2m+1}{4}\pi - kr\right), \\ K_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sin\left(\frac{2m+1}{4}\pi - kr\right). \end{cases} \quad (13)$$

Setzt man (13) in (12) ein, so erhält man:

$$b_m{}^b = -\frac{i\pi}{2} a_m{}^b .$$

Damit wird

$$\mathfrak{E}_b = e^{int} \sum_0^\infty{}_m a_m{}^b \left\{K_m - \frac{i\pi}{2} J_m\right\} \cos m\varphi = e^{in} \sum_0^\infty{}_m a_m{}^b Q_m \cos m\varphi,$$

wenn

$$K_m - \frac{i\pi}{2} J_m = Q_m .$$

---

1) A. Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresbericht der deutschen Mathemat.-Vereinigung. 21. Heft 10/12. S. 309. 1912.

2) Bei Sommerfeld steht in der Klammer $-iku$; das liegt daran, daß dort der Zeitfaktor e^{-int} heißt, während er bei mir e^{+int} ist.

3) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln. 1909. Meine Bezeichnungen schließen sich an Jahnke-Emde an.

ist.[1]) Setze ich noch

$$b_m'' = b_m'' \quad \text{und} \quad a_m^{\,b} = a_m'', \tag{14}$$

so wird

$$\mathfrak{E}_2 = e^{i\,n\,t} \sum_0^\infty{}_m \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r)\} \cos m\varphi\,. \tag{15}$$ [2])

Der Ansatz

$$\mathfrak{E}_2 = e^{i\,n\,t} \sum_0^\infty{}_m \{b_m J_m + a_m K_m\} \cos m\varphi$$

liefert für $r = \infty$ stehende Wellen, wie man sofort sieht, wenn man für J_m und K_m die Werte (13) einsetzt. Nach (10) ist:

$$b_0'' = 1\,, \qquad b_m'' = 2\,i^m.$$

Zur Bestimmung der a_m'' dienen die Bedingungen (9)

$$\begin{cases} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi \\ \qquad = \sum_0^\infty{}_m \{b_m'' J_m(k_2 \varrho_1) + a_m'' Q_m(k_2 \varrho_1)\} \cos m\varphi\,, \\ \frac{1}{\mu_1} \sum_0^\infty{}_m b_m' k_1 J_m'(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi \\ \qquad = \sum_0^\infty{}_m k_2 \{b_m'' J_m'(k_2 \varrho_1) + a_m'' Q_m'(k_2 \varrho_1)\} \cos m\varphi. \end{cases} \tag{16}$$ [3])

Zur übersichtlicheren Rechnung werden folgende Bezeichnungen eingeführt: Der die Ordnung bezeichnende Index m wird durchgängig weggelassen. Die Funktionen J, K und Q erhalten die Argumentsbezeichnung in Indexform als zweistellige Zahl. Die erste Zahl bedeutet das k, die zweite das ϱ, also:

---

1) Es ist $Q_m = -\frac{i\pi}{2} H_m^{(2)}$, wo $H_m^{(2)}$ die Hankelsche Zylinderfunktion 2. Gattung ist.

2) In den Arbeiten von v. Ignatowsky und Schaefer a. a. O. ist dieser Ansatz für die elektrische Kraft im Außenraum richtig gemacht, aber sein Zusammenhang mit der Ausstrahlungsbedingung nicht ausgesprochen. Bei Seitz ist angesetzt $b_m J_m + a_m K_m$; dieser Ansatz ist also nicht richtig, da er im ∞ stehende Wellen liefert. In der zweiten Arbeit von Seitz ist der Ansatz in $b_m J_m + a_m Q_m$ verbessert. Auch in einer alten Arbeit von J. J. Thomson ist die falsche Lösung angesetzt. (Recent researches on Electricity and Magnetism. S. 428.)

3) $\mu_2 = 1$.

$$J_{11} = J_m(k_1 \varrho_1),$$
$$K_{21}' = K_m'(k_2 \varrho_1) \text{ usw.}$$

Da die Gleichungen (16) für jedes φ gelten müssen, sind die einzelnen Summanden gleich, also:

$$b' J_{11} = b'' J_{21} + a'' Q_{21},$$
$$\frac{1}{\mu_1} b' k_1 J_{11}' = b'' k_2 J_{21}' + a'' k_2 Q_{21}'.$$

Es folgt:

$$(17) \quad a_m'' = 2i^m \frac{\frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - k_2 J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)}{k_2 J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1)}.$$

Für $m = 0$ heißt der Faktor nicht $2i^m$, sondern 1. Zur numerischen Berechnung ist folgende Form bequemer:

$$(17a) \quad \frac{2i^m}{a_m''} = \frac{k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1)}{\frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - k_2 J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Damit ist $\mathfrak{E}_2$ vollständig bestimmt. Die Koeffizienten b_m' haben kein Interesse.

§ 3. Eigenschwingungen im ∥ Felde.

Unter Eigenschwingungen des Zylinders sind zu verstehen die Eigenschwingungen des Systems: Zylinder + umgebendes Vakuum. Die Bedingungsgleichung erhält man, wenn man die äußere Kraft (einfallende Welle) gleich 0 setzt. Also wird

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m a_m'' Q_m \cos m\varphi,$$
$$\mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m \cos m\varphi.$$

Die Grenzbedingungen (9) liefern:

$$(18) \begin{cases} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi = \sum_0^\infty{}_m a_m'' Q_m(k_2 \varrho_1) \cos m\varphi, \\ \frac{k_1}{\mu_1} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m'(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi = k_2 \sum_0^\infty{}_m a_m'' Q_m'(k_2 \varrho_1) \cos m\varphi. \end{cases}$$

Das Summenzeichen fällt wieder weg. Division der Gleichung (18) durcheinander liefert die Bedingungsgleichung für die in den k_1 und k_2 steckenden Eigenfrequenzen:

$$(19) \qquad k_2 J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1) = 0.^1)$$

(19) kann nur durch komplexe Argumente erfüllt werden. Das bedeutet aber, daß nur gedämpfte Eigenschwingungen existieren können. Die Dämpfung ist einmal Strahlungsdämpfung, und zweitens bei endlichem Leitvermögen des Zylinders Dämpfung durch Entwickelung Joulescher Wärme. Bei dielektrischen Zylindern ist nur Strahlungsdämpfung vorhanden. Ist ein komplexes $k_1 = p + iq$ (und damit ein k_2) gefunden, das Gleichung (19) erfüllt, so ist:

$$k_1 = p + iq = \frac{\varepsilon \mu n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu n \sigma}{c^2}.$$

Diese Gleichung kann nur durch ein komplexes $n = \alpha \pm i\beta$ erfüllt werden. α ist dann die Frequenz und β die Dämpfung der Eigenschwingung. Physikalisch brauchbar ist nur die Lösung $n = \alpha - i\beta$, wo $\beta > 0$, da sonst die Amplitude unbegrenzt zunimmt. Physikalisch realisierbar sind ungedämpfte Eigenschwingungen nur an dielektrischen Zylindern. Man kann nämlich die nach außen fortschreitende Strahlung, die die Dämpfung verursacht, durch einen in beliebiger Entfernung den dielektrischen Zylinder umgebenden Zylindermantel von ∞ großer Leitfähigkeit wieder zurückwerfen. Man bekommt dann an diesem Mantel stehende Wellen. Die Frequenzen der ungedämpften Eigenschwingungen hängen natürlich von der Entfernung des Mantels von der Zylinderachse ab. Ist diese Entfernung ∞ groß, so erhält man die Bedingungsgleichung für die ungedämpften Eigenschwingungen, wenn man ansetzt:

$$\mathfrak{E}_z = e^{i\alpha t} \sum_0^\infty a_m'' K_m(k_2 r) \cos m\varphi,$$

denn dieser Ansatz liefert im ∞ stehende Wellen. Also wird die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(20) \qquad k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1) = 0.$$

Dies stimmt mit dem reellen Teil von (19) überein, wenn man dort reelles Argument annimmt. Da (20) für jedes m

1) Zu beachten ist die formale Übereinstimmung von (19) mit dem Nenner von (17).

∞ viele Wurzeln hat und m von 0 bis ∞ läuft, existieren ∞^2 viele Eigenfrequenzen.

§ 4. Berechnung der magnetischen Feldkomponenten.

Die Komponenten $(\mathfrak{H}_r)_2$ und $(\mathfrak{H}_\varphi)_2$ findet man aus den Gleichungen (2). Da kein von der Zeit unabhängiges Magnetfeld vorhanden ist, kann man ohne Hinzufügen einer Integrationskonstante direkt integrieren. Es wird:

$$(21)\quad (\mathfrak{H}_\varphi)_2 = -i \cdot e^{int} \sum_0^\infty {}_m \{b_m'' J_m'(k_2 r) + a_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi,$$

$$(22)\quad (\mathfrak{H}_r)_2 = -\frac{i}{r k_2} e^{int} \sum_0^\infty {}_m \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r)\} m \sin m\varphi.$$

§ 5. Berechnung des Strahlungsdruckes im $\parallel$ Fall.

Es soll berechnet werden das zeitliche Mittel des von der einfallenden Welle auf den Zylinder ausgeübten Strahlungsdruckes. Die Kraft, die von elektromagnetischer Strahlung auf einen materiellen Körper ausgeübt wird, setzt sich zusammen aus den Maxwellschen Spannungen, die über eine beliebige, den Körper umschließende Fläche zu integrieren sind, und aus der Änderung des elektromagnetischen Impulses innerhalb dieser Fläche. Da im vorliegenden Falle nur das zeitliche Mittel des Druckes berechnet werden soll und ein rein periodischer Zustand vorliegt, ist der Druck, der von der Änderung des Impulses herrührt, im Mittel gleich 0; die Integration über die Maxwellschen Spannungen gibt also das zeitliche Strahlungsdruckmittel. Als Integrationsfläche wird ein dem materiellen Zylinder koaxialer Zylindermantel mit dem Radius r, wo $r \geq \varrho_1$ ist, gewählt. Die Maxwellschen Spannungen sind:[1])

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_x^e = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2)\mathfrak{n}_x + \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\mathfrak{n}_y + \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z\mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{T}_x^m = \frac{\mu}{8\pi}(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2)\mathfrak{n}_x + \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y\mathfrak{n}_y + \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z\mathfrak{n}_z.\ ^2) \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß nur ein Druck $\parallel$ der

1) Vgl. z. B. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität (Teubner, 5. Aufl.) Bd. I, S. 154—155, Formeln 149, und S. 211, Formeln 177.

2) $\mathfrak{n}$ ist der normale Einheitsvektor.

x-Achse resultieren kann, die $\mathfrak{T}_y$ und $\mathfrak{T}_z$ brauchen also nicht berücksichtigt zu werden. Ist

$$\mathfrak{T}_x^{\,e} + \mathfrak{T}_x^{\,m} = X_{n\parallel}$$

(X Komponente der Flächenkraft auf ein Flächenstück von der Größe 1 und der Normale n), so ist die x-Komponente der Flächenkraft auf ein Zylinderstück von der Länge 1:

$$X_\parallel = \int X_{n\parallel}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} X_{n\parallel} \cdot r \cdot d\varphi \quad (d\sigma \text{ Oberflächenelement}).$$

Im vorliegenden Falle fällt r mit n zusammen; also ist:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(n, x) = \cos\varphi, \\ n_y &= \cos(n, y) = \sin\varphi, \\ n_z &= \cos(n, z) = 0. \end{aligned}$$

Es sei

$$\overline{X}_\parallel = \frac{1}{T}\int_0^T X_\parallel dt, \tag{24}$$

worin T die Schwingungsdauer bedeutet, der zeitliche Mittelwert von $X_\parallel$. Es ist:

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_2, \quad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Auf der Integrationsfläche ist $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$, also wird:

$$X_{n\parallel} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}_2^{\,2}\cos\varphi + \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}_x)_2^{\,2} - (\mathfrak{H}_y)_2^{\,2}\cos\varphi + \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_x)_2(\mathfrak{H}_y)_2\sin\varphi.$$

Es ist:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}_x)_2 &= (\mathfrak{H}_r)_2\cos\varphi - (\mathfrak{H}_\varphi)_2\sin\varphi, \\ (\mathfrak{H}_y)_2 &= (\mathfrak{H}_r)_2\sin\varphi + (\mathfrak{H}_\varphi)_2\cos\varphi. \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\left\{\begin{aligned} X_{n\parallel} &= \frac{1}{8\pi}\Big\{-\mathfrak{E}_2^{\,2}\cos\varphi + (\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}\cos\varphi - (\mathfrak{H}_\varphi)_2^{\,2}\cos\varphi \\ &\qquad - 2(\mathfrak{H}_r)_2(\mathfrak{H}_\varphi)_2\sin\varphi\Big\}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$\left\{\begin{aligned} \overline{X}_\parallel &= \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^{2\pi} r\, X_{n\parallel}\, d\varphi = -\frac{r}{8\pi}\,\frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^{2\pi}\Big\{\mathfrak{E}_2^{\,2}\cos\varphi \\ &\quad - (\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}\cos\varphi + (\mathfrak{H}_\varphi)_2^{\,2}\cos\varphi + 2(\mathfrak{H}_r)_2(\mathfrak{H}_\varphi)_2\sin\varphi\Big\} d\varphi. \end{aligned}\right.$$

Da die Grenzen konstant sind, können die Integrationen

vertauscht werden. Bezeichnen überstrichene Größen zeitliche Mittelwerte über eine Periode, z. B.:

$$\overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{E}_2^{\,2}\, dt,$$

so wird:

$$(26)\quad \begin{cases} -\overline{X}_{\parallel} = \dfrac{r}{8\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi - \dfrac{r}{8\pi}\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi \\ \qquad + \dfrac{r}{8\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi + \dfrac{r}{4\pi}\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2 \cdot (\mathfrak{H}_\varphi)_2} \sin\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

$-\overline{X}_{\parallel}$ bedeutet eine Kraft in Richtung der einfallenden Welle.

a) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi$.

Es war nach (15)

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int}\sum_0^\infty{}'_m \{b_m'' J_m + a_m'' Q_m\} \cos m\varphi.$$

Man setze:

$$(27)\quad \begin{cases} a_m'' = \alpha_m'' + i\beta_m'', \\ b_m'' = b_m^{(1)} + i b_m^{(2)}. \text{ [1]} \end{cases}$$

Damit wird:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_2 = e^{int}\displaystyle\sum_0^\infty{}'_m \left\{\left(b_m^{(1)} + \frac{\pi}{2}\beta_m''\right) J_m + \alpha_m'' K_m\right\} \cos m\varphi \\ \qquad + i\cdot e^{int}\displaystyle\sum_0^\infty{}'_m \left\{\left(b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2}\alpha_m''\right) J_m + \beta_m'' K_m\right\} \cos m\varphi. \end{cases}$$

Es sei

$$(28)\quad \begin{cases} A_m = \left(b_m^{(1)} + \dfrac{\pi}{2}\beta_m''\right) J_m(k_2 r) + \alpha_m'' K_m(k_2 r), \\ B_m = \left(b_m^{(2)} - \dfrac{\pi}{2}\alpha_m''\right) J_m(k_2 r) + \beta_m'' K_m(k_2 r). \end{cases}$$

Also wird:

$$(29)\quad \mathfrak{E}_2 = e^{int}\left\{\sum_0^\infty{}'_m A_m \cos m\varphi + i\sum_0^\infty{}'_m B_m \cos m\varphi.\right\}$$

---

1) Da b_m'' abwechselnd reell oder rein imaginär ist, ist bei gleichem m entweder $b_m^{(1)}$ oder $b_m^{(2)}$ gleich 0.

$\mathfrak{E}_2$ ist gleich dem reellen Teil dieses Ausdruckes.

Ist $\mathfrak{A} = \Re e\{e^{int}(a_1 + i a_2)\}$ $\mathfrak{B} = \Re e\{e^{int}(b_1 + i b_2)\}$, so ist der zeitliche Mittelwert des Produktes:

$$\overline{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}} = \tfrac{1}{2}\{a_1 b_1 + a_2 b_2\}.$$

Also folgt aus (29):

$$\overline{\mathfrak{E}_2^2} = \tfrac{1}{2}\left[\left\{\sum_0^\infty A_m \cos m\varphi\right\}^2 + \left\{\sum_0^\infty B_m \cos m\varphi\right\}^2\right],$$

oder:

$$\overline{\mathfrak{E}_2^2} = \tfrac{1}{2}\left[\sum_0^\infty \sum_0^\infty A_m A_p \cos m\varphi \cos p\varphi + \sum_0^\infty \sum_0^\infty B_m B_p \cos m\varphi \cos p\varphi\right].$$

$$(30)\quad \left\{\int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^2} \cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\left[\sum_0^\infty \sum_0^\infty \{A_m A_p + B_m B_p\} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi\right].\right.$$

Das Integral $\int \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi$ läßt sich durch partielle Integration bestimmen. Man bekommt in bekannter Weise eine Rekursionsformel, in der das vorliegende Integral durch $\int \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi$ ausgedrückt wird. Behandelt man das letztere Integral ebenso, so bekommt man schließlich:

$$\begin{aligned}\int \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi &= \frac{1 - m^2 - p^2}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \cos m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi,\\ &- \frac{2mp}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \sin m\varphi \sin p\varphi \sin\varphi\\ &- \frac{p(1 + m^2 - p^2)}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \cos m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi,\\ &- \frac{m(1 - m^2 + p^2)}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \sin m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi.\end{aligned}$$

Also wird:

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi \, d\varphi \\ &\quad - \frac{m(1-m^2+p^2)}{(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2} \sin 2m\pi \cos 2p\pi \\ &\quad - \frac{p(1+m^2-p^2)}{(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2} \cos 2m\pi \sin 2p\pi . \end{aligned} \right.$$

Ist $(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2=0$, so ist $p=\pm(m\pm1)$. Für diese Werte wird der Nenner von (31) Null, gleichzeitig wird aber auch der Zähler Null, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Man findet also den Wert des Integrals, wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite von (31) nach p differenziert und dann $p=m+1$ setzt. Führt man die elementare Rechnung durch und wird m eine positive, ganze Zahl, so findet man:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos(m+1)\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Für $m=0$ nimmt das Integral den Wert π an. Also:

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos(m+1)\varphi \cos\varphi \, d\varphi \\ &\qquad = \ \ \pi \text{ für } m=0 \\ &\qquad = +\frac{\pi}{2} \ \text{„} \ m \geqq 1 \end{aligned} \right\} m \text{ ganze Zahl.}$$

Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi \, d\varphi$ verschwindet für ganzzahliges positives m und p also nur dann nicht, wenn $p=m+1$ ist. Ferner wird der Wert unabhängig von m, wenn man den Fall $m=0$, $p=1$ ausschließt. In (30) verschwindet also die rechte Seite nur für folgende Indexkombinationen m, p nicht: 01, 10, 12, 21, 23, 32, ... Die Doppelsumme reduziert sich also auf eine einfache Summe und der Faktor $\frac{1}{2}$ fällt weg, da z. B. $A_{23}=A_{32}$ und also:

$$A_{23}+A_{32}=2A_{23}$$

ist usw. Also wird (30), wenn man noch den Wert des Integrals einsetzt:

$$(33)\quad \int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi = \pi\{A_0 A_1 + B_0 B_1\} + \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty{}_m \{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\}.$$

Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi$ wird später gebraucht, er möge gleich hier mit angegeben werden. Man findet ebenso:

$$(34)\quad \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{m(1-m^2+p^2)}{(1-m^2-p^2)^2 - 4m^2p^2} \cos 2m\pi \sin 2p\pi, + \frac{p(1+m^2-p^2)}{(1-m^2-p^2)^2 - 4m^2p^2} \sin 2m\pi \cos 2p\pi,$$

$$(35)\quad \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin(m+1)\varphi \cos\varphi\, d\varphi \left.\begin{array}{l} = 0 \text{ für } m = 0 \\ = +\frac{\pi}{2} \text{ „ } m \gtreqless 1 \end{array}\right\} m \text{ ganze Zahl.}$$

b) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi$.

Nach (22) ist:

$$(\mathfrak{H}_r)_2 = -\frac{i}{r k_2} e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r)\} m \cdot \sin m\varphi,$$

durch Einsetzen von (27) und (28) findet man:

$$(36)\quad (\mathfrak{H}_r)_2 = \frac{1}{r k_2} e^{int}\left[\sum_0^\infty{}_m m B_m \sin m\varphi - i \sum_0^\infty{}_m' m A_m \sin m\varphi\right].$$

Damit wird ebenso wie früher:

$$(37)\quad \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}} = \frac{1}{2r^2k_2^2}\left\{\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p m\cdot p\{A_m A_p + B_m B_p \sin m\varphi \sin p\varphi\right\}.$$

$$\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2r^2k_2^2}\left\{\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p m\cdot p\{A_m A_p + B_m B_p\} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi.\right.$$

Nach (35) verschwindet das Integral nur für $p = m + 1$, bzw. $m = p + 1$ nicht. Die Doppelsumme reduziert sich also wieder auf eine einfache Summe, die Kombinationen 01, 10 sind Null, die Kombinationen 12, 21, 23, 32 ... sind $= + \pi/2$, also wird (37):

$$(38)\quad \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^2} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2 r^2 k_2^2} \sum_1^\infty m\,[m+1]\{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\}.$$

c) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2^2} \cos\varphi\, d\varphi$.

Nach (21) ist:

$$(\mathfrak{H}_\varphi)_2 = -i e^{i\omega t} \sum_0^\infty m \{b_m'' J_m'(k_2 r) + a_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi.$$

Wende ich wieder Gleichung (27) an und setze ich:

$$(39)\quad \begin{cases} A_m' = \left(b_m^{(1)} + \frac{\pi}{2}\beta_m''\right) J_m' + a_m'' K_m', \\ B_m' = \left(b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2} a_m''\right) J_m' + \beta_m'' K_m', \text{[1]} \end{cases}$$

so wird:

$$(40)\quad (\mathfrak{H}_\varphi)_2 = e^{i\omega t}\left\{\sum_0^\infty m B_m' \cos m\varphi - i \sum_0^\infty m A_m' \cos m\varphi\right\}.$$

Daraus folgt wieder:

$$\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2^2} \cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \sum_0^\infty m \sum_0^\infty p \{A_m' A_p' + B_m' B_p'\} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi.$$

Nach (32) wird:

$$(41)\quad \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2^2} \cos\varphi\, d\varphi = \pi\{A_0' A_1' + B_0' B_1'\} + \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty m \{A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}'\}.$$

1) Gleichungen (39) unterscheiden sich von (28) nur dadurch, daß an Stelle der Funktionen J und K ihre Ableitungen treten.

d) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2 \cdot (\mathfrak{H}_\varphi)_2}\, \sin\varphi\, d\varphi$.

Nach (36), (40) wird:

$$\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2 \cdot (\mathfrak{H}_\varphi)_2}\, \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2r\,k_2} \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p \{m A_m A_p' + m B_m B_p'\} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi\, d\varphi .$$

Durch partielle Integration des unbestimmten Integrals findet man:

$$(42)\quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi\, d\varphi = m \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi \\ \qquad\qquad - p \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi . \end{cases}$$

Da das vorliegende Integral in m und p nicht mehr symmetrisch ist, müssen die Fälle $p = m + 1$ und $m = p + 1$ unterschieden werden. Durch Beachtung von Gleichung (32) u. (35) findet man:

(43)

m	p	$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi\, d\varphi$
0	1	0
$m \gtreqless 1$	$m+1$	$m\frac{\pi}{2} - (m+1)\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$
1	0	$+\pi$
$m \gtreqless 2$	$m-1$	$m\frac{\pi}{2} - (m-1)\frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2}$

Durch (43) findet man also:

$$(44)\quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2 \cdot (\mathfrak{H}_\varphi)_2}\, \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2r\,k_2} \Big[\pi \{A_1 A_0' + B_1 B_0'\} \\ \qquad + \frac{\pi}{2} \sum_2^\infty{}_m m \{A_m A_{m-1}' + B_m B_{m-1}'\} \\ \qquad - \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty{}_m m \{A_m A_{m+1}' + B_m B_{m+1}'\} \Big] . \end{cases}$$

e) Berechnung des Strahlungsdruckes.

Gleichung (26) wird durch (33), (38), (41) und (44):

$$
(45)\quad \left\{\begin{aligned}
-\overline{X} &= \frac{r}{8}\{A_0 A_1 + B_0 B_1\} + \frac{r}{16}\sum_1^\infty{}_m \{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\} \\
&\quad - \frac{1}{16 r k_2^2}\sum_1^\infty{}_m m(m+1)\{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\} \\
&\quad + \frac{r}{8}\{A_0' A_1' + B_0' B_1'\} + \frac{r}{16}\sum_1^\infty{}_m \{A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}'\} \\
&\quad + \frac{1}{8 k_2}\{A_1 A_0' + B_1 B_0'\} + \frac{1}{16 k_2}\sum_2^\infty{}_m m\{A_m A_{m-1}' + B_m B_{m-1}'\} \\
&\quad - \frac{1}{16 k_2}\sum_1^\infty{}_m m(A_m A_{m+1}' + B_m B_{m+1}').
\end{aligned}\right.
$$

Läßt man jetzt den Radius r der Integrationsfläche ∞ werden, so verschwinden die 2. und die 4. und 5. Zeile, denn die Ausdrücke $A \cdot A_{m+1}$ usw. verschwinden einzeln wie $1/r$. Man überzeugt sich davon leicht, indem man die asymptotischen Werte (13) in $A_m \cdot A_{m+1}$ usw. einsetzt. Es wird also:

$$
(46)\quad \left\{\begin{aligned}
(\overline{X})_{r=\infty} &= \frac{r}{8}\{A_0 A_1 + B_0 B_1 + A_0' A_1' + B_0' B_1'\} \\
&\quad + \frac{r}{16}\sum_1^\infty{}_m \{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \\
&\qquad\qquad + A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}'\}.
\end{aligned}\right.
$$

Beachtet man Gleichung (28), so wird:

$$
(47)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \\
&\quad = (\alpha_m'' \alpha_{m+1}'' + \beta_m'' \beta_{m+1}'')\left(\frac{\pi^2}{4} J_m J_{m+1} + K_m K_{m+1}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\pi}{2}\alpha_{m+1}'' \beta_m'' - \frac{\pi}{2}\alpha_m'' \beta_{m+1}''\right)(J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m) \\
&\quad + \left(\frac{\pi}{2} b_m^{(1)} \beta_{m+1}'' + \frac{\pi}{2} b_{m+1}^{(1)} \beta_m'' - \frac{\pi}{2}\alpha_{m+1}'' b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2}\alpha_m'' b_{m+1}^{(2)}\right) J_m J_{m+1} \\
&\quad + (\alpha_{m+1}'' b_m^{(1)} + \beta_{m+1}'' b_m^{(2)}) J_m K_{m+1} \\
&\quad + (\alpha_m'' b_{m+1}^{(1)} + \beta_m'' b_{m+1}^{(2)}) J_{m+1} K_m .\ ^{1})
\end{aligned}\right.
$$

Die ersten Klammern mögen der Reihe nach mit e_m, f_m, g_m, h_m, j_m bezeichnet werden, also:

---

1) $b_m^{(1)} b_{m+1}^{(1)}$ und $b_m^{(2)} b_{m+1}^{(2)}$ sind 0, da immer der eine Faktor 0 ist, denn b_m'' ist reell oder rein imaginär.

$$(47a)\quad \begin{cases} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} = e_m \left\{ \frac{\pi^2}{4} J_m J_{m+1} + K_m K_{m+1} \right\} \\ \qquad + f_m \{ J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m \} \\ \qquad + g_m J_m J_{m+1} + h_m J_m K_{m+1} \\ \qquad + j_m J_{m+1} K_m . \end{cases}$$

Ebenso wird nach (39):

$$(48)\quad \begin{cases} A'_m A'_{m+1} + B'_m B'_{m+1} = e_m \left\{ \frac{\pi^2}{4} J'_m J_{m+1} + K_m K'_{m+1} \right\} \\ \qquad + f_m \{ J'_m K'_{m+1} - J'_{m+1} K'_m \} \\ \qquad + g_m J'_m J'_{m+1} + h_m J'_m K'_{m+1} \\ \qquad + j_m J'_{m+1} K'_m . \end{cases}$$

Zwischen den Besselschen Funktionen bestehen folgende Rekursionsformeln:

$$(49)\quad \begin{cases} J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) = J_{m-1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x), \\ J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x). \end{cases}$$

Dieselben Formeln gelten für $K_m(x)$.

Schließlich gilt noch:

$$(50)\quad \begin{cases} J'_m(x) K_m(x) - J_m(x) K'_m(x) = J_m(x) K_{m+1}(x) \\ \qquad - J_{m+1}(x) K_m(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Für ∞ Argument wird nach 49:

$$(51)\quad \begin{cases} J'_m(k_2 r) = - J_{m+1}(k_2 r) = + J_{m-1}(k_2 r) \text{ und} \\ K'_m(k_2 r) = - K_{m+1}(k_2 r) = + K_{m-1}(k_2 r). \end{cases}$$

Für ∞ Argument verschwinden zwar sämtliche Funktionen J_m und K_m, aber $\frac{m}{k_2 r} J_m$ verschwindet von höherer Ordnung als $J_{m+1}(k_2 r)$.

Beachtet man (50) und (51), so wird:

$$(52)\quad \begin{cases} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} + A'_m A'_{m+1} + B'_m B'_{m+1} \\ \qquad = \{ 2 f_m + h_m - j_m \} \{ J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m \} \\ \qquad = \frac{1}{k_2 r} \{ 2 f_m + h_m - j_m \}. \end{cases}$$

Und damit wird der Strahlungsdruck unabhängig von der speziellen Wahl der Integrationsfläche.

Es ist

$$2f_n + h_n - j_n = \{\pi\alpha'_{n+1}\beta''_n - \pi\alpha''_n\beta''_{n+1} + \alpha''_{n+1}b^{(1)}_n + \beta''_{n+1}b^{(2)}_n - \alpha''_n b^{(1)}_{n+1} - \beta''_n b^{(2)}_{n+1}\}.$$

Also wird (46)

$$(53)\quad \begin{cases} -\bar{X}_{\parallel} = \frac{1}{8k_1}\{\pi\alpha_1''\beta_0'' - \pi\alpha_0''\beta_1'' + \alpha_1'' - 2\beta_0\} \\ \quad + \frac{1}{16k_1}\sum_1^\infty n\{\pi\alpha''_{n+1}\beta''_n - \pi\alpha''_n\beta''_{n+1} + \alpha''_{n+1}b^{(1)}_n \\ \qquad + \beta''_{n+1}b^{(2)}_n - \alpha''_n b^{(1)}_{n+1} - \beta''_n b^{(2)}_{n+1}\}. \end{cases}$$

Und damit ist der Strahlungsdruck für den Fall, daß die elektrische Kraft $\parallel$ der Zylinderachse polarisiert ist, exakt berechnet.[1])

2. Teil.

Die elektrische Kraft ist senkrecht zur Zylinderachse polarisiert. ($\perp$ Fall.)

§ 6. Das Feld im $\perp$ Falle.

Ist die elektrische Kraft senkrecht zur Zylinderachse polarisiert, so verschwinden $\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$ und $\mathfrak{E}_z$ und die Ableitungen nach z. Gleichungen (1) reduzieren sich also:

$$(54)\quad \begin{cases} \text{a)} & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\varphi = -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial r}, \\ \text{b)} & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_r}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_r = +\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\varphi}, \\ \text{c)} & \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{1}{r}\mathfrak{E}_\varphi - \frac{\partial\mathfrak{E}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{E}_r}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Man differenziere a, b, c nach resp. r, φ, t und setze in c ein:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left\{\frac{1}{r}\mathfrak{E}_\varphi + \frac{\partial\mathfrak{E}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{E}_r}{\partial\varphi}\right\} = \frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial\varphi^2}.$$

Die Klammer ist aber gleich $-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}$, also:

$$(55)\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial\varphi^2}.$$

1) Ist die Amplitude der einfallenden Welle nicht = 1, sondern = A, so ist die rechte Seite von (53) noch mit A^2 zu multiplizieren.

Das ist dieselbe Gleichung wie (3), nur daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ vertauscht sind. Setzt man wieder

$$\frac{\varepsilon\mu n^2}{c^2} - \frac{4\pi i\mu n\sigma}{c^2} = k^2,$$

so wird (55) allgemein integriert durch:

$$(56) \qquad \mathfrak{H} = e^{int}\sum_0^\infty m \{d_m J_m(kr) + c_m K_m(kr)\} \cos m\varphi .$$

Ebenso wie beim $\parallel$ Fall findet man:

$$(58) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_1 = e^{int}\sum_0^\infty m\, d_m' J_m(k_1 r)\cos m\varphi , \\ \mathfrak{H}_2 = e^{int}\sum_0^\infty m \{d_m'' J_m(k_2 r) + c_m'' Q_m(k_2 r)\}\cos m\varphi . \end{cases}$$

wo $d_0'' = 1$ und $d_m'' = 2i^m$ ist.

Die Koeffizienten d_m' und c_m'' werden durch die Grenzbedingung

$$(59) \quad \begin{cases} (\mathfrak{H}_1)_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{H}_2)_{r=\varrho_1}, \\ (\mathfrak{E}_{\varphi 1})_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{E}_{\varphi 2})_{r=\varrho_1} \end{cases}$$

bestimmt.

Es ist nach (54a) und (56)

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\varphi = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} = -ke^{int}\sum_0^\infty m \{d J_m' + c_m K_m'\}\cos m\varphi$$
$$= -ke^{int} F(r,\varphi).$$

Ich setze $\mathfrak{E}_\varphi = C \cdot k \cdot e^{int} \cdot F(r,\varphi)$. Dann folgt

$$C = \frac{ic}{\varepsilon n - 4\pi i\sigma},$$

also:

$$(60) \quad (\mathfrak{E}_\varphi)_1 = \frac{k_1 i \cdot c}{\varepsilon_1 n - 4\pi i\sigma_1} e^{int}\sum_0^\infty m\, d_m' J_m'(k_1 r)\cos m\varphi ,$$

$$(61) \quad (\mathfrak{E}_\varphi)_2 = +ie^{int}\sum_0^\infty m \{d_m'' J_m'(k_2 r) + c_m'' Q_m'(k_2 r)\}\cos m\varphi ,$$

denn $\varepsilon_2 = 1$, $\sigma_2 = 0$ $k_2 = \frac{n}{c}$.

Also folgt aus (59), wenn nach der bekannten Schlußfolgerung das Summenzeichen weggelassen wird:

$$d' J_{11} = d'' J_{21} + c'' Q_{21}$$

und

$$p_1 d' J_{11}' = d'' J_{21}' + c'' Q_{21}',$$

wenn

$$p_1 = \frac{k_1 c}{\varepsilon_1 n - 4\pi i \sigma_1}$$

ist

Es folgt:

$$c_m'' = 2 i^m \frac{p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)}{J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1)} \tag{62}$$

oder

$$\frac{2 i^m}{c_m''} = \frac{J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1)}{p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)} + \frac{i\pi}{2}. \tag{62a}$$

Für $m = 0$ tritt an Stelle von $2 i^m$ der Faktor 1.

§ 7. Eigenschwingungen im $\perp$ Falle.

Die Bedingungsgleichung für Eigenschwingungen erhält man ebenso wie früher:

$$p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) = 0. \tag{63}$$

Als Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen erhält man:

$$k_1 J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1) - \varepsilon_1 k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) = 0, \tag{64}$$

da diese nur an dielektrischen Zylindern möglich sind, also $\sigma_1 = 0$ ist.

§ 8. Berechnung des Strahlungsdruckes im $\perp$ Falle.

Man findet ebenso wie früher:

$$(\mathfrak{E}_r)_2 = + \frac{i}{r k_2} e^{i n t} \sum_0^\infty m \{d_m'' J_m(k_2 r) + c_m'' Q_m(k_2 r)\} \sin m \varphi. \tag{65}$$

Nach (23) wird jetzt:

$$\left\{ \begin{aligned} X_{a_\perp} &= \frac{1}{8\pi} \{\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2\} n_x + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y n_y - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 n_x \\ &= \frac{1}{8\pi} \{- \mathfrak{H}_2^2 \cos\varphi + (\mathfrak{E}_r)_2^2 \cos\varphi - (\mathfrak{E}_\varphi)_2^2 \cos\varphi \\ &\qquad - 2 (\mathfrak{E}_r)_2 (\mathfrak{E}_\varphi)_2 \sin\varphi\}.^1) \end{aligned} \right. \tag{66}$$

Da $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_\varphi$ im $\perp$ Falle mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$ im $\parallel$ Falle formal übereinstimmen ($\mathfrak{E}_{r_\perp}$ und $\mathfrak{E}_{\varphi_\perp}$ haben zwar das umgekehrte Vorzeichen wie $\mathfrak{H}_{r_\parallel}$ und $\mathfrak{H}_{\varphi_\parallel}$, wie man sich aber sofort über-

1) Vgl. Formel (25).

zeugt, ist das gleichgültig), können die Formeln des ∥ Falles sofort auf den ⊥ Fall übertragen werden. Ist

$$c_m'' = \gamma_m'' + i\delta_m''$$

und

$$d_m'' = d_m^{(1)} + i d_m^{(2)},$$

so wird der Strahlungsdruck:

$$(67)\left\{\begin{aligned} -\overline{X}_\perp = {} & \frac{1}{8k_2}\{\pi\gamma_1''\delta_0'' - \pi\gamma_0''\delta_1'' + \gamma_1'' - 2\delta_0''\} \\ & + \frac{1}{16k_2}\sum_1^\infty m\{\pi\gamma_{m+1}''\delta_m'' - \pi\gamma_m''\delta_{m+1}'' + \gamma_{m+1}'' d_m^{(1)} \\ & + \delta_{m+1}'' d_m^{(2)} - \gamma_m'' d_{m+1}^{(1)} - \delta_m'' d_{m+1}^{(2)}\}. \end{aligned}\right.$$

3. Teil.

Numerische Rechnungen.

§ 9. Numerische Berechnung des Strahlungsdruckes auf einen Wasserzylinder von 1 cm Radius im Vakuum für den ∥ Fall.

Im folgenden wird der Strahlungsdruck auf einen Wasserzylinder von 1 cm Radius im Vakuum für den ∥ Fall numerisch berechnet. Ich gehe aus von der Formel (53). Man braucht zur Berechnung von $-\overline{X}_\parallel$ nur die Kenntnis der Koeffizienten $a_m'' = \alpha_m'' + i\beta_m''$. Für Wasser ist $\varepsilon_1 = 81$, $\mu_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$, also wird Formel (17a):

$$\frac{2i^m}{a_m''} = \frac{k_2 J_{11} K_m' - k_1 J_{11}' K_{m1}}{k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}'} + \frac{i\pi}{2}.$$

Da $\varrho_1 = 1$ cm ist, wird $k_2\varrho_1 = k_2 = \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, wo λ die Länge der einfallenden Welle im Vakuum ist. Ferner ist

$$k_1 = \sqrt{\varepsilon_1}\frac{n}{c} = 9k_2.$$

$k_1\varrho_1$ ist das größte auftretende Argument. Die Funktionen J treten in (17a) von den Argumenten $k_1\varrho_1$ und $k_2\varrho_1$, die Funktionen K nur vom Argument $k_2\varrho_1$ auf. Die Werte für $J_0(x)$ und $J_0'(x) = -J_1(x)$ liegen in den Funktionentafeln von Jahnke-Emde bis zum Argument $x = 15{,}5$ berechnet vor. Ich konnte also den Strahlungsdruck in dem Intervall von 0—1,7 für k_2 (d. h. von 0—15,3 für k_1) berechnen. Die Werte für die $K_0(k_2\varrho_1)$ und $K_1(k_2\varrho_1)$ wurden dem gleichen Tafelwerk entnommen. In diesem Intervall konnte die Reihe (53) schon bei

$m = 3$ abgebrochen werden, und zwar genügten diese Glieder schon völlig bei $k_2 = 1{,}7$. Bei kleinerem k_2 konnte schon eher abgebrochen werden. Da in (53) als Index $m + 1$ auftritt, mußten die Koeffizienten $\alpha_0''\ \beta_0''$ bis $\alpha_4''\ \beta_4''$ berechnet werden. Die Nullstellen des Zählers von (17a) geben die Eigenschwingungen des Zylinders. Es wurden zunächst die Koeffizienten α'' und β''

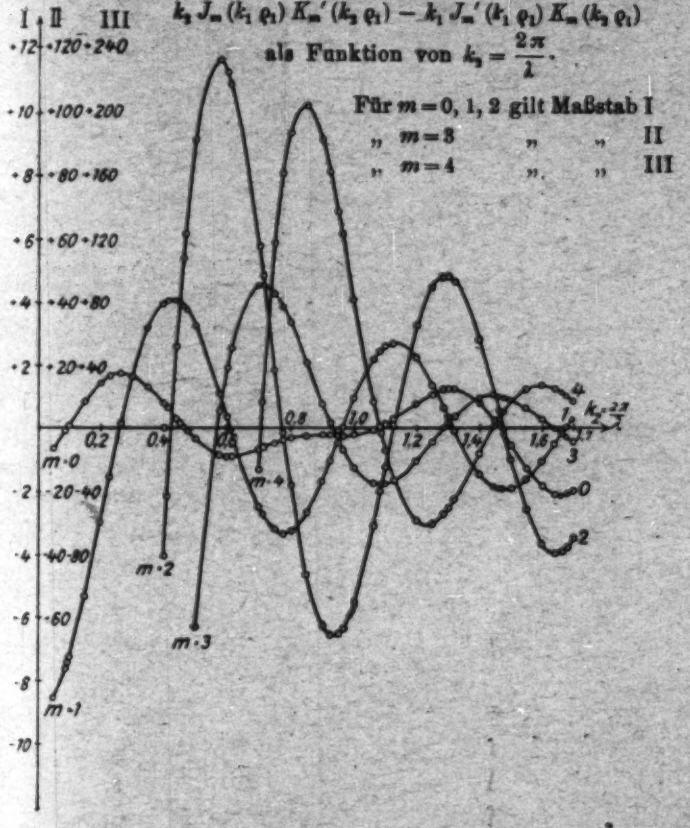


Fig. 2.

($m = 0{,}1 \ldots 4$) derart berechnet, daß $k_2 = 0{,}05$, 0,1 und dann immer um 0,1 wachsend bis 1,7 gesetzt wurde. Daraus wurden annähernd die Eigenschwingungen (für $m = 0{,}1 \ldots 4$) berechnet und nun die Koeffizienten für diese in unmittelbarer Nähe der Eigenschwingungen liegenden Werte von k_2 berechnet. Es ergab sich so die Notwendigkeit, die Koeffizienten für $m = 0{,}1 \ldots 4$

für 50 verschiedene Wellenlängen zu berechnen. — Die nicht in den Tafeln enthaltenen Funktionswerte der höheren Ordnungen wurden entweder mit Hilfe der Rekursionsformeln (49), oder, wo diese Rechnungsart für höhere Ordnungen und kleine Argumente zu ungenau wurde, aus den Reihen für J_m und J_m' teilweise berechnet und dazwischenliegende Argumente aus den Kurven graphisch interpoliert.[1]) Sämtliche numerischen Rechnungen sind mit dem Rechenschieber ausgeführt. In Fig. 2 ist $k_2 J_{11} K_{21}' - k_1 J_{11}' K_{21}$ als Funktion von k_2 aufgetragen. Mit wachsendem m nehmen die Maxima stark zu. Deswegen mußte für $m = 3$ und $m = 4$ je ein kleinerer Maßstab gewählt werden. Die Nullstellen geben die Eigenschwingungen. Merkwürdig ist das Verhalten der Funktion für $m = 0$ zwischen 0,8 und 1,1. Es wird später gezeigt werden, daß sich die Koeffizienten α_0'' und β_0'' so verhalten, als ob bei $k_2 = 0{,}8$ eine Eigenschwingung sei. In der folgenden Tabelle 1 sind die Werte von k_2, die Eigenschwingungen entsprechen, für $m = 0$ bis $m = 4$ zusammengestellt.

Tabelle 1.

Wurzeln von: $k_2 J_m(9k_2) K_m'(k_2) - 9k_2 J_m'(9k_2) K_m(k_2) = 0$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$k_2 =$	+0,09587*[2])	+0,2631*	+0,4237	+0,5706	+0,7073
	+0,4648*	+0,6102	+0,7752	+0,9324	+1,0825
	+1,0709	+0,9621	+1,1246	+1,2857	+1,4435
	+1,4656	+1,3170	+1,4743	+1,6379	
		+1,6771			

Der Abstand der Wurzeln innerhalb einer Ordnung ist fast konstant. — Fig. 3 enthält den Nenner von (17a): $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}'$ als Funktion von k_2. Man sieht, wie mit wachsendem m die Kurven sich immer weiter der Abszissenachse anschmiegen. Kurve für $m = 4$ ist in größerem Maßstabe gezeichnet. In den Nullpunkten dieser Funktion für das betreffende m werden α_m'' und β_m'' gleich 0, wie man sich

1) Die durch Kreise bezeichneten Kurvenpunkte sämtlicher Figuren sind berechnet.

2) Die mit * bezeichneten Wurzeln sind schon von Schaefer-Großmann angegeben.

aus (17a) leicht überzeugt. In den Nullpunkten von $k_2 J_{11}' K_{21} - k_1 J_{11}' K_{21}$ [1]) für das betreffende m werden abwechselnd $\alpha_m'' = 0$ und $\beta_m'' = \pm 4/\pi$ (oder eben umgekehrt). Für $m = 0$ wird in den Eigenschwingungen $\alpha_0'' = 0$ und $\beta_0'' = -2/\pi$ (weil $b_0'' = 1$). Man sieht dieses Verhalten der Koeffizienten in den Figg. 4,

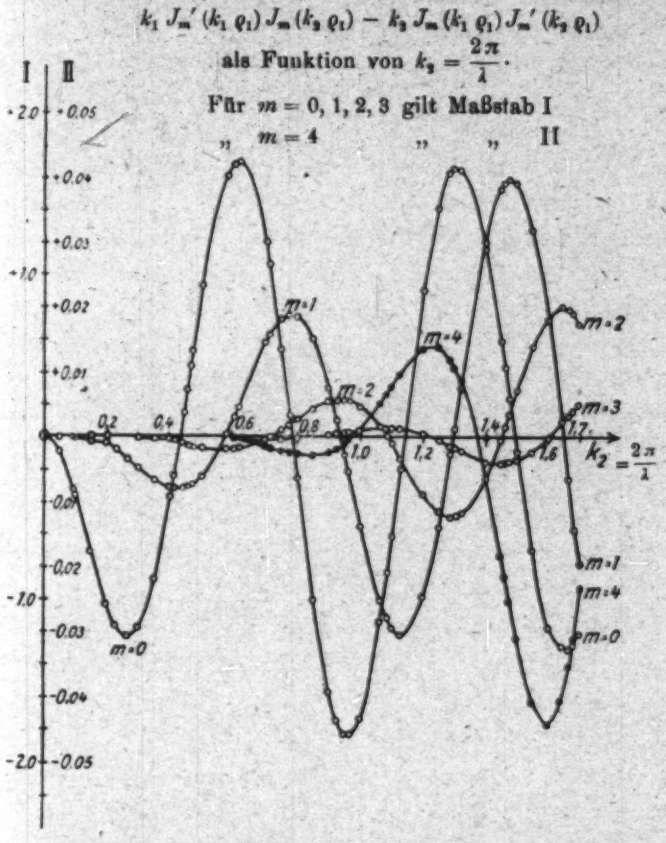


Fig. 3.

5 und 6. Für $m = 3$ und 4 ist der Verlauf der Koeffizienten nicht gezeichnet, weil sie außer an den Stellen der Eigenschwingungen sehr klein bleiben. Man sieht in den Figg. 4 bis 6 deutlich die durch die Eigenschwingungen des Zylinders hervorgerufenen Schwankungen im Verlauf der Koeffizienten. Die Stellen der Eigenschwingungen der betreffenden Ordnung

1) Also in den Eigenschwingungen der betreffenden Ordnung.

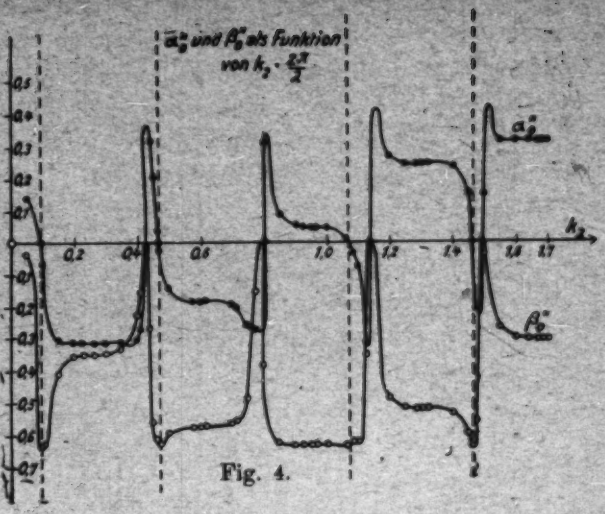


Fig. 4.

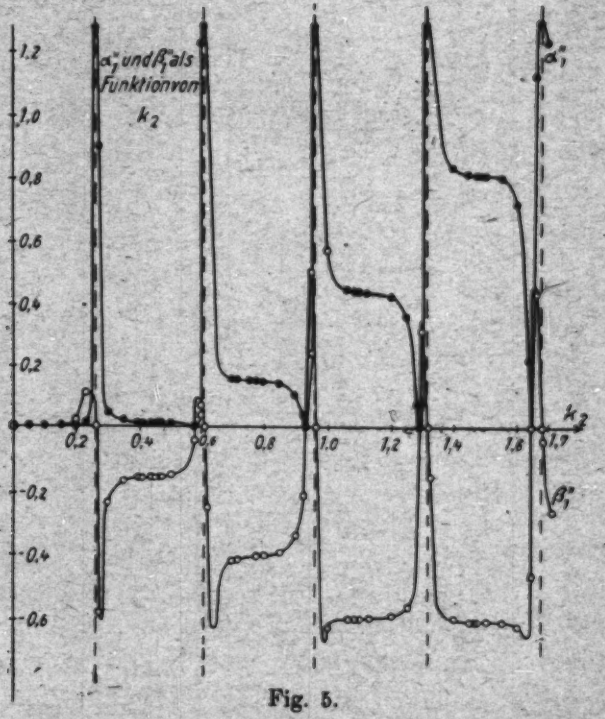


Fig. 5.

sind durch die gestrichelten Geraden bezeichnet. In Fig. 4 sieht man, wie sich bei 0,8 die α_0 und β_0 wie in der Nähe einer Eigenschwingung verhalten. Ferner sieht man, wie sich

die Koeffizienten mit wachsendem m immer weiter der Abszissenachse anschmiegen und nur in der Nähe der Eigenschwingungen ein beinahe unstetiges Anwachsen zeigen.[1]) In den folgenden Tabellen werden die Wurzeln des Nenners von (17a) und die Koeffizienten α_m'' und β_m'' gegeben.

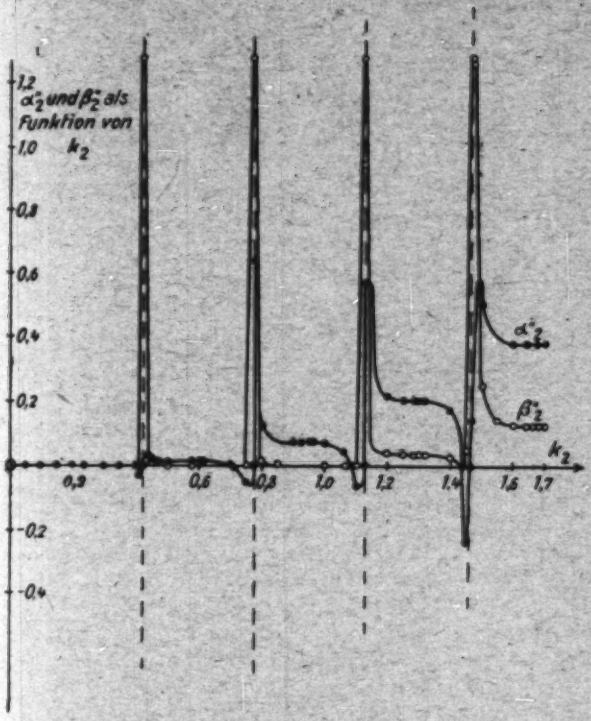


Fig. 6.

Tabelle 2.

Wurzeln von: $9k_2 J_m'(9k_2) J_m(k_2) - k_2 J_m(9k_2) J_m'(k_2) = 0$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
	+0,4282	+0,5708	+0,7097	+0,8294	+0,9745
$k_2 =$	+0,7847	+0,9381	+1,0871	+1,2293	+1,3680
	+1,1399	+1,2951	+1,4490	+1,5991	
	+1,4937	+1,6495			

1) Es sei noch bemerkt, daß nur die durch Kreise bezeichneten Kurvenpunkte berechnet sind und Maxima, wie z. B der Kurve für β_1'' in Fig. 5 bei 0,63 nur qualitativ bewertet werden dürfen.

Die Wurzeln dieser Funktion für die Ordnungen 0, 1, 2 fallen nahe mit den Wurzeln von

$$k_2 J_m(9k_2) K_m'(k_2) - 9k_2 J_m'(9k_2) K_m(k_2) = 0$$

der Ordnungen 2, bzw. 3 und 4 zusammen. (Vgl. Tabelle 1.)

Tabelle 3.

α_0'' und β_0''.

k_2	α_0''	β_0''	k_2	α_0''	β_0''
0,05	+0,1402	−0,03264	0,712	−0,2068	−0,5600
0,1	−0,0657	−0,6310	0,75	−0,2692	−0,4890
0,2	−0,3130	−0,3566	0,776	−0,2754	−0,1582
0,3	−0,3162	−0,3500	0,925	+0,0475	−0,6330
0,4	−0,3052	−0,2288	0,95	+0,0467	−0,6330
0,5	−0,1453	−0,5990	0,963	+0,0464	−0,6330
0,6	−0,1853	−0,5773	1,063	+0,0126	−0,6350
0,7	−0,1986	−0,5675	1,085	−0,0301	−0,6220
0,8	+0,3110	−0,3862	1,127	−0,3164	−0,3520
0,9	+0,0514	−0,6340	1,25	+0,2494	−0,5160
1,0	+0,0453	−0,6330	1,287	+0,2459	−0,5200
1,1	−0,0766	−0,6270	1,32	+0,2466	−0,5195
1,2	+0,2694	−0,4875	1,449	+0,1532	−0,5980
1,3	+0,2466	−0,5199	1,461	$+6{,}43 \cdot 10^{-3}$	−0,6360
1,4	+0,2354	−0,5325	1,475	−0,2076	−0,5600
1,5	+0,1501	−0,0376	1,641	+0,3180	−0,3054
1,6	+0,3178	−0,3001	1,679	+0,3182	−0,3061
1,7	+0,3180	−0,3058	0,15	−0,3042	−0,4112
0,096	−0,002422	−0,6365	0,35	−0,3176	−0,3334
0,266	−0,3166	−0,3514	0,85	+0,0873	−0,6250
0,45	+0,2058	−0,5655	1,55	+0,3144	−0,2692
0,461	+0,0354	−0,6165	1,665	+0,3179	−0,3052
0,468	−0,0258	−0,6260	0,41	−0,2756	−0,1595
0,577	−0,1849	−0,5775	0,44	+0,3141	−0,2680
0,612	−0,1858	−0,5770	0,23	−0,3168	−0,3526

Tabelle 4.

α_1'' und β_1''.

k_2	α_1''	β_1''	k_2	α_1''	β_1''
0,05	$+3{,}864 \cdot 10^{-9}$	$+7{,}02 \cdot 10^{-5}$	1,1	+0,4299	−0,6020
0,1	$+1{,}151 \cdot 10^{-6}$	$+1{,}211 \cdot 10^{-3}$	1,2	+0,4165	−0,5975
0,2	$+2{,}526 \cdot 10^{-4}$	$+1{,}795 \cdot 10^{-2}$	1,3	+0,0772	+0,3036
0,3	+0,0438	−0,2322	1,4	+0,8240	−0,6080
0,4	+0,0191	−0,1547	1,5	+0,8030	−0,6155
0,5	+0,0171	−0,1467	1,6	+0,7095	−0,6325
0,6	+0,0408	+0,0708	1,7	+1,2120	−0,2740
0,7	+0,1565	−0,4180	0,096	$+7{,}41 \cdot 10^{-7}$	$+9{,}71 \cdot 10^{-4}$
0,8	+0,1462	−0,4055	0,266	+0,9010	−0,5800
0,9	+0,1001	−0,3432	0,45	+0,01900	−0,1560
1,0	+0,5645	−0,6330	0,461	+0,01890	−0,1538

Tabelle 4 (Fortsetzung).

α_1'' und β_1''.

k_2	α_1''	β_1''	k_2	α_1''	β_1''
0,468	+0,01867	−0,1529	1,32	+1,252	−0,1583
0,577	$+1{,}163\cdot10^{-3}$	+0,03846	1,449	+0,8000	−0,6150
0,612	+1,222	−0,2514	1,461	+0,8030	−0,6150
0,712	+0,1524	−0,4135	1,475	+0,7995	−0,6150
0,75	+0,1468	−0,4065	1,641	+0,2101	−0,4725
0,776	+0,1461	−0,4060	1,679	+1,272	−0,04075
0,925	+0,0375	−0,2154	0,15	$+4{,}15\cdot10^{-5}$	$+7{,}27\cdot10^{-3}$
0,95	+0,2390	+0,4970	0,35	+0,02136	−0,1635
0,963	+1,268	−0,0882	0,85	+0,1398	−0,3984
1,063	+0,4400	−0,6055	1,55	+0,7890	−0,6185
1,085	+0,4335	−0,6025	1,665	+1,111	+0,4240
1,127	+0,4280	−0,6015	0,41	+0,01911	−0,1549
1,25	+0,3526	−0,5700	0,44	+0,01911	−0,1549
1,287	+0,0730	−0,2964	0,23	$+9{,}79\cdot10^{-3}$	+0,1113

Tabelle 5.

α_2'' und β_2''.

k_2	α_2''	β_2''	k_2	α_2''	β_2''
0,05	$-5{,}065\cdot10^{-9}$	$+2{,}016\cdot10^{-17}$	0,712	$-9{,}625\cdot10^{-4}$	$+7{,}280\cdot10^{-7}$
0,1	$-3{,}279\cdot10^{-7}$	$+8{,}45\cdot10^{-14}$	0,75	−0,04945	$+1{,}916\cdot10^{-5}$
0,2	$-3{,}276\cdot10^{-5}$	$+8{,}41\cdot10^{-10}$	0,776	+0,6360	+0,6650
0,3	$-5{,}72\cdot10^{-4}$	$+2{,}572\cdot10^{-7}$	0,925	+0,0700	$+3{,}85\cdot10^{-3}$
0,4	−0,01425	$+1{,}597\cdot10^{-4}$	0,95	+0,0715	$+4{,}01\cdot10^{-3}$
0,5	+0,01285	$+1{,}300\cdot10^{-4}$	0,963	+0,0705	$+3{,}92\cdot10^{-3}$
0,6	+0,01189	$+1{,}114\cdot10^{-4}$	1,063	+0,0436	$+1{,}495\cdot10^{-3}$
0,7	$+3{,}898\cdot10^{-3}$	$+9{,}05\cdot10^{-6}$	1,085	$+6{,}42\cdot10^{-3}$	$+3{,}238\cdot10^{-5}$
0,8	+0,1227	+0,01194	1,127	+0,5605	+0,9385
0,9	+0,07080	$+3{,}96\cdot10^{-3}$	1,25	+0,1989	+0,0318
1,0	+0,06840	$+3{,}67\cdot10^{-3}$	1,287	+0,1971	+0,0312
1,1	−0,0690	$+3{,}22\cdot10^{-3}$	1,32	+0,1970	+0,0313
1,2	+0,2100	+0,03566	1,449	$+4{,}925\cdot10^{-3}$	$+1{,}90\cdot10^{-5}$
1,3	+0,1968	+0,03126	1,461	−0,2424	+0,0479
1,4	+0,1720	+0,02374	1,475	+0,1384	+1,259
1,5	+0,5000	+0,2426	1,641	+0,3758	+0,1222
1,6	+0,3754	+0,1223	1,679	+0,3746	+0,1218
1,7	+0,3712	+0,1192	0,15	$-4{,}975\cdot10^{-6}$	$+1{,}952\cdot10^{-1}$
0,096	$-3{,}248\cdot10^{-7}$	$+8{,}275\cdot10^{-14}$	0,35	$-2{,}19\cdot10^{-3}$	$+3{,}776\cdot10^{-6}$
0,266	$-2{,}236\cdot10^{-4}$	$+3{,}93\cdot10^{-8}$	0,85	+0,0760	$+4{,}54\cdot10^{-3}$
0,45	+0,02164	$+3{,}684\cdot10^{-4}$	1,55	+0,3904	+0,1341
0,461	+0,01718	$+2{,}32\cdot10^{-4}$	1,665	+0,3740	+0,1215
0,468	+0,01598	$+2{,}008\cdot10^{-4}$	0,41	−0,0286	$+6{,}42\cdot10^{-4}$
0,577	+0,01166	$+1{,}070\cdot10^{-4}$	0,44	+0,03038	$+7{,}25\cdot10^{-4}$
0,612	+0,01178	$+1{,}090\cdot10^{-4}$	0,23	$-8{,}425\cdot10^{-5}$	$+5{,}585\cdot10^{-9}$

Tabelle 6.

α_3'' und β_3''.

k_1	α_3''	β_3''	k_2	α_3''	β_3''
0,05	$-2{,}352\cdot10^{-21}$	$-5{,}475\cdot10^{-11}$	0,712	$-2{,}154\cdot10^{-7}$	$+5{,}235\cdot10^{-4}$
0,1	$-2{,}38\cdot10^{-18}$	$-1{,}741\cdot10^{-9}$	0,75	$-2{,}074\cdot10^{-7}$	$+5{,}135\cdot10^{-4}$
0,2	$-9{,}60\cdot10^{-15}$	$-1{,}103\cdot10^{-7}$	0,776	$-1{,}679\cdot10^{-7}$	$+4{,}625\cdot10^{-4}$
0,3	$-1{,}821\cdot10^{-13}$	$-1{,}520\cdot10^{-6}$	0,925	$-6{,}125\cdot10^{-4}$	$-0{,}02798$
0,4	$-1{,}91\cdot10^{-10}$	$-1{,}557\cdot10^{-5}$	0,95	$-1{,}924\cdot10^{-4}$	$+0{,}01565$
0,5	$-1{,}603\cdot10^{-8}$	$-1{,}428\cdot10^{-4}$	0,963	$-8{,}895\cdot10^{-5}$	$+0{,}01062$
0,6	$-7{,}36\cdot10^{-8}$	$+9{,}675\cdot10^{-4}$	1,063	$-3{,}448\cdot10^{-5}$	$+6{,}615\cdot10^{-3}$
0,7	$-2{,}16\cdot10^{-7}$	$+5{,}25\cdot10^{-3}$	1,085	$-3{,}406\cdot10^{-5}$	$+6{,}585\cdot10^{-3}$
0,8	$-1{,}099\cdot10^{-7}$	$+3{,}74\cdot10^{-4}$	1,127	$-3{,}321\cdot10^{-5}$	$+6{,}505\cdot10^{-3}$
0,9	$-1{,}191\cdot10^{-5}$	$-3{,}90\cdot10^{-5}$	1,25	$-3{,}826\cdot10^{-5}$	$-6{,}975\cdot10^{-3}$
1,0	$-4{,}12\cdot10^{-5}$	$+7{,}24\cdot10^{-3}$	1,287	$-0{,}2521$	$+0{,}5077$
1,1	$-3{,}424\cdot10^{-5}$	$+6{,}60\cdot10^{-3}$	1,32	$-1{,}646\cdot10^{-3}$	$+0{,}04575$
1,2	$-1{,}442\cdot10^{-5}$	$+4{,}28\cdot10^{-3}$	1,449	$-7{,}67\cdot10^{-4}$	$+0{,}03124$
1,3	$-5{,}33\cdot10^{-3}$	$+0{,}0822$	1,461	$-7{,}625\cdot10^{-4}$	$+0{,}03118$
1,4	$-7{,}79\cdot10^{-4}$	$+0{,}03152$	1,475	$-7{,}535\cdot10^{-4}$	$+0{,}03099$
1,5	$-7{,}34\cdot10^{-4}$	$+0{,}03054$	1,641	$-0{,}3168$	$+0{,}5510$
1,6	$-1{,}007\cdot10^{-6}$	$-1{,}133\cdot10^{-3}$	1,679	$-0{,}01071$	$+0{,}1162$
1,7	$-8{,}10\cdot10^{-3}$	$+0{,}1013$	0.15	$-2{,}070\cdot10^{-16}$	$-1{,}621\cdot10^{-3}$
0,096	$-2{,}064\cdot10^{-18}$	$-1{,}62\cdot10^{-9}$	0,35	$-2{,}746\cdot10^{-11}$	$-5{,}900\cdot10^{-6}$
0,266	$-3{,}576\cdot10^{-13}$	$-6{,}75\cdot10^{-7}$	0,85	$-4{,}34\cdot10^{-5}$	$-2{,}348\cdot10^{-4}$
0,45	$-1{,}511\cdot10^{-9}$	$-4{,}380\cdot10^{-5}$	1,55	$-5{,}37\cdot10^{-4}$	$+0{,}02614$
0,461	$-2{,}421\cdot10^{-9}$	$-5{,}55\cdot10^{-5}$	1,665	$-0{,}01549$	$+0{,}1396$
0,468	$-3{,}258\cdot10^{-9}$	$-6{,}44\cdot10^{-5}$	0,41	$-2{,}998\cdot10^{-10}$	$-1{,}951\cdot10^{-5}$
0,577	$-6{,}365\cdot10^{-6}$	$+2{,}846\cdot10^{-3}$	0,44	$-9{,}97\cdot10^{-10}$	$-3{,}558\cdot10^{-5}$
0,612	$-4{,}785\cdot10^{-7}$	$+7{,}80\cdot10^{-4}$	0,23	$-4{,}92\cdot10^{-14}$	$-2{,}502\cdot10^{-7}$

Bricht man in Formel (53) hinter $m = 3$ ab, so bekommt man:[1])

$$(68)\quad \left\{ \begin{aligned} -\overline{X}_{||} = \frac{1}{16\,k_2}\{ & 2\pi\alpha_1''\beta_0'' - 2\pi\alpha_0''\beta_1'' + 4\alpha_1'' - 4\beta_0'' \\ & + \pi\alpha_2''\beta_1'' - \pi\alpha_1''\beta_2'' + 4\beta_2'' + \pi\alpha_3''\beta_2'' - \pi\alpha_2''\beta_3'' \\ & - 4\alpha_3'' + \pi\alpha_4''\beta_3'' - \pi\alpha_3''\beta_4'' - 2\beta_4''\}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man darin die Werte aus den Tabb. 3—7 ein, so erhält man für $-\overline{X}_{||}$[2]) folgende Werte der Tab. 8.

1) $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 0$, $b_1^{(1)} = 0$, $b_1^{(2)} = +2$ usw.

2) $-\overline{X}_{||}$ ist ein Druck *in* der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle.

Tabelle 7.

α_4'' und β_4''.

k_2	α_4''	β_4''	k_2	α_4''	β_4''
0,05	$+8{,}355\cdot10^{-17}$	$-5{,}495\cdot10^{-33}$	0,712	$-1{,}872\cdot10^{-4}$	$-2{,}754\cdot10^{-8}$
0,1	$+1{,}089\cdot10^{-14}$	$-9{,}325\cdot10^{-29}$	0,75	$-3{,}401\cdot10^{-5}$	$-9{,}125\cdot10^{-10}$
0,2	$+7{,}84\cdot10^{-13}$	$-4{,}830\cdot10^{-22}$	0,776	$-2{,}772\cdot10^{-5}$	$-6{,}045\cdot10^{-10}$
0,3	$+8{,}165\cdot10^{-10}$	$-5{,}245\cdot10^{-19}$	0,925	$-2{,}074\cdot10^{-5}$	$-3{,}381\cdot10^{-10}$
0,4	$+1{,}562\cdot10^{-8}$	$-1{,}922\cdot10^{-16}$	0,95	$-1{,}426\cdot10^{-5}$	$-1{,}598\cdot10^{-10}$
0,5	$+1{,}876\cdot10^{-7}$	$-2{,}772\cdot10^{-14}$	0,963	$-8{,}435\cdot10^{-6}$	$-5{,}590\cdot10^{-11}$
0,6	$+1{,}929\cdot10^{-6}$	$-2{,}924\cdot10^{-12}$	1,063	$+5{,}975\cdot10^{-4}$	$-2{,}807\cdot10^{-7}$
0,7	$+1{,}103\cdot10^{-4}$	$-9{,}585\cdot10^{-9}$	1,085	$-5{,}950\cdot10^{-3}$	$-2{,}785\cdot10^{-5}$
0 8	$-2{,}584\cdot10^{-5}$	$-5{,}245\cdot10^{-10}$	1,127	$-6{,}115\cdot10^{-4}$	$-2{,}948\cdot10^{-7}$
0,9	$-2{,}390\cdot10^{-5}$	$-4{,}495\cdot10^{-10}$	1,25	$-4{,}625\cdot10^{-4}$	$-1{,}688\cdot10^{-7}$
1,0	$+2{,}782\cdot10^{-5}$	$-6{,}075\cdot10^{-10}$	1,287	$-4{,}420\cdot10^{-4}$	$-1{,}538\cdot10^{-7}$
1,1	$-1{,}108\cdot10^{-3}$	$-9{,}655\cdot10^{-7}$	1,32	$-3{,}914\cdot10^{-4}$	$-1{,}204\cdot10^{-7}$
1,2	$-4{,}670\cdot10^{-4}$	$-1{,}710\cdot10^{-7}$	1,449	$-0{,}01780$	$-2{,}492\cdot10^{-4}$
1,3	$-4{,}295\cdot10^{-4}$	$-1{,}451\cdot10^{-7}$	1,461	$-7{,}215\cdot10^{-3}$	$-4{,}085\cdot10^{-5}$
1,4	$+7{,}455\cdot10^{-4}$	$-4{,}370\cdot10^{-7}$	1,475	$-4{,}885\cdot10^{-3}$	$-1{,}876\cdot10^{-5}$
1,5	$-3{,}768\cdot10^{-3}$	$-1{,}117\cdot10^{-5}$	1,641	$-3{,}198\cdot10^{-3}$	$-8{,}035\cdot10^{-6}$
1,6	$-3{,}222\cdot10^{-3}$	$-8{,}175\cdot10^{-6}$	1,679	$-2{,}976\cdot10^{-3}$	$-6{,}960\cdot10^{-6}$
1,7	$-2{,}608\cdot10^{-3}$	$-5{,}350\cdot10^{-6}$	0,15	$+6{,}380\cdot10^{-12}$	$-3{,}198\cdot10^{-25}$
0,096	$+1{,}237\cdot10^{-14}$	$-1{,}200\cdot10^{-28}$	0,35	$+4{,}080\cdot10^{-9}$	$-1{,}310\cdot10^{-17}$
0,266	$+1{,}322\cdot10^{-10}$	$-1{,}378\cdot10^{-20}$	0,85	$-2{,}554\cdot10^{-5}$	$-5{,}125\cdot10^{-10}$
0,45	$+5{,}535\cdot10^{-8}$	$-2{,}410\cdot10^{-15}$	1,55	$-3{,}262\cdot10^{-3}$	$-8{,}370\cdot10^{-6}$
0,461	$+7{,}280\cdot10^{-8}$	$-4{,}170\cdot10^{-15}$	1,665	$-3{,}092\cdot10^{-3}$	$-7{,}525\cdot10^{-6}$
0,468	$+8{,}740\cdot10^{-8}$	$-5{,}995\cdot10^{-15}$	0,41	$+1{,}873\cdot10^{-8}$	$-2{,}758\cdot10^{-16}$
0,577	$+1{,}119\cdot10^{-6}$	$-9{,}820\cdot10^{-13}$	0,44	$+4{,}075\cdot10^{-8}$	$-1{,}310\cdot10^{-15}$
0,612	$+2{,}608\cdot10^{-6}$	$-5{,}355\cdot10^{-12}$	0,23	$+2{,}166\cdot10^{-11}$	$-3{,}694\cdot10^{-23}$

Tabelle 8.

k_2	$-\bar{X}_{11}$	k_2	$-\bar{X}_{11}$	k_2	$-\bar{X}_{11}$	k_2	$-\bar{X}_{11}$
0,05	+0,1633	1,3	+0,09335	0,75	+0,1229	1,475	+0,1449
0,1	+1,578	1,4	+0,1452	0,776	+0,1541	1,641	+0,1021
0,2	+0,4570	1,5	+0,1294	0,925	+0,1739	1.679	+0,1416
0,3	+0,2119	1,6	+0,1340	0,95	+0,1654	0,15	+0,6915
0,4	+0,1054	1,7	+0,1434	0,963	+0,1663	0,35	+0,1878
0,5	+0,2829	0,096	+1,659	1,063	+0,1476	0,85	+0,1950
0,6	+0,2510	0,266	+0,4385	1,085	+0,1384	1,55	+0,1426
0,7	+0,1616	0,45	+0,3422	1,127	+0,1331	1,665	+0,1179
0,8	+0,1916	0,461	+0,3384	1,25	+0,1484	0,41	+0,06765
0,9	+0,1798	0,468	+0,3308	1,287	+0,1557	0,44	+0,2002
1,0	+0,1620	0,577	+0,2554	1,32	+0,1483	0,23	+0,4485
1,1	+0,1354	0,612	+0,2502	1,449	+0,1368		
1,2	+0,1589	0,712	+0,1562	1,461	+0,1343		

In Fig. 7 ist der Strahlungsdruck als Funktion von $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ graphisch dargestellt. Die über der Abszissenachse gezeichneten gestrichelten Geraden bezeichnen die Stellen der Eigen-

schwingungen, diejenigen unterhalb der Abszissenachse die Nullstellen von $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}' = 0$, die Länge der Geraden bezeichnet ihre Ordnung m. An den letzteren Nullstellen werden, wie bewiesen, die betreffenden α_m'' und β_m'' gleich 0; ist m klein, so bewirkt dieses Verhalten ein Kleinwerden des Strahlungsdruckes. Man sieht in Fig. 7 deutlich den Einfluß der Eigenschwingungen auf den Strahlungsdruck,

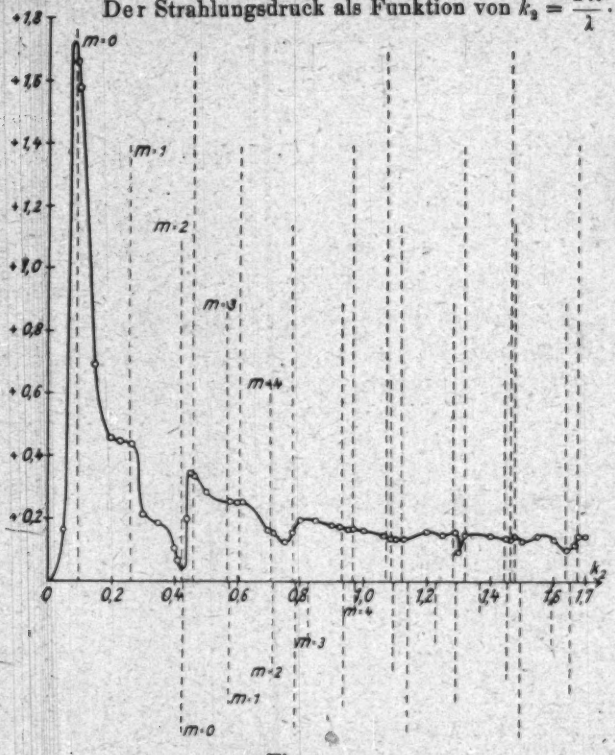


Fig. 7.

z. B. das Anwachsen bei der 1. und 2. Eigenschwingung der Ordnung 0 ($k_2 = 0{,}09587$ und $k_2 = 0{,}4648$) und die Verzögerung des Druckabfalles bei der 1. Eigenschwingung von $m = 1$ ($k_2 = 0{,}2631$). Ebenso sieht man ein deutliches Minimum bei $k_2 = 0{,}4282$ (1. Nullstelle von $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}' = 0$ für $m = 0$). Im weiteren Verlauf der Kurve verwischt sich der Einfluß dieser Nullstellen und der Eigenschwingungen mehr,

offenbar lagern sich zu viele derartige Einflüsse übereinander. Merkwürdig ist das Minimum bei $k_2 = 1{,}3$. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich bei Berechnung von noch mehr Kurvenpunkten noch mehr derartige Extrema zeigen.

§ 10. Ergebnisse.

In der vorliegenden Arbeit habe ich exakte Formeln für den Strahlungsdruck abgeleitet, den eine ebene, elektromagnetische Welle auf die Längeneinheit eines Kreiszylinders aus beliebigem Material ausübt, wenn die elektrische Kraft

a) parallel,
b) senkrecht

zur Zylinderachse polarisiert ist. Der Strahlungsdruck wurde dann für einen Wasserzylinder von 1 cm Radius für 50 verschiedene Längen der einfallenden Welle berechnet, und zwar variierte die Wellenlänge von $\lambda = 125{,}6$ cm bis $\lambda = 3{,}7$ cm. Es zeigt sich in diesem Intervall eine starke Beeinflussung des Strahlungsdruckes durch die Eigenschwingungen, der Druck wirkt in der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle.

Anhang.

Im Anhang soll noch der experimentell wichtige Fall behandelt werden, daß zwei koaxiale Zylinder aus beliebigem

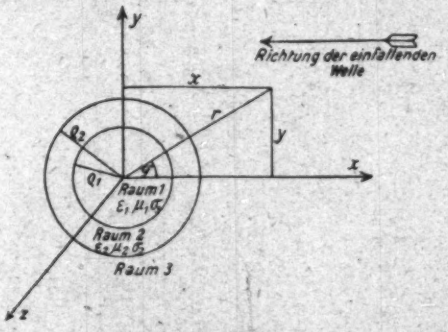


Fig. 8.

Material das Feld stören. Der innerste Raum (Raum 1) habe die Konstanten ε_1, μ_1, σ_1, der Zylinderring (Raum 2) ε_2, μ_2, σ_2, der Außenraum (Raum 3) $\varepsilon_3 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\sigma_3 = 0$.

§ 11. Das Feld im ‖ Falle.

Man kann die Integration der Gleichungen unverändert von dem Falle eines Zylinders übernehmen. Im Raum 1 bzw. 2, 3 seien die Konstanten a', b' bzw. a'', b'' und a''', b'''. Allgemeines Integral war nach (7):

$$\mathfrak{E} = e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{ b_m J_m(kr) + a_m K_m(kr) \} \cos m\varphi .$$

Es wird also:

$$(69) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m(k_1 r) \cos m\varphi , \\ \mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{ b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' K_m(k_2 r) \} \cos m\varphi , \\ \mathfrak{E}_3 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{ b_m''' J_m(k_3 r) + a_m''' Q_m(k_3 r) \} \cos m\varphi . \end{cases}$$

Bei $\mathfrak{E}_3$ muß wieder wegen der Ausstrahlungsbedingung Q_m für K_m gesetzt werden, bei $\mathfrak{E}_2$ liegt kein Grund vor, die Formel (7) zu ändern. Die Grenzbedingungen lauten:

$$(70) \quad \begin{cases} (\mathfrak{E}_1)_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_1}, \quad (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_2} = (\mathfrak{E}_3)_{r=\varrho_2}, \\ (\mathfrak{H}_{\varphi_1})_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_1}, \quad (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_2} = (\mathfrak{H}_{\varphi_3})_{r=\varrho_2}, \\ \text{oder dafür nach Formel (2)} \\ \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1} = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1}, \quad \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r}\right)_{r=\varrho_2} = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial r}\right)_{r=\varrho_2} \\ \text{und} \\ \mathfrak{E}_{3_{r=\infty}} = e^{int} e^{ikr\cos\varphi} . \end{cases}$$

Es ist jetzt:

$$k_1^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1 n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu_1 n \sigma_1}{c^2} ,$$

$$k_2^2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2 n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu_2 n \sigma_2}{c^2} ,$$

$$k_3^2 = \frac{n^2}{c^2} .$$

Die Grenzbedingungen (70) liefern (in abgekürzter Bezeichnung):

$$(71)\quad \begin{cases} b' J_{11} = b'' J_{21} + a'' K_{21}, \\ b'' J_{22} + a'' K_{22} = b''' J_{32} + a''' Q_{32}, \\ \frac{k_1}{\mu_1} b' J_{11}' = \frac{k_2}{\mu_2}\{b'' J_{21}' + a'' K_{21}'\}, \\ \frac{k_2}{\mu_2}\{b'' J_{22}' + a'' K_{22}'\} = k_3\{b''' J_{32}' + a''' Q_{32}'\}. \end{cases}$$

Man findet: $b_0''' = 1$, $b_m''' = 2i^m$ und:

$$(72)\quad \frac{2i^m}{a_m'''} = \frac{\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' K_{32} - k_3 J_{32} K_{32}'\right\}\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}' - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21}\right\} + \left\{\frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' K_{32} - k_3 K_{32} K_{32}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}'\right\}}{\left\{k_3 J_{32} J_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{32}' J_{32}\right\}\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}' - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21}\right\} + \left\{k_3 J_{32}' K_{32} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{32} K_{32}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}'\right\}} + \frac{i\pi}{2}.$$ [1])

Für kleine Werte von $\varrho_2 - \varrho_1 = \Delta$, die experimentell vorkommen, wenn man z. B. das Feld untersucht, das durch einen in einer Röhre eingeschlossenen Flüssigkeitszylinder gestört wird, findet man einen Näherungswert für (72), wenn man für das Argument $k_2 \varrho_2 = k_2 \varrho_1 + k_2 \Delta$ nach Taylor entwickelt und die höheren Potenzen von Δ vernachlässigt. Die Rechnung ist elementar, aber ziemlich umständlich. Nach (50) ist:

$$J_m'(x) K_m(x) - J_m(x) K_m'(x) = \frac{1}{x},$$

Differentiation liefert

$$J_m''(x) K_m(x) - J_m(x) K_m''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Durch Differentiation und Anwendung der Rekursionsformeln läßt sich zeigen, daß

$$J_m'''(x) K_m'(x) - J_m'(x) K_m'''(x) = \frac{x^2 + 2m - m^2}{x^3}$$

ist. Mit diesen Formeln erhält man die Näherungsformel für kleines Δ:

$$(73)\quad \begin{cases} \frac{2i^m}{a_m'''} = \frac{k_2 J_{11} K_{21}' - k_1 J_{11}' K_{21}}{k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}'} \\ \quad + \frac{J_{11}^2 (k_2^2 - k^2)}{\varrho_1 (k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}')^2} \cdot \Delta + \frac{i\pi}{2}. \end{cases}$$

1) Für $m = 0$ heißt die linke Seite $\frac{1}{a_0'''}$.

Hier ist $\mu_1 = \mu_2 = 1$ angenommen. Für $\Delta = 0$ geht (73) natürlich in (17a) über (der Index 3 ist dann durch 2 zu ersetzen). Für einen Wasserzylinder von 1 cm Radius ist nach Tab. 3 für $k_2 = 0{,}3$ ($\lambda \sim 20$ cm)

$$\alpha_0'' = -0{,}3162 \quad , \quad \beta_0'' = -0{,}3500.$$

Ist dieser Wasserzylinder in einer Glasröhre von 0,1 cm Wandstärke ($\Delta = 0{,}1$), so wird nach (73), da $\varepsilon_2 = 6{,}25$:

$$\frac{1}{\alpha_0''' + i\beta_0'''} = -1{,}419 + \frac{(-0{,}1424)^2 \cdot 0{,}09 \cdot 5{,}25}{-1{,}1723} \cdot 0{,}1 + \frac{i\pi}{2}$$
$$= -1{,}419 - 0{,}000818 + \frac{i\pi}{2}.$$

Das Korrektionsglied ist also sehr klein (innerhalb der Rechenschiebergenauigkeit). Man sieht, daß die Glasröhre die Koeffizienten der Ordnung 0 nicht wesentlich beeinflußt.

§ 12. Eigenschwingungen im ∥ Falle.

Die Bedingungsgleichungen für die Eigenschwingungen erhält man wieder durch Nullsetzen der äußeren Kraft. Man erhält für gedämpfte Eigenschwingungen:

$$(74)\left\{\begin{aligned}&\left\{\frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' Q_{32} - k_3 K_{22} Q_{32}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}'\right\}\\ &- \left\{k_3 J_{22} Q_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' Q_{32}\right\}\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}'\right.\\ &\left.- \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21}\right\} = 0.\end{aligned}\right.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, gelangt man zu der gleichen Bedingungsgleichung, wenn man das Integral auch im Raume 2 in der Form $b_m'' J_m + a_m'' Q_m$ ansetzt. Dies muß ja auch der Fall sein, da sich diese beiden Ansätze *im Raume 2* durch nichts unterscheiden. — Bringt man (72) auf die Form $a_m''' = 2i^m \cdot \frac{\cdots}{\cdots}$, so stimmt der Nenner formal mit der linken Seite von (74) überein. (Vgl. Formeln 17 und 19.)

Die Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen in dem schon erläuterten Sinne heißt:

$$(75)\quad \begin{aligned} &\left\{\frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' K_{32} - k_3 K_{22} K_{32}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}'\right\} \\ &- \left\{k_3 J_{22} K_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' K_{32}\right\}\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}' \right. \\ &\left. - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Nach dieser Formel sind die Eigenschwingungen eines Wasserzylinders vom Radius $\varrho_1 = 1$ cm in einem Glasrohr von 0,5 cm Wandstärke ($\varrho_2 = 1{,}5$ cm) für $m = 0$ berechnet ($\varepsilon_2 = 6{,}25$): Tab. 9.

Tabelle 9.

	$m = 0$
$k_3 =$	+0,0929
	+0,4646
	+0,8739
	+1,2288
	+1,5489

Wie man sieht, tritt eine Aufspaltung der Eigenschwingungen für den Fall des Wasser-Glaszylinders nicht ein. Das merkwürdige Verhalten der Kurve *eines* Wasserzylinders (vgl. S. 554 und Fig. 2) zwischen 0,8 und 1,0 zeigt übrigens der Wasser-Glaszylinder *nicht*. Die Eigenschwingungen eines Wasserzylinders vom Radius 1 cm sind in Tab. 1 enthalten, diejenigen für einen Wasserzylinder vom Radius 1,5 cm erhält man daraus durch Division mit 1,5. Aus Formel (19) folgt nämlich: Kennt man die Kurve der Eigenschwingungsbedingung für einen Zylinder vom Radius ϱ', so kann man die Kurve auch sofort für einen Zylinder (aus demselben Material!) vom Radius ϱ'' zeichnen, indem man Ordinaten und Abszissen mit ϱ'/ϱ'' multipliziert. Ein Glaszylinder hat in dem berechneten Intervall (0,05 bis 1,7) nur eine Eigenschwingung, und zwar ist sie für den Radius 1 cm $k_3 = 1{,}275$, für den Radius 1,5 cm $k_3 = 0{,}8435$.

§ 13. Das Feld im ⊥ Falle.

Sind die Konstanten im Raume 1, 2, 3, bzw. $c'\,d'$, $c''\,d''$ $c'''\,d'''$, so erhält man wie früher:

$$d_0''' = 1, \quad d_m''' = 2i^m.$$

Zur Bestimmung der c_m''' dienen die entsprechenden Grenzbedingungen. Es ist (vgl. S. 550):

$$\mathfrak{E}_\varphi = \frac{k i c}{s n - 4\pi i \sigma} e^{i n t} \sum_0^\infty m \{d_m J_m + a_m K_m\} \cos m\varphi .$$

Man erhält aus den Grenzbedingungen formal dieselben Gleichungen wie (71) und kann daher das Resultat direkt übernehmen. Es ist:

$$(76)\left\{ \frac{2 i^m}{c_m'''} = \frac{\begin{array}{r}\{p_2 J_{22}' K_{22} - J_{22} K_{22}'\}\{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\} \\ + \{p_2 K_{22}' K_{22} - K_{22} K_{22}'\}\{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\} \\ + \{J_{22}' K_{22} - p_2 J_{22} K_{22}'\}\{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\}\end{array}}{\{J_{22} J_{22}' - p_2 J_{22}' J_{22}\}\{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\}} + \frac{i\pi}{2} \right.$$

wo

$$p_1 = \frac{k_1 c}{s_1 n - 4\pi i \sigma_1}, \quad p_2 = \frac{k_2 c}{s_2 n - 4\pi i \sigma_2}, \quad p_3 = \frac{k_3 c}{n} = 1 \text{ ist.}$$

Für $m = 0$ heißt die linke Seite von (76) wieder: $1/c_0'''$. Als Eigenschwingungsbedingung erhält man schließlich:

$$(77)\left\{ \begin{array}{r}\{p_2 K_{22}' Q_{22} - K_{22} Q_{22}'\}\{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\} - \{J_{22} Q_{22}' \\ - p_2 J_{22}' Q_{22}\}\{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\} = 0.\end{array} \right.$$

(Vgl. Formel (74)). Die Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen erhält man schließlich, indem man in (77) die Funktion Q durch K ersetzt. Mit diesen Gleichungen ist auch der $\perp$ Fall völlig behandelt.

(Eingegangen 21. Dezember 1919.)

4. *Kinematische und energetische Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen;* von J. Wallot.

1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) habe ich den Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Übergangsschicht, in der sich die Dielektrizitätskonstante nach einem ganz bestimmten Gesetze stetig ändert, untersucht und dabei auch die Frage der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in und vor der Schicht behandelt. Aus den für das betrachtete ganz spezielle Problem abgeleiteten Formeln konnte ich u. a. das Ergebnis herauslesen, daß die energetisch definierte Fortpflanzungsgeschwindigkeit V mit den kinematisch definierten mittleren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der elektrischen und der magnetischen Welle $v_{el.}$ und $v_{magn.}$ in dem durch die folgende Gleichung ausgedrückten Zusammenhange steht:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{el.}} + \frac{1}{v_{magn.}}\right). \tag{1}$$

Es ist klar, daß die Gültigkeit dieser einfachen Beziehung nicht an die speziellen Voraussetzungen der in der genannten Arbeit durchgeführten Rechnungen geknüpft sein kann. Im folgenden soll genauer untersucht werden, innerhalb welcher Grenzen die Gleichung (1) gilt; im Anschluß daran werde ich noch einige allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Definitionen der Wellengeschwindigkeit machen.

2. Wir betrachten zunächst wie früher den Fall einer einfarbigen geradlinig polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle, die sich in der Richtung der z-Achse fortpflanzen möge. Die Abhängigkeit der Feldvektoren von der Koordinate z lassen wir beliebig, die von der Zeit werde durch den Faktor e^{int} gegeben. In dem durchstrahlten Medium seien lediglich die Verschiebungsströme zu berücksichtigen.

1) J. Wallot, Ann. d. Phys. 60. S. 734. 1919.

Dann gelten, wenn wir für die Feldvektoren die Ansätze

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} = E_x e^{i(nt+\varphi)}, \\ \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_{y_0} e^{int} = H_y e^{i(nt+\chi)} \end{cases}$$

machen (E_x, H_y, φ, χ sind Funktionen von z) und die Differentiation nach z durch einen Strich andeuten, die Gleichungen (ε = Dielektrizitätskonstante, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec):

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{ins}{c} \mathfrak{E}_{x_0} = -\mathfrak{H}'_{y_0}, \\ \frac{in}{c} \mathfrak{H}_{y_0} = -\mathfrak{E}'_{x_0}. \end{cases}$$

Als „kinematisch definierte Fortpflanzungsgeschwindigkeit" $\bar{v}$ habe ich nun[1]) den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich ein fest angenommener Wert des betreffenden Feldvektors mit der Zeit verschiebt. Hiernach ist $\bar{v}$ z. B. für die elektrische Feldstärke in der folgenden Weise sehr einfach zu berechnen: Man fordert

$$d\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}'_{x_0} e^{int} dz + in \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} dt = 0,$$

setzt aus der zweiten Gleichung (3) den Wert für $\mathfrak{E}'_{x_0}$ ein:

$$\mathfrak{H}_{y_0} e^{int} dz = c \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} dt,$$

läßt das Imaginäre weg:

$$H_y \cos(nt + \chi)\, dz = c E_x \cos(nt + \varphi)\, dt,$$

$$v_{el.} = \frac{dz}{dt} = c \cdot \frac{E_x \cos(nt+\varphi)}{H_y \cos(nt+\chi)},$$

bildet den zeitlichen Mittelwert für eine Periode[2]) und erhält so schließlich

$$(4)\qquad v_{el.} = c \frac{E_x}{H_y} \cos(\varphi - \chi).$$

Entsprechend ergibt sich:

$$(5)\qquad v_{magn.} = \frac{c}{\varepsilon} \frac{H_y}{E_x} \cos(\varphi - \chi).$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (1) ein, so folgt für V der Wert:

$$(6)\qquad V = 2c \cdot \frac{E_x H_y \cos(\varphi - \chi)}{\varepsilon E_x^2 + H_y^2}.$$

---

1) A. a. O. S. 744.

2) Ähnlich wie a. a. O. S. 745.

Das ist aber nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie, wenn man diese als das Verhältnis der mittleren Strahlung zur mittleren Energiedichte definiert.

Die Beziehung (1) folgt also für die einfarbige geradlinig polarisierte ebene Welle mit Notwendigkeit und in sehr einfacher Weise aus den Definitionen und den Maxwellschen Gleichungen.

3. Es fragt sich nun, ob diese Betrachtung noch verallgemeinert werden kann.

Die nächstliegende Verallgemeinerung wäre die, die Voraussetzung der geradlinigen Polarisation fallen zu lassen, also eine nach wie vor eindimensionale, aber beliebig elliptisch polarisierte Welle der Rechnung zugrunde zu legen. Da sich die kinematische Definition der Geschwindigkeit auf diesen Fall ohne weiteres übertragen läßt, möchte man es auf den ersten Blick für sehr wahrscheinlich halten, daß sich auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen die Gleichung (1) beweisen lassen müsse.

Diese Vermutung bestätigt sich jedoch nicht. Die Durchrechnung, deren Einzelheiten ich nicht wiedergebe, zeigt, daß auf der rechten Seite der Gleichung (1) im Nenner nur dann die mittlere Strahlung und im Zähler nur dann die mittlere Energiedichte auftritt, wenn die elektrische und die magnetische Welle geradlinig und senkrecht zueinander polarisiert sind. Mit dieser Einschränkung kommen wir aber wieder zu unserer einfachen Ableitung in Nr. 2 zurück.

4. Hiernach wäre es zwecklos, eine Erweiterung unserer Betrachtungen auf das dreidimensionale allgemeine Wechselfeld zu versuchen. Das verbietet sich auch deshalb, weil dann zur kinematischen Definition der Geschwindigkeit der in Nr. 2 benutzte allgemeine Grundsatz nicht mehr ausreichen würde. Gerade darin aber, daß sich die Gleichung (1) aus einem so einfachen und unmittelbar einleuchtenden Grundsatz ableiten läßt, sehe ich den Hauptwert der ganzen Betrachtung.

5. Die kinematische Definition der Geschwindigkeit kann natürlich nicht nur auf Einzelwellen, sondern auch auf beliebige Übereinanderlagerungen von Einzelwellen gleicher Schwingungszahl angewandt werden. So habe ich die Ge-

schwindigkeit v beispielsweise berechnet[1]) für die „Wellengruppe", die bei der Reflexion einer Welle an einer Übergangsschicht durch die Übereinanderlagerung der durchgehenden und der reflektierten Einzelwellen entsteht; für die sich so ergebende Geschwindigkeit habe ich die Bezeichnung „Gruppengeschwindigkeit" eingeführt. Bekanntlich haben zuerst Reynolds und Rayleigh bei Untersuchung der Fortpflanzung von Wellen in einem dispergierenden Medium zwischen Einzelwellengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit unterschieden. Die Übertragung des Ausdrucks Gruppengeschwindigkeit auf das von mir untersuchte Problem ist m. E. berechtigt, obgleich das Wort „Gruppe" in beiden Fällen in etwas verschiedenem Sinne gebraucht wird; denn beide Gruppengeschwindigkeiten treten rein kinematisch bei Übereinanderlagerung zweier Wellen *neben* den Einzelwellengeschwindigkeiten neu auf, und beide stehen in einem nahen Zusammenhang mit der Energiegeschwindigkeit.[2])

Weniger brauchbar ist, wie schon früher[3]) bemerkt, der Begriff der Phasengeschwindigkeit, d. h. der Geschwindigkeit, mit der sich eine fest angenommene Phase mit der Zeit verschiebt. Sie hat nur für solche Wellen Bedeutung, die sich in der komplexen Ebene nahezu durch Kreisbahnen darstellen lassen.[4]) Da sie aber für diese mit unserer Geschwindigkeit v zusammenfällt, ist ihre Einführung nicht nötig.

Clausthal im Harz, Physik. Institut der Bergakademie, Januar 1920.

---

1) A. a. O. S. 752.

2) Vgl. z. B. Lord Rayleigh, Proc. of the Lond. Math. Soc. 9. S. 21. 1877 (Scientific Papers, Cambridge 1899. 1. S. 322.)

3) A. a. O. S. 737. Anm.

4) Vgl. a. a. O. S. 744ff.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

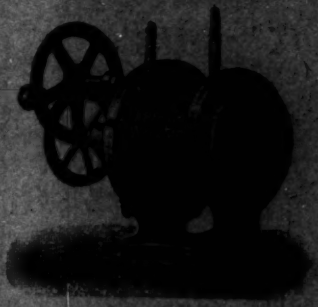
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P.



System Gaede, D.R.P. angemeldet.

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

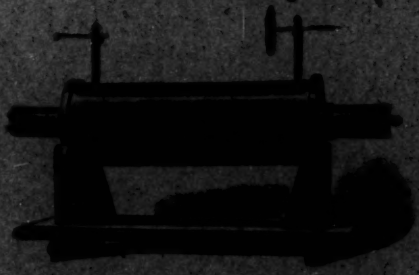
Trockene Schieberluftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. Teófilo Isnardi. Experimentaluntersuchungen an trüben Medien. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans) 573
2. Max Weth. Über die Anregung des kontinuierlichen, Serien- und Bandenspektrums des Wasserstoffs durch die langsamen Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms . . 589
3. Erwin Schrödinger. Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft 603
4. Reinhard Mecke. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel. (Fortsetzung) 628
5. H. Vogel und M. Wien. Zungenpfeife und Röhrensender . 649
6. Rudolf H. Weber. Die Magnetisierbarkeit von Kupfer–Zinklegierungen. (Nach Messungen von Konrad Greulich † berichtet) 666

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Fleischerring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren sonst möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1920. № 15.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Experimentaluntersuchungen an trüben Medien*[1]; *von Teófilo Isnardi.*

(Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans.)

Herr Prof. Gans schlug mir vor, einige Experimentaluntersuchungen an trüben Medien anzustellen, um gegebenenfalls die Resultate auf die Formbestimmung der Partikeln anzuwenden. Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit habe ich mich mit nichtmetallischen Teilchen beschäftigt, während der zweite metallischen Partikeln gewidmet ist.

1. Teil. Nichtmetallische Teilchen.

Ich entschied mich dafür, mit Harzen zu arbeiten, besonders mit Gummigutt und Mastix.

Da ihre optischen Konstanten nicht bekannt waren, mußte ich dieselben zunächst bestimmen.

Um Brechungsindex und Absorptionskoeffizienten des Gummigutt zu messen, habe ich mir planparallele Platten verschiedener Dicke aus dieser Substanz gemacht, und zwar in folgender Weise. Das Handelsprodukt wurde mit Alkohol behandelt, welcher das Harz löst, während der farblose und in heißem Wasser lösliche Gummi auf dem Filter zurückbleibt. (Gummigutt besteht nämlich aus einem Harz und einem Gummi). Nachdem der Gummi auf diese Weise entfernt war, wurde die alkoholische Lösung bei 100° in einem Trockenschrank eingedampft. Nachdem die kalt gewordene Substanz glasiges Aussehen angenommen hatte, wurde sie pulverisiert und mehrmals im Vakuum geschmolzen, um die letzten Reste Alkohol und die Luftblasen zu entfernen. Schließlich wurde die flüssige Substanz auf einen Zelluloidfilm gegossen, um die Platte zu erhalten, die sich ohne Schwierigkeit vom Zelluloid abtrennen läßt.

1) Vgl. Contribución al estudio de las ciencias Univ. Nacional de La Plata 2. S. 287. 1918; S. 377. 1919.

Es sei bemerkt, daß viele zeitraubende Versuche, die Gummiguttplatten auf Glas zu gießen, nicht glückten, da beim Abkühlen der Gummigutt stets sprang, was bei Zelluloid niemals vorkam.

Der Brechungsindex wurde mit dem Abbeschen Halbkugelrefraktometer gemessen, indem der optische Kontakt mit Monobromnaphthalin hergestellt wurde. Da die Substanz in dieser Flüssigkeit etwas löslich ist, mußte man schnell arbeiten. An drei Stellen des Spektrums wurde beobachtet, und zwar mittels der roten H-Linie, der gelben Na-Linie und der grünen Tl-Linie. Mit den erhaltenen Werten berechneten sich die Konstanten der Hartmannschen Formel:

$$(1) \qquad n = n_0 + \frac{C}{\lambda - \lambda_0},$$

und es ergab sich

$$n_0 = 1{,}5642; \quad C = 20{,}201; \quad \lambda_0 = 249{,}2\,\mu\mu.$$

So erhält man die folgenden Werte von n für verschiedene Wellenlängen.

Tabelle 1.

λ in $\mu\mu$	667,8	587,6	501,6	492,2	471,3	447,2
n	1,6125	1,6239	1,6442	1,6473	1,6552	1,6664

An denselben Platten wurden die Absorptionsmessungen mit dem König-Martensschen Spektralphotometer angestellt. Für die verschiedenen Spektralbezirke mußten Platten verschiedener Dicke verwendet werden. Mit zwei nacheinander benutzten Platten wurden relative Messungen an wenigstens einer gemeinsamen Stelle des Spektrums ausgeführt; so konnte man die relative Absorption im ganzen Spektrum ermitteln. Die absoluten Werte wurden bestimmt, indem man die Dicke der dickeren Platten maß, die im roten Teile des Spektrums verwendet wurden. Die folgende Tabelle enthält die Resultate unserer Beobachtungen gemäß der Formel

$$(2) \qquad I = I_0 e^{-kx},$$

wo x die Dicke des Plättchens in Zentimetern, I_0 die Intensität des einfallenden, I die des austretenden Strahls bedeutet.

Tabelle 2.

λ	667,8	587,9	501,6	492,2	471,3	447,2
k	6,567	15,84	344,6	524,4	1277	3065

Mit den so erhaltenen Werten von n und k berechneten wir die Absorption kolloidaler Gummiguttlösungen nach den von Gans entwickelten Formeln für drei Grenzfälle: Scheiben, Kugeln und Stäbchen.[1])

Bekanntlich ergibt sich die Absorption einer kolloidalen Lösung im allgemeinen als Überlagerung zweier Phänomene, erstens der eigentlichen Absorption der Teilchen (Verwandlung des Lichts in Wärme) und zweitens der seitlichen Ausstrahlung (Zerstreuung des Lichts ohne Änderung der Wellenlänge).

Die Formeln der bisher entwickelten Theorie sind anwendbar, wenn das Beersche Gesetz gilt, d. h. wenn die Absorption h der Konzentration c proportional ist. Dann kann der Absorptionskoeffizient h in der Form

$$h = k\,c \tag{3}$$

geschrieben werden, wo k unabhängig von c ist. Das wird stets gültig sein, solange die Konzentration einen bestimmten Betrag nicht überschreitet.

Die eigentliche Absorption h_1 kleiner Teilchen ist dem Teilchenvolumen v proportional, während die Absorption durch Ausstrahlung h_2 dem Quadrat des Volumens proportional ist. Bei sehr kleinen Teilchen muß also der erste Einfluß maßgebend sein, doch setzt das voraus, daß der komplexe Brechungsexponent $m = n\,(1 - i\,k)$ einen imaginären Teil besitzt, der groß genug ist.

Welcher Einfluß die Absorption bedingt, läßt sich also nicht von vornherein sagen, da das von $\varkappa$ und v abhängt. Wir wollen deshalb die Beobachtungen mit der Theorie vergleichen und zunächst die in Betracht kommenden Formeln angeben.

a) Eigentliche Absorption der Teilchen.

Es gilt[2])

$$h_1 = k_1\,c = -\frac{6\pi}{\lambda'} N v\, \mathfrak{Im}\left(\tfrac{1}{3}\,a_1 + \tfrac{2}{3}\,a_1'\right). \tag{4}$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 881. 1912, Formeln (3) bis (6), (19) und (21).

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 886. 1912.

In dieser Formel bedeutet $c = Nv$ das Gesamtvolumen der in 1 cm³ enthaltenen Teilchen, das Symbol $\mathfrak{Im}$ den imaginären Teil des Klammerausdrucks, $\lambda' = \frac{\lambda_w}{m_0}$ die Wellenlänge im Wasser (m_0 Brechungsexponent des Wassers).

Die Werte a_1 und a_1' berechnen sich mittels der Formeln

$$(5) \qquad a_1 = \frac{m_1^2 - 1}{3 + (m_1^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P}; \qquad a_1' = \frac{m_1^2 - 1}{3 + (m_1^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P'},$$

wo

$$(6) \qquad m_1 = \frac{n(1 - ik)}{m_0}; \qquad k = \frac{h}{4\pi n}\lambda$$

bedeutet. P und P' sind Faktoren, die von der Teilchenform abhängen, und zwar ist

für	P	P'
Kugeln	$4\pi/3$	$4\pi/3$
Stäbchen	0	2π
Scheiben	4π	0

Die folgende Tabelle gibt die nach obigen Formeln berechneten Werte von k_1 für die drei Teilchenformen und verschiedene Wellenlängen.

Tabelle 3.

λ	k_1		
	Stäbchen	Kugeln	Scheiben
667,8	6,138	5,962	6,532
587,6	14,78	14,31	15,78
501,6	320,1	308,6	344,5
492,2	486,7	468,9	524,7
471,3	1117	1138	1279
447,2	2769	2720	3076

Nebenbei bemerkt ist übrigens der Verlauf dieser für kolloidale Gummiguttlösungen äußerst kleiner Teilchen gültigen Kurven dem der Absorptionskurve für Gummigutt-plättchen sehr ähnlich.

b) Seitliche Ausstrahlung.

Diese berechnet sich nach den folgenden Formeln[1]):

1) Die folgenden Formeln sind alle drei in der allgemeineren enthalten:

$$h_2 = \frac{A}{\lambda'^4}\left\{\tfrac{1}{3}a_1^2 + \tfrac{2}{3}a_1'^2\right\}.$$

$$(7)\quad \begin{cases} \text{Kugeln:} & h_2 = \dfrac{A}{\lambda'^4}\left(\dfrac{m_1^2-1}{m_1^2+2}\right)^2 \\ \text{Stäbchen:} & h_2 = \dfrac{A}{\lambda'^4}\left\{\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{m_1^2-1}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{27}\left(\dfrac{m_1^2-1}{m_1^2+1}\right)^2\right\} \\ \text{Scheiben:} & h_2 = \dfrac{A}{\lambda'^4}\,\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{m_1^2-1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{2m_1^4}+1\right). \end{cases}$$

Hier ist A eine Abkürzung für

$$(8)\quad A = 24\,N\,v^2\,\pi^3,$$

und in m_1 ist nur der reelle Teil dieser durch (6) definierten Größe zu nehmen, da wir ja annehmen wollen, daß die Absorption sich lediglich durch Ausstrahlung erklärt.

In der folgenden Tabelle haben wir die Werte h_2/A für die drei behandelten Körperformen und verschiedene Wellenlängen zusammengestellt.

Tabelle 4.

λ	$\frac{h_2}{A}\cdot 10^{-15}$ Kugeln	Stäbchen	Scheiben
667,8	2,82	2,93	3,11
587,6	5,11	5,28	5,63
501,6	10,92	11,33	12,19
492,2	12,01	12,47	13,44
471,3	14,98	15,58	16,86
447,2	19,42	20,23	21,96

Man sieht aus den Tabellen 3 und 4, daß man in keinem der beiden Fälle die Teilchenform durch die Absorption der Lösung ermitteln kann, weil diese zu wenig von ihr abhängt, ganz im Gegensatz zu metallischen Kolloidlösungen, wo dies ja mit bestem Erfolg geschehen ist. Der Grund ist die Kleinheit des Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ bei nichtmetallischen Lösungen.

Die Absorption.

Trotzdem schien es uns von Interesse, die Absorption kolloidaler Gummiguttlösungen zu messen. Zunächst sollte das Beersche Gesetz studiert werden. Hierzu dienten folgende vier Lösungen.

		cm³
Lösung *A*:	5promill. alkoholische Gummiguttlösung	100
	Wasser	100
		200
Lösung *B*:	Lösung *A*	20,0
	Wasser	30,0
		50,0
Lösung *C*:	Lösung *A*	16,7
	Wasser	83,3
		100,0
Lösung *D*:	Lösung *A*	16,0
	Wasser	184,0
		200,0

Die Messungen wurden so angestellt, daß die Lösungen bzw. in Rohre der vier Längen $l = 2{,}0$ cm; 5,0 cm; 12,0 cm; 25,0 cm gefüllt wurden. Auf diese Weise war in den vier Fällen $cl = \text{const}$. Die Resultate dieser Messungen für Na-Licht finden sich in der folgenden Tabelle.

Tabelle 5.

Lösung	$k = h/c$
A	2603
B	2629
C	2668
D	2620

Nach 8 Tagen wurden die Messungen an denselben Lösungen wiederholt und ergaben praktisch die gleichen Werte. Das Beersche Gesetz gilt also, denn die Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenze.

Dann untersuchten wir die Absorption in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge, um zu entscheiden, ob sie durch eigentliche Absorption der Teilchen oder seitliche Ausstrahlung veranlaßt war. Es ergab sich die folgende Tabelle.

Tabelle 6.

λ	Lösung	k	Bemerkungen
667,8	*A*	1741	
587,6	*A*	2665	$cl = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ gr/cm²
501,6	*A*	4989	$l = 1$ cm
471,3	*A*	7072	
471,3	*B*	6828	$cl = 10^{-4}$ gr/cm²
447,2	*B*	8704	$l = 1$ cm

Im Diagramm Fig. 1 sind die beobachteten Werte von k durch kleine Kreise und in willkürlichen Einheiten die berechneten Werte von h_2/A für Kugeln (vgl. Tab. 4), sowie in einer anderen Kurve die berechneten Werte von k_1 für Kugeln (vgl. Tab. 3) dargestellt. Die h_2/A-Kurve fällt fast vollständig mit der der Beobachtungen zusammen. Die eigentliche Absorption der Teilchen ist also im Vergleich mit der seitlichen Ausstrahlung zu vernachlässigen; letzterer ist demnach die Absorption der Gummiguttlösungen fast ausschließlich zuzuschreiben.

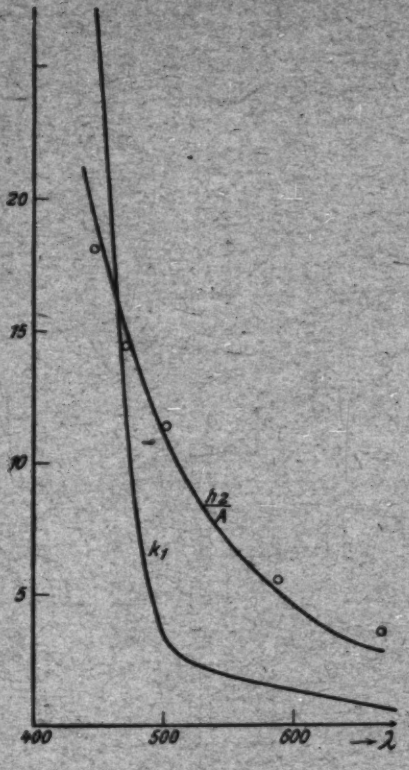


Fig. 1.

Dies Ergebnis gestattet uns, die Theorie quantitativ zu prüfen, indem wir den Radius der als kugelförmig angenommenen Teilchen berechnen.

Aus Tab. 6 entnehmen wir für $\lambda = 501{,}5\,\mu\mu$ den beobachteten Wert $k = 4989$; nach Tab. 4 ist

$$\frac{h_2}{A} = 10{,}92 \cdot 10^{15}, \tag{9}$$

wo A den in Gleichung (8) angegebenen Wert

$$A = 24\,(Nv)\,v\,\pi^3 = \frac{32\pi^4 c r^3}{\delta} \tag{10}$$

hat. Hier bedeutet r den Teilchenradius, δ die Dichtigkeit des Gummigutt, die nach Perrin[1]) den Wert $\delta = 1{,}195$ hat. Also ist nach Gleichung (10)

1) J. Perrin, Conseil Solvay 1911, deutsch von A. Eucken, S. 142, Halle 1914.

$$k = \frac{h_2}{c} = \frac{32 \cdot \pi^4 r^3}{\delta} \cdot 10{,}92 \cdot 10^{15} .$$

Daraus ergibt sich der Durchmesser $2r = 112\,\mu\mu$.

Läßt man einen Tropfen der Lösung auf einem Objektträger eintrocknen, kann man mit dem Mikroskop Teilchen sehen, doch stimmt ihre Größenordnung mit obigem Wert nicht überein, da viele Partikeln Durchmesser hatten, die bis zu 10mal so groß waren wie der berechnete Wert.

Die Depolarisation.

Sodann haben wir die von der Lösung hervorgerufene Depolarisation des seitlich ausgestrahlten Lichts gemessen. Die Versuchsanordnung war die folgende.[1]) Vor die ziemlich weit geöffnete Spalte des König-Martensschen Spektralphotometers wurde ein Leyboldscher Trog T (vgl. Fig. 2) mit der trüben Lösung gesetzt, der von parallelen Lichtstrahlen durchsetzt wurde. Diese kamen entweder von der Bogenlampe L_1 oder von der Bogenlampe L_2. Man maß mit Licht das von rechts und mit solchem, das von links einfiel, um den Fehler zu vermeiden, der in der Absorption der Lösung seine Ursache hat. Bekanntlich sieht man im Königschen Photometer die Hälfte des Gesichtsfeldes von Licht erleuchtet, das von dem Spalte S_1 kommt und vertikal polarisiert ist, während das Licht der anderen Hälfte des Gesichtsfeldes von S_2 kommt und horizontal polarisiert ist. Nennt man die beiden Halbschattenablesungen, die den Beleuchtungen von links und rechts entsprechen, φ_1 bzw. φ_2, und setzt man

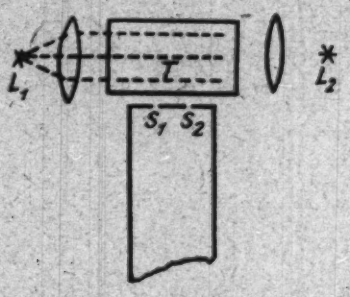


Fig. 2.

$$\Delta = \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}^2\varphi ,$$

so ist der Depolarisationsgrad, wie ihn Gans[2]) in seiner Theorie definiert,

$$\Theta = \frac{\Delta}{1-\Delta} = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} .$$

1) Vgl. W. Steubing, Ann. d. Phys. **26**, S. 343. 1908.
2) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920. Formel (43).

Schon bei den ersten Messungen fiel mir auf, daß die Depolarisation von der Konzentration abhängt. Diese Erscheinung veranlaßte Hrn. Gans, die Wechselwirkung der Teilchen bei der theoretischen Ableitung mit zu berücksichtigen.[1]) Wir haben deshalb die Depolarisation in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration beobachtet und zwar für natürliches und für linear polarisiertes einfallendes Licht (Polarisationsebene horizontal).

Die folgende Tabelle und das Diagramm Fig. 3 enthalten die Resultate für $\lambda = 501\,\mu\mu$.

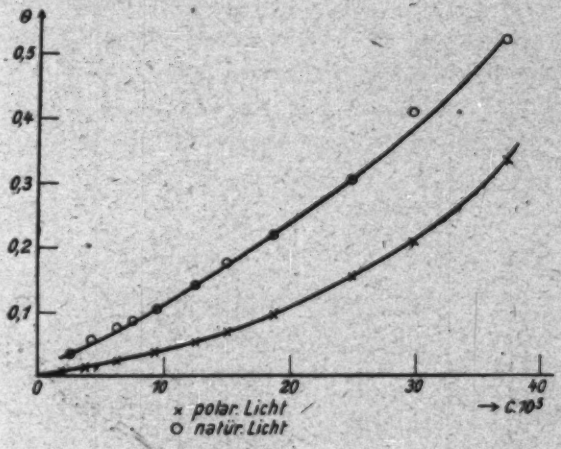


Fig. 3.

Tabelle 7.

$c \cdot 10^5$	Θ polar. Licht	Θ natürl. Licht	$c \cdot 10^5$	Θ polar. Licht	Θ natürl. Licht
37,5	0,332	0,517	4,69	0,0164	—
30,0	0,206	0,406	4,17	—	0,0575
25,0	0,153	0,304	3,75	0,0140	—
18,7	0,0935	0,218	3,12	—	0,0438
15,0	0,0682	0,175	2,50	—	0,0376
12,5	0,0541	0,139	2,35	0,0100	—
9,37	0,0378	0,105	2,08	—	0,0350
7,50	0,0273	0,085	1,89	0,0091	—
6,25	0,0237	0,0746			

Man sieht, daß die Kurven für sehr große Verdünnungen auf den Nullpunkt zustreben. Die kleine Depolarisation, die

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920

man im Falle natürlichen Lichts beobachtet, liegt innerhalb der Fehler, die durch die Unvollkommenheiten des Apparats bedingt werden. Vergleichen wir diese Resultate mit der Theorie, die Hr. Gans nachträglich entwickelt hat. Er findet für die Depolarisation bei polarisiertem Licht[1])

$$\frac{\Theta - \Theta_0}{1 + \frac{10}{3}\Theta} = aC \tag{11}$$

und bei natürlichem Licht[2])

$$\frac{\Theta' - \Theta_0'}{1 + \frac{5}{3}\Theta'} = bC, \tag{12}$$

wo $b = 2a$ und $\Theta_0' = 2\Theta_0$ sein muß. Hier bedeuten Θ_0 und a bzw. Θ_0' und b Konstanten, C die Konzentration.

Für natürliches Licht bestimmte ich die Konstanten mittels der Methode der kleinsten Quadrate zu $\Theta_0' = 0{,}026$; $b = 723$, und es ergab sich

Tabelle 8.

Θ'	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.	Θ'	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.
0,517	37,5	36,5	0,085	7,50	7,15
0,406	30,0	31,4	0,075	6,25	6,02
0,304	25,0	25,5	0,058	4,17	4,03
0,218	18,7	19,5	0,044	3,12	2,32
0,175	15,0	15,9	0,038	2,50	1,56
0,139	12,5	12,7	0,035	2,08	1,18
0,105	9,37	9,30			

Die Resultate sind graphisch in Fig. 4 dargestellt. Die Übereinstimmung ist über Erwarten gut, weil die Theorie für subultramikroskopische Teilchen entwickelt ist, die Gummiguttpartikeln aber mikroskopisch sind.

Für polarisiertes Licht folgte

$$\Theta_0 = -0{,}0049; \quad a = 420{,}6.$$

Der negative Wert von Θ_0 ist theoretisch unmöglich, denn Θ_0 bedeutet die Depolarisation für unendlich kleine Konzentration, doch ist der erhaltene Zahlenwert so klein,

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 62. S. 331. 1920. Formel (50).
2) R. Gans, ebenda Formel (60).

daß er praktisch Null ist. Tab. 9 und Fig. 5 enthalten die Resultate.

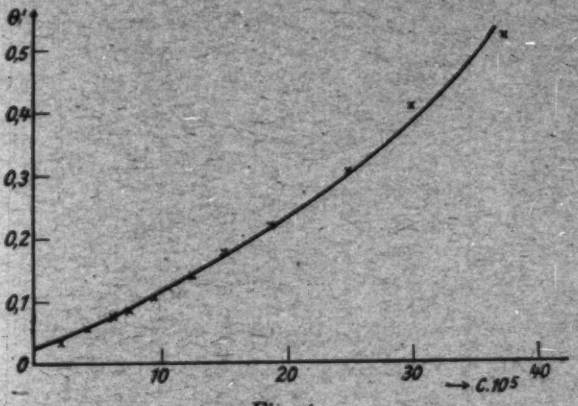


Fig. 4.

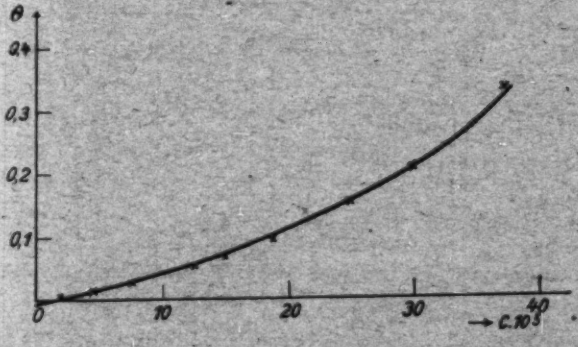


Fig. 5.

Tabelle 9.

Θ	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.	Θ	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.
0,332	37,5	38,0	0,027	7,50	6,96
0,206	30,0	29,7	0,024	6,25	6,36
0,153	25,0	24,9	0,016	4,59	4,72
0,094	18,7	17,9	0,014	3,75	4,29
0,068	15,0	14,2	0,010	2,35	3,43
0,054	12,5	11,9	0,009	1,89	3,21
0,038	9,37	9,05			

Die Übereinstimmung betrifft jedoch, wie das bei so großen Teilchen kaum anders erwartet werden kann, nur die

Form der Kurve. Denn berechnet man nach der Gansschen Theorie den Wert r/s, wo r den Teilchenradius, s den Minimalabstand zweier Dipole bedeutet, nach der für Kugeln gültigen Formel bei Beleuchtung mit polarisiertem Licht[1])

$$(13) \qquad \frac{\Theta}{1+\frac{10}{3}\Theta} = \frac{3}{5}\left(\frac{m_1^2-1}{m_1^2+2}\right)^2 c \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^3,$$

so ergibt sich

$$r/s = 35{,}1 \text{ für natürliches Licht,}$$

$$r/s = 33{,}2 \text{ für polarisiertes Licht.}$$

Beide Resultate sind sinnlos, da $2r < s$ sein muß.

Schließlich maßen wir an derselben Lösung die Depolarisation in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge, wobei sich folgende Tabelle ergab.

Tabelle 10.

$C = 4 \cdot 10^{-5}$ gr/cm³

λ	466	486	511	541	578	626
$\Theta \cdot 10^2$	5,89(?)	5,18	4,97	4,71	4,55	4,36

Mastixlösungen zeigen ähnliche Erscheinungen, wie man aus der folgenden Tabelle ersieht.

Tabelle 11.

Natürl. Licht		Polaris. Licht	
Relative Konzentration	$\Theta' \cdot 10^2$	Relative Konzentration	$\Theta \cdot 10^2$
18,0	3,46	18,0	1,89
12,0	2,63	12,0	1,43
9,0	2,22	9,0	1,26
7,2	1,92	7,2	1,13
5,0	1,78	5,0	1,02
4,0	1,71	3,0	0,89
3,0	1,53		
2,4	1,46		
2,0	1,40		
1,5	1,34		

Aus diesen Beobachtungen erhellt ein deutlicher wechselseitiger Einfluß der Partikeln auf die Depolarisation. Will man aus dieser also einen Schluß auf die Teilchenform ziehen,

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 62. S. 331. 1920. Formeln (11), (18) u. (50).

so muß man sich zunächst überzeugen, ob sie auch nicht von der Konzentration abhängt, und sollte das der Fall sein, hat man diese Abhängigkeit zu beobachten und auf unendliche Verdünnung zu extrapolieren.

2. Teil. Metallische Teilchen.

In den folgenden Versuchen habe ich den Einfluß der Herstellungsmethode und Ultrafiltration kolloidaler Silberlösungen auf die Teilchenform studiert und letztere sowohl mittels der Absorption als auch der Depolarisation bestimmt.

Ich begann mit der Ultrafiltration von Kollargollösungen. Im Laufe dieser Beobachtungen konnte ich feststellen, daß die Durchlässigkeit der Kollodiumfilter nicht nur von der Menge zugesetzten Eisessigs, sondern auch vom Alter der Kollodiumlösung, oder besser gesagt von der Zeit abhängt, die nach dem Zusatz von Essigsäure verstrichen ist. So gibt eine Kollodiumlösung, der man bis 6 Proz. Essigsäure zusetzt, vollkommen undurchlässige Filter, wenn man die Lösung sofort verwendet. Häufig haben diese Filter äußerst kleine Löcher, die zwar die Flüssigkeit nur unter Druck hindurchlassen, aber doch nicht als Poren angesehen werden können. Solche vereinzelte Löcher lassen eine Lösung hindurch, welche völlig wie eine ultrafiltrierte aussieht, besonders nachdem zunächst ein Teil der Lösung durchs Filter gegangen ist und mittels seiner größeren Teilchen die Löcher teilweise verstopft hat. So erhaltene Filtrate zeigen keinen merklichen Unterschied ihrer Depolarisation gegenüber den Ausgangslösungen, wenn ihr Aussehen infolge der Verminderung der Konzentration und des Fehlens ganz großer Teilchen auch von diesen verschieden ist.

Um die Möglichkeit solcher falschen Resultate auszuschalten, legte ich zwei Ultrafilter übereinander. Die Ultrafiltration wurde mit dem Gansschen Ultrafiltrierapparat[1]) bewerkstelligt. Indem ich so vorging, konnte ich feststellen, daß die Kollodiumlösungen, denen man Eisessig frisch zugesetzt hat, undurchlässige Filter geben, die leicht an ihrer völligen Durchsichtigkeit kenntlich sind, während die durchlässigen Filter schwach opaleszierend aussehen.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 327. 1920.

Erst nach zwei Wochen waren die Filter vollkommen homogen und mehr oder weniger durchlässig, je nach der zugesetzten Essigsäuremenge.

Ich stellte dann Versuche an alten und frischen Kollargollösungen an. Die alten Kollargollösungen verlieren durch Verdünnen nicht ihren rötlichen Schein, dagegen sind frische sehr verdünnte Lösungen rein gelb. Sicher rührt dieser Unterschied von der Konglomeration der Partikeln in den alten Lösungen her, und deshalb war zu erwarten, daß man auch durch Ultrafiltration keine befriedigenden Resultate mit diesen erhalten könne. Tatsächlich waren die Filtrate derselben mittels wenig durchlässiger Filter (1 Proz. Essigsäure) vollkommen farblos und zeigten praktisch keine seitliche Ausstrahlung. Mit viel poröseren Filtern (bis 6 Proz. Essigsäure) erhielt man schwach gefärbte Filtrate, deren Depolarisation des Tyndall-Lichtes größer war als die frischer, nicht ultrafiltrierter Lösungen.

Als ich mit frischen Lösungen arbeitete, die durch wenig durchlässige Filter filtriert waren (0,5—1 Proz. Essigsäure), erhielt ich schwach gelb gefärbte Lösungen, deren seitliche Ausstrahlung blaugrün war, und deren mit dem König-Martensschen Spektralphotometer gemessene Depolarisation im Grünen ($\lambda = 500\,\mu\mu$) nur 16° betrug, während die Ausgangslösungen 23° Depolarisation aufwiesen. (Die Angabe der Depolarisation in Graden bezieht sich auf die Einstellung des Okularnikols, die den Wert von Δ nach der Formel $\mathrm{tg}^2\varrho = \Delta$ berechnen läßt).[1])

Dies Ergebnis ließ vermuten, daß vielleicht mittels vervollkommneter Ultrafiltration oder anderer Herstellungsweise Lösungen mit noch geringerer Depolarisation gewonnen werden könnten, d. h. mit Teilchen, die sich der Kugelform noch mehr näherten.

Das war auch tatsächlich so. Frische Kollargollösungen, die mehrmals durch dasselbe Ultrafilter gepreßt waren, gaben ein merklich farbloses Filtrat, dessen seitlich ausgestrahltes Licht bei Beleuchtung mit einer Bogenlampe jedoch noch deutlich sichtbar war. Die Depolarisation betrug für $\lambda = 500\,\mu\mu$ nur noch 12,5°, was nach den Gansschen Berechnungen[2])

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 62. S. 331. 1920. § 3.
2) R. Gans, ebenda. Fig. 3.

einem Achsenverhältnis $B/A = 0{,}75$ der als verlängerte Rotationsellipsoide aufgefaßten Teilchen entspricht.

Die Resultate dieser Messungen führen zu dem Schluß, daß die kolloidalen Silberteilchen sich um so mehr der Kugelform nähern, je kleiner sie sind.

Dann stellte ich mir Lösungen nach dem Verfahren von The Svedberg[1]) her mittels eines Funkeninduktors, der mit Wehnelt-Unterbrecher betrieben wurde. Der Schwingungskreis enthielt Leidener Flaschen und Selbstinduktion. Der Funke sprang zwischen Elektroden aus Silberdraht in Wasser über. Es ist aber notwendig, daß das Wasser sehr rein ist, damit sich satt gelbe, völlig reine Lösungen bilden können.

Diese zeigen ohne Ultrafiltration eine seitliche Ausstrahlung, die blaugrün ist, und Depolarisationswinkel von 18—20°. Treibt man sie mehrfach durchs Ultrafilter, so verlieren sie merklich ihre Färbung, zeigen aber deutliche seitliche Ausstrahlung, die rein blau ist, und der Depolarisationswinkel nimmt im Grünen ($\lambda = 500\,\mu\mu$) bis 8,5° ab. Die Teilchen nähern sich hier also noch mehr der Kugelform als bei den Kollargollösungen, und das Achsenverhältnis ergibt sich nach Gans zu $B/A = 0{,}85$.

Der so beobachtete Winkel ist noch etwas zu groß infolge von Fehlerquellen, die dem Spektralphotometer anhaften (falsche Reflektionen im Innern). Dies ließ sich feststellen durch Beobachtungen mit gekreuzten Nikols, die immer noch 2—3° anstatt 0° gaben.

In Fig. 6 ist der Meridianschnitt des Ellipsoids zur Veranschaulichung in natürlichen Verhältnissen gezeichnet worden.

Es blieb noch übrig, die Resultate der beiden Methoden miteinander zu vergleichen, die zur Bestimmung der Form subultramikroskopischer Partikeln dienen können, nämlich mittels Depolarisation des Tyndall-Lichts, sowie durch Beobachtung der Absorption in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Die Ultrafiltrate der bei den oben angegebenen Messungen benutzten Lösungen zeigten eine so schwache Absorption, daß sie praktisch nicht gemessen werden konnte.

1) The Svedberg, Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis (4) 2. 1907.

Deshalb benutzten wir das Ultrafiltrat einer frischen Kollargollösung, die satt gelb war, und deren Depolarisationswinkel für $\lambda = 500\,\mu\mu$ 19° betrug, was dem Achsenverhältnis $B/A = 0{,}70$ entspricht. Eine Lösung so geformter Teilchen müßte ihr Absorptionsmaximum nach Gans bei $\lambda = 435\,\mu\mu$ haben. Ich bestimmte dasselbe experimentell nach der photographischen Methode, die Gans angewendet hat[1]) und fand $\lambda = 418\,\mu\mu$, was dem Wert $B/A = 0{,}77$ entspricht.

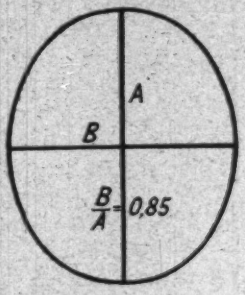


Fig. 6.

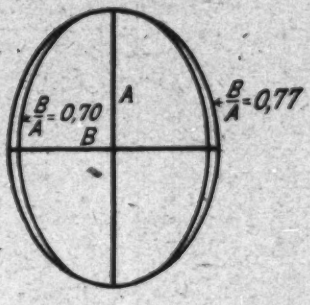


Fig. 7.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß die Depolarisationsmessungen $B/A = 0{,}70$ und die Absorptionsmessungen $B/A = 0{,}77$ ergaben. Die diesen beiden Zahlenwerten entsprechenden Meridianschnitte weichen nur sehr wenig voneinander ab, wie man aus der in natürlichen Verhältnissen gezeichneten Fig. 7 ersieht.

Man wird die Übereinstimmung der Formbestimmung so kleiner Teilchen nach zwei gänzlich verschiedenen Methoden wohl als befriedigend ansehen können.

La Plata, Instituto de Física, 1. Dez. 1918.

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **47**. S. 282. 1915.

(Eingegangen 30. Januar 1920.)

2. *Über die Anregung des kontinuierlichen, Serien- und Bandenspektrums des Wasserstoffs durch die langsamen Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms;*

von Max Weth.

(Greifswalder Dissertation.)

1. Einleitung.

a) *Problemstellung.* Die Frage nach den Trägern der verschiedenen Spektren eines Elements ist von Bedeutung sowohl für die Theorie der Spektren wie die der Atome. Besonders wichtig ist in dieser Beziehung der Wasserstoff; für seine Linien wurde zuerst durch Balmer eine Serienbeziehung aufgefunden, die neuerdings N. Bohr schon aus der einfachsten Form seiner Atomtheorie deuten konnte. Anderseits sind über die Emission der Balmerschen Serie zahlreiche Experimentaluntersuchungen angestellt worden, die aber noch keineswegs zu einer allgemein angenommenen Ansicht über ihren Ursprung geführt haben. Von der einen Seite wird als Träger das neutrale Atom hingestellt, wie es die Bohrsche Theorie verlangt. Danach wäre der eigentliche Erreger der Linien das den positiven Kern umkreisende Elektron; Emission findet statt, wenn es aus einer der äußeren „statischen" Bahnen in eine bestimmte innere springt. Die Radien der Kreisbahnen und die Frequenz des Lichts sind durch Quantenbedingungen bestimmt. Demgegenüber ist J. Stark bei seiner alten Ansicht geblieben, der Träger der Wasserstoffserie sei das Atom, von dem das äußere Elektron ganz oder wenigstens soweit entfernt sei, daß es keinen Einfluß mehr auf das innere Atomfeld habe; von dessen Schwingungen soll die Lichterregung ausgehen, und diese werden durch die Entfernung des Außenelektrons selbstverständlich andere als im neutralen Atom.

Auch in den Erklärungen der beiden neuerdings von Stark bei Gasentladungen nachgewiesenen kontinuierlichen Spektren

gehen die Ansichten auseinander. Stark[1]) ließ sich bei der Suche nach ihnen von der theoretischen Folgerung leiten, während der Anlagerung eines Elektrons an ein positives Atom- oder Molekülion müsse das innere Atomfeld kontinuierlich aus dem einen stabilen Zustand in den anderen übergehen, demnach die Eigenfrequenzen sich ebenfalls kontinuierlich ändern und die emittierten Linien sich über einen gewissen Spektralbereich verschieben, um so langsamer, je allmählicher das Elektron auf seiner Spiralbahn sich dem Kern nähert. Für Auge und Spektrograph, die erstens über die verschiedenen Übergangsphasen und zweitens über die Emission vieler Träger integrieren, entsteht so ein kontinuierliches Spektrum; seinen Träger, das im Übergang vom positiven zum neutralen Zustand begriffene Atom oder Molekül bezeichnet Stark als Quantenpaar. Auch Bohr[2]) bringt das kontinuierliche Wasserstoffspektrum in Zusammenhang mit der Entfernung eines Elektrons vom Kern bzw. seiner Wiederanlagerung, zieht aber erstens nur das Atom in Betracht und stellt sich zweitens den Mechanismus der Emission anders vor; nach seiner Auffassung sind viele verschiedene kontinuierliche Spektra möglich.

Über das Bandenspektrum hat sich bisher nur Stark bestimmt geäußert; er schreibt es dem Molekülion (H_2^+) zu. Bohr äußert a. a. O. beiläufig, wegen seiner Kompliziertheit werde es dem Molekül zuzueignen sein, und stellt eine eingehendere Theorie für später in Aussicht.

Am lebhaftesten ist der Streit um den Träger der Balmerserie gewesen. Ihm lagen in der Hauptsache Beobachtungen an Kanalstrahlen zugrunde. Unter der ursprünglichen Annahme, daß diese aus bewegten positiven Atomen bestünden, schienen 1905 nach Starks Entdeckung des Kanalstrahlendoppler-effekts der Serienlinien nur diese Ionen als Träger in Frage zu kommen; Zweifel konnten wieder aufkommen, als in den nächsten Jahren besonders durch W. Wiens Arbeiten ans Licht trat, daß wegen der Umladungsvorgänge die Kanalstrahlen auch schnell bewegte neutrale Partikel enthalten und zwar u. a. einen sehr erheblichen Anteil.

---

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 52. S. 255. 1917.

2) N. Bohr, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter. Naturv. og Math. Afd. 8. Raekke IV. 1. S. 98.

Um neues Material zu dieser Frage zu liefern, schien es deswegen erwünscht, unter Umständen zu beobachten, wo Umladungen ausgeschlossen waren. Eine Möglichkeit hierzu bieten Kanalstrahlen, deren Geschwindigkeit unter der zur Ionisation durch Stoß nötigen liegt, denn wenn keine Elektronen aus neutralen Molekülen freigemacht und auch nicht anderweitig zugeführt werden, müssen die Ionen ihren Ladungszustand beibehalten. Strahlen solch kleiner Geschwindigkeit werden nach Starks Theorie weiter zahlreiche Fälle unvollständiger Ionisation liefern, also Quantenpaare, und damit ein kräftiges kontinuierliches Spektrum erregen.

Langsame Kanalstrahlen in elektronenarmen bis -freiem Gas sind nun anzunehmen an der Anode des positiven Spitzenstroms, es bietet sich also die Aufgabe, die Lichtemission an dieser Stelle zu untersuchen. Dabei ist noch die Theorie des Spitzenstroms experimentell zu prüfen. Daß er spektralanalytisch bis jetzt überhaupt noch nicht untersucht worden ist, gibt dieser Aufgabe ein weiteres Interesse.

b) *Wesen des negativen und positiven Spitzenstroms.* Als Spitzenstrom bezeichnen wir allgemein die Entladung zwischen einer Spitze und einer verhältnismäßig großen Platte als Elektroden, mit den Zusätzen positiv oder negativ, je nachdem die Spitze Anode oder Kathode ist. Der negative Spitzenstrom ist stets ein Glimmstrom. Stark[1]) wies dies für kleine Gasdrucke an der Ausbildung der charakteristischen Glimmstromkathodenschichten an der Spitze nach, die dann Warburg mit dem Mikroskop auch bei Atmosphärendruck unterscheiden konnte. Auch mit positiver Spitze kann sich ein Glimmstrom bilden; das Kennzeichen ist das Kathodenlicht an der Platte. Daneben ist unter bestimmten Umständen mit letzterer Anordnung aber auch eine Entladung möglich, bei der an der Kathode keinerlei Leuchten auftritt und wobei das Lichtbüschel an der Anode ganz anders aussieht. Sie wurde von Stark a. a. O. im engeren Sinne „positiver Spitzenstrom" genannt und kann nach seiner Theorie bestimmt werden als eine selbständige Entladung, bei der sich infolge der Form der Elektroden Potentialabfall und Ionisierung an der kleinen Anode konzentrieren, derart, daß an der Kathode nur langsam heranströmende positive Ionen

1) J. Stark, Verh. Phys. Ges. 6. S. 113. 1904.

auftreten, die weder Leuchten noch Ionisation hervorrufen; von der Anode aus laufen positive Ionen mit zunächst wachsender Geschwindigkeit ins Gas und ionisieren dieses, sobald ihre Geschwindigkeit hierzu ausreicht. Durch Ionisierungsarbeit und Zusammenstöße mit den Gasmolekeln nimmt ihre Geschwindigkeit in dem schwächer werdenden Feld danach wieder ab, so daß sie zunächst nur noch Licht erregen können und weiterhin ganz, ohne sich bemerkbar zu machen, zur Kathode wandern. Die im Gase freigewordenen Elektronen erzeugen durch Oberflächenionisation an der Anode die ersterwähnten positiven Ionen. So zu deutende Lichterscheinungen an positiven Spitzen hat Stark in Luft und Stickstoff bei Drucken bis herab zu 1 mm beobachtet. Es handelt sich offensichtlich um eine ganz andere Entladungsform als Glimmstrom, in den sie aber besonders bei niedrigem Druck und größerer Stromstärke leicht übergeht. Dieser plötzliche Umschlag ist unverkennbar wegen des Auftretens des Kathodenleuchtens und der Umwandlung des Anodenlichtbüschels in das des Glimmstroms. Der Spannungsabfall an der Anode sinkt dabei von mehreren hundert Volt auf den kleinen Wert des Glimmstromanodenabfalls. Im allgemeinen ist der Glimmstrom die stabilere Entladungsform; zum Bestehen des Spitzenstroms ist erforderlich, daß die Stromstärke unterhalb, Kathodengröße und -abstand oberhalb gewisser Werte bleiben. Der Grenzwert für einen Faktor hängt dabei mit ab von der Größe der anderen Faktoren. Stets bildet sich Glimmstrom aus, wenn die Kathode klein, z. B. auch eine Spitze ist. Mit dieser Anordnung hat v. Dechend[1]) nach Vorarbeiten von Himstedt die Spektren der Spitzenentladung in mehreren Gasen untersucht, also Glimmstrom, nicht positiven Spitzenstrom in engerem Sinn gehabt, der, wie bereits gesagt, noch nicht spektroskopisch untersucht worden ist; v. Dechends Arbeit ist nämlich neben einer beiläufig ausgeführten Aufnahme Warburgs[2]) meines Wissens die einzige derartige über Spitzenentladung.

c) *Die Kanalstrahlen im positiven Spitzenstrom.* Gemäß der damaligen Kenntnisse der Gasionisation nahm Stark an, daß von der Anode rein positive Strahlen ausgingen. Diese Auffassung müssen wir heute ergänzen. Wir wissen aus der elektro-

1) H. v. Dechend, Diss. Freiburg i. B. 1909. Ann. d. Phys. **30**. S. 719. 1909.

2) E. Warburg, Ann. d. Phys. **10**. S. 180. 1903.

magnetischen Analyse der Kanalstrahlen, daß sich positive Ionen desto schneller umladen, in je dichterem Gas sie verlaufen. Nun ist beim Spitzenstrom der Druck viel höher, als in einer Kanalstrahlenröhre, es ist also lebhafte Neutralisation zu erwarten, wenigstens wo hierzu Elektronen frei sind oder frei gemacht werden können, und die resultierende von der Spitzenstromanode ausgehende Strahlung wird qualitativ die Zusammensetzung der Glimmstromkanalstrahlen haben, mit welcher Bezeichnung man heute ja das ganze Gemisch aus Ionen, neutralen Partikeln und Quantenpaaren meint. Es sei deshalb erlaubt, der Kürze halber auch von den „Kanalstrahlen" des positiven Spitzenstroms zu sprechen, deren Existenz allerdings noch nachzuweisen ist. Für den vorliegenden Zweck ist die Wahrscheinlichkeit wesentlich, daß sich in einer gewissen Entfernung von der Anode, nach Verlangsamung durch Zusammenstöße mit den Gasmolekeln, nur noch die positiven Teilchen zur Lichtemission erregen können, und daß wir hier also bewegte Emissionszentren mit Geschwindigkeiten bis zu den kleinsten herab haben werden, die ihren Ladungszustand nicht mehr ändern können.

2. Methoden.

a) *Stromröhre.* Für den vorliegenden Zweck ist es erwünscht, die verschiedenen Teile des Anodenlichtbüschels einzeln mit dem Spektrographen zu erfassen. Die übliche Anordnung, den Spitzenstrom von einer wirklichen Spitze ausgehen zu lassen, gestattet dies nicht sauber genug, da sich bei der Projektion auf den Spalt des Spektrographen das Licht aus äußeren und inneren Schichten überlagert. Dazu ist das Büschel in seinen Ausläufern wegen der starken Ausbreitung sehr lichtschwach, und weiter das Feld an der Spitze wenig übersichtlich. Die Ausdehnung der Erscheinung an der Anode brachte mich auf den Gedanken, daß bei den niedrigen Drucken, die zum deutlichen Auseinanderziehen des Lichtbüschels allein in Betracht kommen, wegen der größeren freien Weglänge auch ohne scharfe Spitze mit einer kleinen ebenen Anode ein hinreichender Spannungsabfall zu erzielen sein werde. Ein Versuch mit einem 1,5 mm dicken Messingstift, der in ein Glasröhrchen eingeschmolzen und mit diesem zusammen glatt abgeschliffen wurde, ähnlich wie Fig. 1 b (S. 594) es zeigt, bestätigte dies, und ich habe weiterhin derartige Elektroden bis zu 5 mm Durchmesser benutzt; vielleicht kann man

auch an noch größeren Anoden Spitzenstrom herstellen. Bei seitlicher Betrachtung heben sich an einer solchen Anode die ziemlich ebenen Schichten des Anodenbüschels deutlich voneinander ab; wegen ihrer Tiefe in der Sehrichtung sind sie lichtstärker als die an einer Spitze; dies ist wichtig, da die Lichtschwäche der Erscheinung eine der Hauptschwierigkeiten dieser Untersuchung ist. Die dritte Möglichkeit, einen dünnen Draht in der Achse eines Hohlzylinders zu verwenden, habe ich nicht versucht, da kein besseres Resultat abzusehen ist. Es ist vielleicht von Interesse, daß bis herunter zu Drucken von 1,8 mm Hg in Wasserstoff, 1 mm in Stickstoff eine Scheibe von 15 mm Durchmesser in 13 mm Abstand von der Anode als Kathode ausreichte. Viel bequemer und sicherer läßt sich allerdings der Spitzenstrom in Wasserstoff mit größeren Kathoden in größerem Abstand unterhalten. Bei engen Glasgefäßen können Wandladungen stark stören; Berühren oder nur Anblasen der Röhre ruft dann Umschlag des Spitzenstroms in Glimmstrom und umgekehrt hervor. Wegen beider Umstände erhielt die Röhre schließlich die Gestalt nach Fig. 1a. Die untere Kalotte eines 1 l-Kolbens wurde samt dem oberen Teil eines Ansatzrohres durch chemischen Niederschlag mehrfach versilbert; dieser Silberspiegel diente als Kathode. Ein in den Kolbenhals eingekittetes Glasrohr trug am unteren verjüngten Ende einen

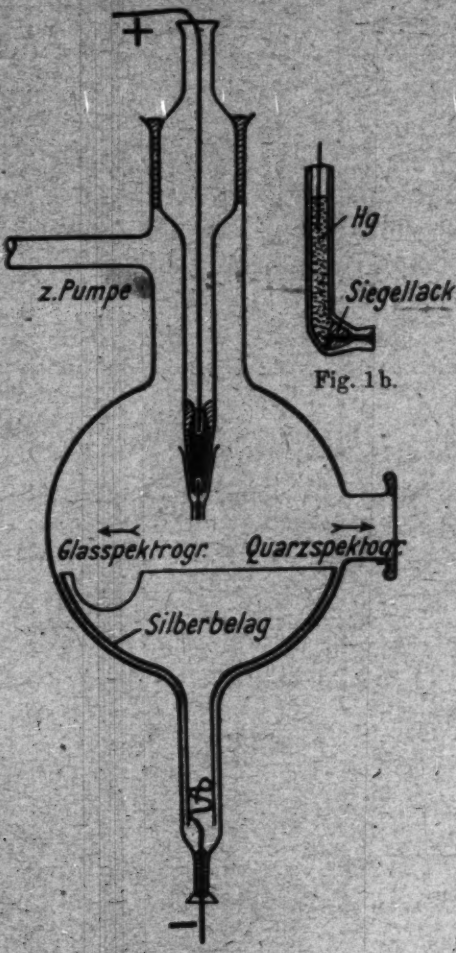


Fig. 1b.

Fig. 1a.

Messingzapfen eingekittet, an den die eigentlichen, zylindrischen Anoden angeschraubt wurden. Ein genau um den Ansatz passendes Glasröhrchen schloß ihn bis auf die untere Grundfläche ab. Die Anode wurde soweit aus dem Mittelpunkt der Kugel gerückt, daß die starken Reflexe an der Kolbenwand nicht störten. Ein Tubus mit Quarzfenster ließ das ultraviolette Licht austreten.

b) *Stromquelle und Schaltung.* Den Strom lieferte eine Dynamomaschine von 3500 Volt Höchstspannung. Sie wurde passend erregt und durch ein U-Rohr mit destilliertem Wasser von einigen Millionen Ohm Widerstand geschlossen. Mit zwei in die Schenkel tauchenden Sonden ließ sich dann jede gebrauchte niedrigere Spannung abnehmen. Diese Abzweigvorrichtung war sehr bequem, sowohl zum schnellen Spannungswechsel wie zum Ausgleich von Spannungsschwankungen der Maschine, die von solchen des Stadtnetzes herrührten. Die Maschine läßt sich auf diese Art auch gleichzeitig für andere Zwecke benutzen. Vor der Röhre lag ein Widerstand von $10^7 - 4 \cdot 10^8$ Ohm in Form von Wassersäulen oder Bleistiftstrichen auf Trockenplatten. Das Galvanometer war vor die Anode geschaltet und geerdet.

c) *Gas.* Den Wasserstoff ließ ich durch ein Palladiumröhrchen rein in die Röhre eindiffundieren, was recht schnell geht; beim Erhitzen mit einer $1^1/_2$ mm hohen Wasserstofflamme trat in 3 Minuten etwa 1 l Gas von 2 mm Druck durch das Metall; gereinigt wurde die Röhre durch wiederholtes Auspumpen auf Hochvakuum und Spülen mit Wasserstoff unter Erhitzen der Wand mit einer Bunsenflamme. Zur Entgasung der Elektroden wurden beim Weiterspülen kräftige Ströme durchgeschickt, wenn das Gas als einigermaßen rein angenommen werden konnte. Durch Stehenlassen der evakuierten Röhre überzeugte ich mich von ihrer Dichtheit. Auf den danach erhaltenen Spektrogrammen waren keine Verunreinigungen mehr angedeutet. Ich möchte hier einschalten, daß für diese Methode der Reinigung Rohgas aus einem Kippschen Apparat mit Vorsicht zu gebrauchen ist, da Arsen und wahrscheinlich auch andere Verunreinigungen in wenigen Minuten das Palladium verderben.

d) *Spektrographen.* Die Lichtemission beim positiven Spitzenstrom ist so gering, daß sie nur mit Prismenapparaten unter-

sucht werden kann. Das sichtbare Spektrum wurde mit einem lichtstarken, von Zeiss gebauten Glasspektrographen aufgenommen. Sein Kollimator ist ein Achromat von 32 cm B. W. und 5 cm Öffnung, das Kameraobjektiv ein Tessar von 30 cm B.W. und der Öffnung $f/3{,}5$. Sein Prisma ist aus 2 + 3 Einzelprismen zusammengekittet. Für das Ultraviolett stand ein Quarzspektrograph von Steinheil zur Verfügung; Kollimator und Kameraobjektiv haben etwa 40 cm B. W. und 4 cm Öffnung; das Cornusche Prisma hat 60° brechenden Winkel. Das ganze Gebiet von H_β bis ins äußerste zugängliche Ultraviolett ließ sich mit einer Plattenstellung für den vorliegenden Zweck ausreichend scharf aufnehmen. Das vertikale Lichtbüschel wurde durch die Kolbenwand mit einem Tessar von 5 cm B. W. und der Öffnung $f/3{,}5$ scharf auf den Spalt des Glasspektrographen, durch das Quarzfenster mit einem Quarz-Flußspatachromaten auf den des Quarzspektrographen abgebildet, so daß die Schwärzung längs einer Linie ihrer Intensität in den verschiedenen Abständen von der Anode entsprach. Das Verhältnis Linienlänge zu Höhe des Emissionsgebiets war für den Glasapparat 0,8, für den Quarzapparat 0,6. Beide Aufnahmen wurden gleichzeitig gemacht; wegen der größeren Lichtstärke war die mit dem Glasspektrographen natürlich früher fertig.

3. Beobachtungen.

a) *Aussehen des positiven Spitzenstroms in Wasserstoff.* Bei mehr als 10 mm Hg-Druck geht bei der gewählten Anordnung der Spitzenstrom nur von einem Teil der freien Anodenfläche, meist dem Rande, aus. In der räumlich sehr beschränkten Lichterscheinung sind dann kaum verschiedene Teile zu unterscheiden. Mit sinkendem Druck dehnt sich das Leuchten über die ganze Anode und weiter ins Gas hinein aus. Es bietet sich dann folgendes Bild (vgl. Fig. 2 — die Zahlenangaben beziehen sich auf 2 mm Druck). Die Anode ist überzogen von einer dünnen, ziemlich hellen, weißblauen Lichthaut *a*. Ihr folgt eine 0,3 mm dicke dunkelblaue Schicht *b*, die fast den Eindruck eines Dunkelraums macht; ihr Durchmesser scheint etwas geringer als der von *a*. Auf ihr sitzt mit der Grundfläche ein weißlicher Kegel *c*,

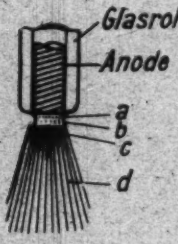


Fig. 2.

der ganz allmählich in einen ihn umhüllenden braunrötlichen Lichtpinsel d von etwa 12 mm Länge übergeht, der diffus im Gasraum ausläuft. Bei ganz niedrigen Drucken wurde das Büschel bis 25 mm lang; leider sinkt dabei die Lichtstärke so sehr, daß keine Spektrogramme mehr zu erhalten sind. Bei gleichem Druck wächst die Länge des wahrnehmbaren Pinsels mit der Stromstärke. Wegen der Lichtschwäche sind diese Angaben über Farbtöne und Masse unsicher. Die größte mögliche Stromstärke des Spitzenstroms sinkt schnell mit abnehmendem Druck und ist auch bei anscheinend gleichen Verhältnissen nicht immer dieselbe. Bei $p = 3$ mm betrug sie bis zu $50\,\mu A$, bei $p = 1$ mm nur noch einige μA. Bei noch niedrigeren Drucken läßt sich der Spitzenstrom nicht mehr sicher zünden; um ihn zu erhalten, muß man ihn bei höheren Drucken herstellen und dann vorsichtig Gas abpumpen.

b) *Spektren.* Die Spektrogramme zeigen, daß alle drei Wasserstoffspektren, die eingangs besprochen wurden, in allen Teilen des Anodenbüschels auftreten, aber in verschiedenem Intensitätsverhältnis. Das nähere zeigen die mit einem Hartmannschen Mikrophotometer aufgenommenen Schwärzungskurven (Fig. 3). Am auffallendsten ist das kontinuierliche

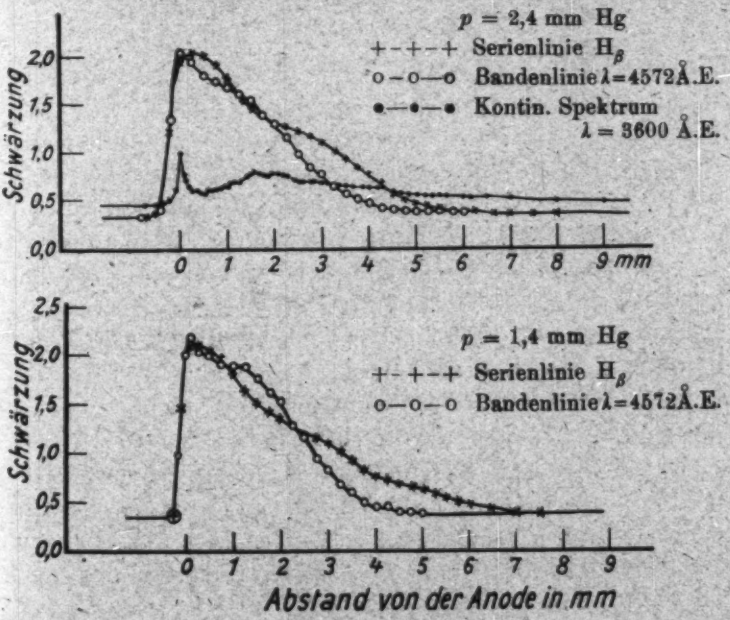


Fig. 3.

Spektrum, das sich vom Blaugrün bis jenseits $\lambda = 2300$ Å.E., erstreckt und den größten Teil der photographisch wirksamen Lichtemission darstellt. Es ist, wie die beiden anderen Spektren, am stärksten in der Anodenhaut, hat ein tiefes Minimum in der Gegend des Dunkelraums, steigt in dem weißlichen Kegel ziemlich plötzlich wieder zu großer Intensität an und klingt dann langsamer ab. Die Intensität der Serienlinien nimmt ständig mit wachsendem Abstand von der Anode ab; charakteristisch ist die plötzliche Verlangsamung der Abnahme an der Stelle, wo das kontinuierliche Spektrum sein zweites Maximum eben überschritten hat; die Schwärzungskurve zeigt hier einen leichten Buckel. Im Gegensatz hierzu nimmt an dieser Stelle die Helligkeit der Bandenlinien rascher ab. Besonders deutlich tritt das verschiedene Verhalten von Serien- und Bandenlinien auf der Aufnahme bei 1,4 mm Druck hervor; bei direkter Betrachtung sieht man hier erstere fast doppelt so lang als die stärksten Bandenlinien. Für den Quarzspektrographen ist bei diesem Druck das Büschel schon zu lichtschwach, über das kontinuierliche Spektrum läßt sich deshalb nichts bestimmtes sagen; nach den Spuren seines Anfangs auf der Aufnahme mit dem Glasapparat zu urteilen scheint es etwas zurückgetreten zu sein.

4. Kanalstrahlendoppliereffekt.

Die oben angeführte Ansicht, daß von der Anode des positiven Spitzenstroms Kanalstrahlen ausgingen, ist zwar ganz plausibel und wird auch durch das Aussehen des Anodenbüschels gestützt, doch scheint immerhin noch ein besonderer Nachweis erwünscht. Es lag nahe, ihn in der gleichen Weise zu führen, wie seinerzeit Stark die Bewegung der Träger des Kanalstrahlenlichts zeigte, nämlich durch Nachweis des Dopplereffekts. Die sonst unveränderte Röhre erhielt dazu Anoden nach Fig. 1b. Der Messing- oder Kupferstift ist in das Glasrohr eingeschmolzen, und dies unten rechtwinklig abgebogen, so daß die vermuteten Strahlen auf den Spalt zu laufen mußten. Den luftdichten Abschluß am Anodenstift besorgten Siegelack und Quecksilber. Das Anodenbüschel zeigte dasselbe Aussehen wie früher, ein seitliches Abbiegen zur Kathode hin war nicht festzustellen. Die Anodenfläche wurde in halber Größe auf den Spalt projiziert. Wegen der Erweiterung des Büschels von der Anode weg zeigten dann die äußersten Enden der Spektrallinien nur

das Licht des äußeren Mantels des Pinselendes, während sich in der Spalt- und Linienmitte die Emission aller Schichten überlagert. Die Dispersion des Glasspektrographen wurde durch Einschaltung eines zweiten Verbundprismas auf 22 Å.E./mm für H_β, 10 Å.E./mm für H_γ gebracht. Durch entsprechende Prismenstellung hätte sie sich noch vergrößern lassen, doch reichte dann die Lichtstärke nicht mehr aus; H_γ kam so schon nur ganz schwach heraus. Auf den derart gewonnenen Spektrogrammen zeigt sich H_β wie schematisch in Fig. 4 angegeben. Neben der kurzen intensiven ruhenden Linie, die nach außen allmählich abklingt, liegt auf der Seite des Violett ein bewegter Streifen, der nach außen erheblich über die ruhende Linie hinausragt. Auf einzelnen Aufnahmen biegt sein äußerstes Ende etwas nach Rot zurück. Seine Grenze entspricht unter Berücksichtigung der Spaltbreite einer Verschiebung um 3 Å.E., also einer Geschwindigkeit von 180 Volt. Bemerkenswerterweise ist weder bei direkter Betrachtung noch mit dem Photometer die Spur eines Intensitätsminimums neben der ruhenden Linie zu entdecken, auch dort nicht, wo die ruhende Linie nach außen hin schwach ausläuft, also jedenfalls ein Minimum nicht restlos überstrahlen kann. An H_γ ist nur der bewegte Streifen festzustellen. Das Auftreten des bewegten Streifens beweist, daß von der Anode Kanalstrahlen von bis zu 180 Volt Geschwindigkeit ausgehen, das Fehlen eines Intensitätsminimums in ihm, daß auch die ganz langsamen Strahlen leuchten. Allerdings muß man hier auch die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß die den kleinen Verschiebungen entsprechenden Geschwindigkeiten nur kleine Komponenten sehr stark gegen die Blickrichtung geneigter größerer Geschwindigkeiten sein können. In dem verhältnismäßig dichten Gas sind ja starke Ablenkungen eines Partikels aus seiner Richtung anzunehmen. Wegen der großen Intensität des wenig verschobenen Streifens glaube ich aber nicht, daß die Zerstreuung allein zur Erklärung ausreicht. Dies zugegeben, scheint daraus für die Glimmstromkanalstrahlen zu folgen, daß ganz langsame Träger der Serienlinien in ihnen sehr

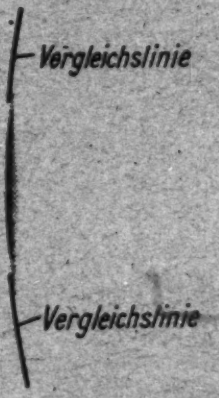


Fig. 4.

selten vorkommen, da ihr Licht nicht auftritt und die Anregungsbedingungen ähnliche wie beim Spitzenstrom sein dürften. In den äußersten Schichten des rötlichen Pinsels haben wir nur Serienlinien in bewegter Intensität, das Licht geht also nur von den Strahlteilchen aus, nicht von den angestoßenen Gasmolekeln.

5. Theoretische Auswertung.

a) *Träger der Balmerserie.* Auf Grund der letzten Tatsache allein kann noch nicht entschieden werden, ob die Serienlinien vom neutralen oder geladenen Atom ausgestrahlt werden. Nun hat aber Dempster[1]) gefunden, daß die positiven Teilchen der Kanalstrahlen bis zu den kleinsten Geschwindigkeiten Licht aussenden, die neutralen nur bei Geschwindigkeiten oberhalb 50 Volt. Bei Vereinigung dieses Befunds mit der obigen Tatsache folgt, daß das Licht langsamster Kanalstrahlen von den positiv geladenen Atomen stammt, diese also die Träger der Balmerlinien sind.

b) *Vorgänge im Spitzenstrom.* Die festgestellten Tatsachen entsprechen dem, was nach der Theorie des Spitzenstroms zu erwarten war. Auf die Anode treffen Elektronen von einigen hundert Volt Geschwindigkeit. Am Metall lösen sie langsame sekundäre Kathodenstrahlen aus, und werden teilweise mit kleiner Geschwindigkeit reflektiert. Diese langsamen Elektronen werden vom Feld zurückgeholt und möglicherweise nochmals reflektiert usw. Dicht an der Anode haben wir also einen dichten Schwarm von Elektronen der verschiedensten Geschwindigkeiten und damit starke Ionisation. Die hier entstehenden Atom- und Molekülionen erhalten bei der Ionisation den ersten Anstoß zur Emission des Serien- bzw. Bandenspektrums, die deshalb in der Anodenlichthaut stark auftreten. Die langsamsten Elektronen, die keine vollständige Ionisation mehr bewirken können, bilden Quantenpaare, womit das kontinuierliche Spektrum erklärt ist. Da das Quantenpaar vom Feld nicht fortgeführt wird, haben wir sein Licht nur an der Anode in großer Stärke. Eine zweite Stelle intensiver Ionisierung ist der weißliche Kegel hinter dem Dunkelraum; hier haben die von der Anode kommenden Kanalstrahlen die zur Ionisation nötige Geschwindigkeit erlangt und bilden aus dem Gas neue H^+-Ionen. Berück-

1) A. J. Dempster, Phys. Rev. 8 (2). S. 651. 1916.

sichtigt man, daß der Querschnitt des Strahlenbündels in der Strahlenrichtung größer wird, so ist aus der plötzlichen Verringerung des Intensitätsabfalls an dieser Stelle wohl auf eine Zunahme der Zahl ihrer Träger im Gesamtquerschnitt zu schließen. Etwas näher der Anode können die Kanalstrahlen noch nicht Ionen, wohl aber schon Quantenpaare bilden; diesen haben wir das hier ziemlich plötzlich einsetzende kontinuierliche Spektrum des Gasraums zuzuordnen.

In dem dichten Gas verlieren die bewegten Partikel an Geschwindigkeit, sobald die Feldstärke unter einen gewissen Betrag sinkt, von dem zweiten Ionisationsherd weiter ins Gas hinein haben wir deshalb immer langsamer werdende Kanalstrahlen, die nicht mehr ionisieren, wohl aber zunächst noch Quantenpaare bilden und sich selbst zur Lichtemission anregen können. Umladungen sind an dieser Stelle nicht mehr möglich, da keine Elektronen freigemacht werden. Damit stimmt überein, daß sich kontinuierliches und Serienspektrum am weitesten in den Gasraum hinein erstrecken.

Vom Bandenspektrum ist bekannt, daß es vorzugsweise von langsamen Kathodenstrahlen angeregt wird; wirklich finden wir es in großer Intensität in dem Gebiet, das die aus dem Gas freigemachten Elektronen auf dem Weg zur Anode durchlaufen, und der plötzliche Anstieg seiner Intensität im Ionisationsgebiet entgegen der Richtung der Kanalstrahlen ist zwanglos zu erklären durch die Zunahme der Elektronendichte auf dieser Strecke.

Die einzelnen Schichten beim positiven Spitzenstrom sind nicht so scharf begrenzt wie die Kathodenschichten des Glimmstroms, weil beim Spitzenstrom die Vorgänge an der Anode in erster Linie von der räumlichen Geschwindigkeitsverteilung der Kanalstrahlen abhängt, materielle Strahlen aber bei dem verhältnismäßig hohem Druck wegen der Zusammenstöße trotz gleichen durchlaufenden Feldes keine einheitliche Geschwindigkeit annehmen. Die schnellsten Teilchen finden sich nicht sehr weit von der Anode, daher ist der Dopplerstreifen in der Mitte der Linie am breitesten; das auf einigen Spektrogrammen bemerkbare Umbiegen der Linienenden zur ruhenden Linie hin rührt vielleicht mehr davon her, daß die bewegten Teilchen im äußersten Pinselmantel radial nach

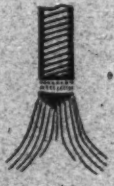


Fig. 5.

außen abbiegen, als von der Geschwindigkeitsverringerung. Ich schließe das daraus, daß bei höheren Drucken und Stromstärken der Pinsel ein Bild nach Fig. 5 bildet; das Ende stellt sich als leuchtender Hohlkegel dar; eine Erklärung für die Erscheinung habe ich noch nicht gefunden.

Zusammenfassung.

1. Durch Untersuchung der Lichtemission der hypothetischen langsamen Kanalstrahlen des positiven Spitzenstroms sollte Material zur Frage nach den Trägern der Wasserstoffspektren gewonnen werden.

2. Der positive Spitzenstrom wurde mit einer neuen Anodenform erzeugt; seine spektralanalytische Untersuchung bestätigte die nach heutigen Anschauungen ergänzte Starksche Theorie des Spitzenstroms, insbesondere die Existenz der Kanalstrahlen durch Nachweis ihres Dopplereffekts; das kontinuierliche Wasserstoffspektrum tritt in großer Intensität auf.

3. Aus den Ergebnissen in Verbindung mit Beobachtungen Dempsters wird geschlossen, daß die Balmerserie vom positiv geladenen Wasserstoffatom emittiert wird.

Die vorstehende Untersuchung ist im Physikalischen Institut der Universität Greifswald angestellt worden; für die Anregung zu ihr und die Förderung bei ihrer Durchführung bin ich Herrn Professor Dr. Stark zu großem Dank verpflichtet.

Greifswald, Phys. Inst. d. Univ., 12. Sept. 1919.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

3. *Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft; von Erwin Schrödinger.*

§ 1. Problemstellung.

Die Farbe des Lichtes, das von einem Pigmentaufstrich zurückgeworfen wird, erreicht bekanntlich niemals jenen Grad von *Sättigung*, den reine Spektrallichter besitzen, sondern erscheint neben dem reinen Licht gleichen Farbtons stets mehr oder weniger weißlich. Sie läßt sich aus ihm und einer gewissen Menge weißen Lichtes ermischen. Die Unmöglichkeit, Farben von spektraler Sättigung durch Pigmente zu verwirklichen, ist nicht eine technische, sondern bis zu einem gewissen Grade eine prinzipielle. Sie ist dadurch bedingt, daß die Mischung zweier Spektrallichter, die im Spektrum nicht zu weit voneinander entfernt liegen, einem bestimmten zwischen ihnen gelegenen Licht zwar im Farbton gleicht, aber im allgemeinen weißlicher ist als es. Um die volle Sättigung eines Spektrallichtes zu erreichen, müßte also das Pigment wirklich nur einen infinitesimalen Wellenlängenbereich remittieren, alle anderen vollständig verschlucken. Dann würde es uns aber natürlich — wie schon Helmholtz bemerkt hat — außerordentlich dunkel, im Grenzfall schwarz erscheinen.

Pigmente von spektraler Sättigung lassen sich im allgemeinen (auf die notwendige Einschränkung kommen wir sogleich zurück) *nur in verschwindender Lichtstärke herstellen.* —

Anschaulicher wird der Grund für die Weißlichkeit aller Pigmentfarben durch Betrachtung der Newton-Königschen Farbentafel. Er liegt in der Konvexität der Spektralkurve RGV (vgl. Fig. 1). Die Farbe des Pigments wird dargestellt durch den Schwerpunkt einer gewissen linearen Massenverteilung entlang der Spektralkurve, welche Massenverteilung durch die Remissionsfunktion (Remissionskoeffizient als Funktion der Wellenlänge) und durch die Beleuchtung bestimmt ist. Dieser Schwerpunkt P wird im allgemeinen ins Innere des

reellen Farbensegments (begrenzt von der Spektralkurve und der „Purpurgeraden" $R\,V$) fallen, demnach aus einem gewissen Spektrallicht S und weißem Licht W oder eventuell aus W und einem bestimmten Purpurgemisch) ermischbar sein.

Eine Ausnahme erleidet dieser Sachverhalt nur dann, wenn die Remission ganz auf das kurzwellige oder ganz auf das langwellige Ende des Spektrums beschränkt ist, derart, daß die Massenverteilung entweder nur von V bis J (λ ca. 475 $\mu\mu$) oder nur von R bis O (λ ca. 630 $\mu\mu$) reicht. Diese Endstücke der Spektralkurve, deren angegebene Grenzen übrigens naturgemäß unscharf sind, sind nach König streng geradlinig. Die Schwerpunkte solcher Pigmente würden also *auf* die Spektralkurve fallen, sie würden den betreffenden Spektrallichtern an Sättigung nicht nachstehen.

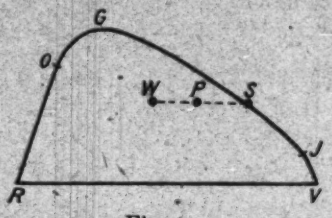


Fig. 1.

Rot-orange und indigo-violette Pigmente lassen sich in endlicher (wenn auch sicher nicht sehr erheblicher) Lichtstärke und vollkommen spektraler Sättigung herstellen.

Zu erinnern ist noch, daß die Punkte R und V je einem *endlichen* Wellenlängenbereich, nämlich den beiden *monochromatischen* Endstücken des Spektrums (bis $\lambda = 655$ bzw. $\lambda = 430$) entsprechen, daher je eine *endliche* Punktmasse aufnehmen (nicht bloß eine Liniendichte), wenn in dem betreffenden Endstück Remission stattfindet.

Man kann nun für irgendeinen Punkt der Rot-orange oder der Indigo-violett-Strecke, und ganz ebenso für einen Punkt der Purpurgeraden die Frage aufwerfen, in *welcher* maximalen Lichtstärke er sich durch ein Pigment verwirklichen läßt. Man kann weiterhin — auf die äußerste, mit reinen Lichtern erreichbare Sättigung zugunsten der Lichtstärke verzichtend — dieselbe Frage stellen für Punkte, welche der Berandung des Segments mindestens *nahe* liegen. Und so wird man dazu geführt, schließlich für einen beliebigen Punkt der reellen Farbfläche zu fragen:

In welcher maximalen Lichtstärke läßt sich dieser Punkt durch ein Pigment verwirklichen und wie müssen die Pigmente, d. h. ihre Remissionsfunktionen beschaffen sein, welche das leisten?

Die Beantwortung dieser Frage ist Gegenstand der vorliegenden Notiz.

Denkt man sich in der Farbenebene irgend drei nicht auf einer Geraden liegende Bezugspunkte gewählt, mögen es nun die Königschen Grundempfindungspunkte sein oder Punkte, die drei reellen Eichlichtern entsprechen, oder sonst irgend drei Punkte im Innern oder außerhalb des reellen Farbensegments, und denkt man sich die Einheitsquanta für diese Punkte irgendwie festgesetzt, so pflegt man bekanntlich jede Farbe durch ein Zahlentripel zu definieren, nämlich durch die Quanta der drei gewählten Grundfarben, aus denen sie im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne[1]), zu mischen ist. Als Verhältniszahlen betrachtet, bilden die drei Eichwerte die projektiven baryzentrischen Dreieckskoordinaten[2]) des die Farbe darstellenden Punktes bezogen auf das Grunddreieck als Koordinatendreieck. Die Summe der Eichwerte ist die Masse des darstellenden Punktes und wird als Quantum oder Quantität der Farbe bezeichnet. Sie ist zwischen Farben von verschiedener *Lage* des darstellenden Punktes (Farben verschiedener „*Reizart*", wie von Kries treffend sagt) keineswegs ein Maß ihres *Helligkeits*verhältnisses, außer — vielleicht — bei ganz bestimmter Wahl der Einheitsquanta der gewählten Grundfarben; eine noch unentschiedene Frage, die hier aber gar nicht angeschnitten zu werden braucht.

Für Farben *gleicher* Reizart (die in denselben Punkt fallen, durch bloße Änderung der objektiven Intensität gleich gemacht werden können) ist die Quantität der objektiven Intensität proportional, demnach sicherlich — ceteris paribus — ein monotones Maß der Helligkeit. Ergänzen wir also unsere räumlich zweidimensionale Darstellung des Farbengebietes zu einer dreidimensionalen dadurch, daß wir in jedem reellen

1) Im uneigentlichen Sinne mischbar nenne ich eine Farbe, die außerhalb des gewählten Grunddreiecks liegt, für die daher ein oder zwei Eichwerte negativ ausfallen. Die konkrete Bedeutung hiervon ist bekannt.

2) Als „*baryzentrisch*" bezeichne ich ein Dreieckskoordinatensystem, dessen „Einheitspunkt" in den Schwerpunkt des Koordinatendreiecks fällt. Diese Tatsache ist nicht zu verwechseln mit der willkürlichen, aber bequemen und daher meistens durchgeführten Verlegung des *Weißpunktes* in den Schwerpunkt.

Farbpunkt sein Quantum senkrecht zur Farbentafel als Ordinate errichten, so werden die Pigmentfarben größter Quantität oder größter Lichtstärke oder von — ceteris paribus — größter Helligkeit, nach denen wir gefragt haben, eine *Fläche* über dem reellen Farbensegment bilden, die in der Mitte irgendwie verläuft und entlang dem *gekrümmten* Teil der Berandung zum Ordinatenwert Null, entlang den drei *geradlinigen* Randstücken zu kleinen, in stetigem Kurvenzug aneinanderschließenden Ordinatenwerten herabsinkt. Diese Fläche, zusammen mit den drei von den Randordinaten gebildeten vertikalen Wänden und der gewöhnlichen, Fig. 1 dargestellten, reellen Farbenfläche als Basis *begrenzt das Gebiet der durch Pigmente darstellbaren Farben* in unserer dreidimensionalen Darstellung, die wir übrigens nur für den Augenblick zur Veranschaulichung gewählt haben und auf die weiter kein Gewicht gelegt wird (sie ist unpraktisch, weil dem Fehlen objektiven Lichtes nicht *ein* Punkt, sondern die ganze Basisfläche entspricht).

Alles bisher Gesagte gilt für jede beliebige *Beleuchtung* der Pigmente, nur muß dieselbe von vornherein ihrer genauen *physikalischen* Zusammensetzung und Intensität nach bestimmt gewählt und bei allen Überlegungen festgehalten werden. Mit der Beleuchtung ändert sich natürlich die Lage der Fläche, die in unserer Darstellung das Gebiet der Pigmente nach oben hin begrenzt. Nicht nur wachsen alle ihre Ordinaten proportional der *Intensität* der Beleuchtung, sondern mit der *Zusammensetzung* der letzteren variiert auch die *Gestalt* der Fläche. Z. B. werden für bläuliche Beleuchtung blaue Töne relativ leichter in beträchtlicher Sättigung und Lichtstärke hergestellt werden können als für weiße oder rötliche Beleuchtung, welch letztere dagegen die Herstellung gesättigter, lichtstarker roter Pigmentfarben erleichtern wird usw. Das Resultat, zu dem wir gelangen werden hinsichtlich der Pigmente von — bei gegebener Reizart — größter Leuchtkraft, der *optimalen* Pigmente, wie ich sie kurz nennen will, das Resultat, sage ich, wird gleichwohl in gewissem Sinn von der Beleuchtung ganz unabhängig sein. Es wird sich nämlich herausstellen, daß es *dieselben* Pigmente sind, die für eine ganz beliebige Beleuchtung stets optimalen Charakter tragen; oder mindestens, daß sich eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit von Pigmenten, d. h.

von Remissionsfunktionen, angeben läßt, welche unabhängig vom Beleuchtungslicht, ja selbst unabhängig von der genauen Gestalt der Spektralkurve der Fig. 1 definiert sind, und bei jeder beliebigen Beleuchtung gerade die Mannigfaltigkeit der für diese Beleuchtung optimalen Pigmentfarben darstellen.

§ 2. Aufsuchung einer, die Grenzfläche realisierenden Pigmentmannigfaltigkeit.

Um die Vorstellungen zu fixieren, wählen wir folgende spezielle Koordinatenstellung für Pigmente. Als Bezugspunkte wählen wir die Königschen Grundempfindungspunkte. Das Beleuchtungslicht sei beliebig bestimmt, nur soll es, vorderhand, alle sichtbaren Wellenlängen überhaupt enthalten; wir mögen uns immerhin Sonnenlicht darunter denken. In den Schwerpunkt des Dreiecks verlegen wir die Farbe der ideal weißen und aller neutral grauen Pigmente in diesem Licht, d. h. aller Pigmente mit *konstanter* Remissionsfunktion; und zwar soll das ideal weiße Pigment mit der Remission 1 die Koordinaten 1, 1, 1 erhalten. Sind dann

$$x_1(\lambda) \qquad x_2(\lambda) \qquad x_3(\lambda)$$

die Königschen Grundempfindungskurven für das Interferenzspektrum des Beleuchtungslichtes und zwar in solchem Maßstab, daß

$$(1) \qquad \int x_1(\lambda)\,d\lambda = \int x_2(\lambda)\,d\lambda = \int x_3(\lambda)\,d\lambda = 1,$$

so sind die Koordinaten eines Pigments mit der Remissionsfunktion $r(\lambda)$

$$(2) \quad p_1 = \int x_1(\lambda)\,r(\lambda)\,d\lambda, \quad p_2 = \int x_2(\lambda)\,r(\lambda)\,d\lambda, \quad p_3 = \int x_3(\lambda)\,r(\lambda)\,d\lambda,$$

seine Quantität ist

$$(3) \qquad q = p_1 + p_2 + p_3 = \int (x_1 + x_2 + x_3)\,r\,d\lambda.$$

Für r lassen wir natürlich nur Werte zwischen 0 und 1 einschließlich der Grenzen zu. Den gleichen Spielraum haben dann die p, während q zwischen 0 und 3 liegt. Von der *Intensität* des Beleuchtungslichtes ist die Koordinatendarstellung unabhängig, da zufolge der Festsetzung über die Koordinaten des weißen Pigments die „Einheitsquanta der Grundempfindungen" automatisch mitvariieren.

Die möglichen Gestalten der Remissionsfunktion optimaler Pigmente schränken wir nun zunächst durch folgenden, für unsere kleine Untersuchung fundamentalen Satz ein:

Wenn ein Pigment in der Umgebung dreier Stellen des Spektrums, die im Farbendreieck nicht auf einer Geraden liegen, eine von 0 und von 1 verschiedene, also zwischen 0 und 1 liegende Remission hat, so läßt sich die Remission an diesen drei Stellen so abändern, daß ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht.

Denn aus jenen drei reinen Lichtern läßt sich dann ein *positives* Quantum der Farbe, die das Pigment besitzt, jedenfalls im uneigentlichen Sinn ermischen, d. h. eventuell mit 1 oder 2 negativen Mischungskoeffizienten. Liegt nun die Remission an den drei Stellen *zwischen* 0 und 1, so kann ich, sie um kleine Beträge abändern (vermehren oder vermindern), derart, daß die hinzutretenden Farbquanta im richtigen Verhältnis stehen und ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht. — In Zeichen: seien

$$\lambda = a, \qquad \lambda = b, \qquad \lambda = c$$

die drei Stellen im Spektrum. Dann liegt in der Voraussetzung, daß

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x_1(a) & x_2(a) & x_3(a) \\ x_1(b) & x_2(b) & x_3(b) \\ x_1(c) & x_2(c) & x_3(c) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1(a)\,\delta_a + x_1(b)\,\delta_b + x_1(c)\,\delta_c = p_1\,\delta \\ x_2(a)\,\delta_a + x_2(b)\,\delta_b + x_2(c)\,\delta_c = p_2\,\delta \\ x_3(a)\,\delta_a + x_3(b)\,\delta_b + x_3(c)\,\delta_c = p_3\,\delta \end{cases}$$

haben dann, für ein vorgegebenes kleines $\delta > 0$, Lösungen in δ_a, δ_b, δ_c. Ändert man nun auf den kleinen Strecken ($\varepsilon > 0$)

$$(6) \qquad a \leqslant \lambda \leqslant a + \varepsilon, \qquad b \leqslant \lambda \leqslant b + \varepsilon, \qquad c \leqslant \lambda \leqslant c + \varepsilon,$$

die Remission $r(\lambda)$ ab auf beziehungsweise

$$(7) \qquad r(a) + \delta_a, \qquad r(b) + \delta_b, \qquad r(c) + \delta_c$$

so ändern sich die Pigmentkoordinaten nach (2) um die mit ε multiplizierten linken Seiten von (5), die Reizart also, *wegen*

(5) *nicht*, das Quantum nach (3) um die positive Größe

$$\varepsilon\,\delta(p_1 + p_2 + p_3) = \varepsilon\,\delta q,$$

was zu beweisen war.

Es folgt, daß die Remission eines optimalen Pigments auf keinem *endlichen* Stück des gekrümmten Teils der Spektralkurve und ebensowenig auf endlichen Stücken *beider* geradlinigen Endteile von Null und von Eins verschieden sein kann, sondern sicherlich auf dem gekrümmten und einem der geradlinigen Stücke nur einen dieser beiden Grenzwerte besitzt.

Der Kürze wegen will ich ein Pigment *zweiwertig* nennen in einem Wellenlängengebiet, wo seine Remission durchwegs Null oder Eins ist, und als zweiwertige Pigmente schlechthin solche bezeichnen, deren Remission im ganzen Spektrum nur einen dieser beiden Werte annimmt.

Für eine der beiden geradlinigen („dichromatischen") Spektralstrecken versagt der obige Beweis wegen des Verschwindens der Determinante (4). Ferner ist zu bedenken, daß die Endpunkte R und V der Spektralkurve je einem endlichen („monochromatischen") Wellenlängenbereich entsprechen. Unser Beweis schließt also auch *den* Fall nicht aus, daß in *beiden* monochromatischen Bereichen gleichzeitig — dann aber auch sonst nirgends — Abweichungen von der Zweiwertigkeit auftreten. Solche Abweichungen erscheinen also noch möglich entweder

a) in *einem* dichromatischen einschließlich des angrenzenden monochromatischen Bereiches oder

b) in beiden monochromatischen Beweisen gleichzeitig.

Trotzdem dürfen wir unsere Betrachtungen *auf zweiwertige Pigmente beschränken*, wenn wir nur *darauf* Wert legen, jede optimale Pigmentfarbe wenigstens in *einem* ihrer Vertreter kennen zu lernen und uns nichts daran liegt, *physiologische Duplikate* auszuscheiden. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß die Zweiwertigkeit in den Fällen a) und b) durch sukzessive Abänderung der Remissionsfunktion *ohne Änderung im Aussehen des Pigments* herbeigeführt werden kann.

Liegen nämlich die 3 Punkte a, b, c in der Farbentafel auf einer Geraden, so verschwindet die Determinante (4) und die Gleichungen (5) haben nichtverschwindende Lösungen

in δ_a, δ_b, δ_c für $\delta = 0$. Die entsprechende Abänderung (7) ändert das Aussehen des Pigments *nicht* und kann solange in demselben Sinne fortgesetzt (oder auch von Haus aus endlich und *so* groß gewählt) werden, bis eine der drei Zahlen $r(a)$, $r(b)$, $r(c)$ auf Null oder Eins gebracht ist. Das Verfahren läßt sich fortsetzen, solange $r(\lambda)$ noch an drei Stellen gegen die Zweiwertigkeit verstößt, d. h. das Pigment kann durch ein zweiwertiges ersetzt werden ohne Änderung seines Aussehens. Was zu beweisen war.

Wir beschränken unsere Betrachtung also jetzt auf zweiwertige Pigmente und haben unter ihnen die optimalen herauszusuchen. Die Remission eines zweiwertigen Pigments ist eine unstetige Funktion von λ, sie springt an einer oder mehreren Stellen von Null auf Eins oder von Eins auf Null. Eine solche Stelle nenne ich eine *Sprungstelle* $(1 \to 0)$ oder $(0 \to 1)$, die Pfeile natürlich im Sinne wachsender Wellenlänge verstanden. Man überlegt nun leicht, daß die *Zahl der Sprungstellen überhaupt* für optimale Pigmente *nicht größer als zwei* sein kann — wobei allerdings wieder Duplikate ausgeschieden werden. Zunächst gilt folgender, dem ersten in vieler Beziehung analoge Satz:

Besitzt ein Pigment drei auf der Farbentafel nicht in einer Geraden liegende Sprungstellen, so läßt sich seine Remission durch Verschiebung der Sprungstellen so abändern, daß ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht. Es kann also nicht optimal sein.

Der Beweis verläuft völlig analog wie früher und braucht darum wohl nicht in extenso durchgeführt zu werden. Er beruht darauf, daß die Farbe des Pigments aus den drei Sprungfarben mindestens in uneigentlichem Sinne mischbar ist, so daß eine nach Sinn und Größe geeignet gewählte Verschiebung der Sprungstellen die gewünschte Verstärkung der Leuchtkraft ohne Änderung der Reizart herbeiführt.

Drei und mehr *kollineare* Sprungstellen erscheinen wieder möglich. Aber solange ihrer noch mindestens drei vorhanden sind, lassen sie sich ohne Änderung im Aussehen des Pigments verschieben, bis sie zusammenschließen, so daß schließlich höchstens noch zwei vorhanden sind. Besser noch als durch eine der früheren analoge Rechnung läßt sich dies auf folgende Art direkt einsehen, z. B. für das langwellige Stück RO.

Vorgelegt sei ein im übrigen Spektrum zweiwertiges Pigment, dessen Remission aber auf der Spektralstrecke *RO* (einschließlich der Grenzen) ganz beliebig beschaffen sein mag. (Vergleiche die etwas eigenartige, aber wohl leicht verständliche Fig. 2, in welcher der Remissionskoeffizient auf den Normalen der Spektralkurve nach außen aufgetragen ist.) Die Aufgabe ist, daß vorgelegte Pigment durch ein auch auf *RO* zweiwertiges mit möglichst wenig Sprungstellen auf dieser Strecke zu ersetzen, das ihm physiologisch gleich ist.

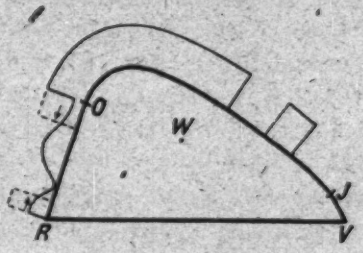


Fig. 2.

Damit letzteres der Fall sei, muß — nach dem Graßmannschen Satze, daß gleichaussehende Lichter gemischt gleichaussehende Lichter ergeben — die von der Remission auf *RO* allein erzeugte „Teilfarbe" für das abgeänderte Pigment dieselbe sein, wie für das vorgegebene. Der Punkt, der dieser Teilfarbe entspricht, liegt jedenfalls irgendwo auf *RO*. Um zum Schluß möglichst wenig Sprungstellen zu haben, „erzeugen" wir die Teilfarbe auf verschiedene Weise, je nachdem das vorgelegte Pigment auf dem bei *O* violettwärts anschließenden Stück vollständig remittiert oder vollständig absorbiert.

In *beiden* Fällen gehen wir aus von vollständiger Absorption auf *RO*. Dann schieben wir im *ersten* Fall (dem die Zeichnung entspricht) eine Sprungstelle ($0 \to 1$) vom roten Ende des Spektrums violettwärts und gleichzeitig die Sprungstelle ($1 \to 0$) von *O* rotwärts vor, in solchem relativen Tempo, daß die im Gebiet *RO* auf diese Weise entstehende Remission immer die *Reizart* der Teilfarbe trifft, was offenbar möglich ist und sich solange fortsetzen läßt, bis auch das *Quantum* der Teilfarbe erreicht ist. Die Fortsetzung des Prozesses könnte nur dadurch vereitelt werden, daß eine der Sprungstellen den Ort der Teilfarbe überschreitet. Das kann aber nicht eintreten, bevor das Quantum der Teilfarbe erreicht ist, denn dann würden „unverwendet" zwischen den Sprungstellen nur Spektrallichter übrig bleiben, die entweder durchweg röter oder durchweg gelber wären als die Teilfarbe, aus denen sich also über-

haupt kein Quantum der Teilfarbe mehr ermischen läßt; letztere wäre also aus dem zur Verfügung stehenden Licht überhaupt nicht in hinreichender Quantität ermischbar, was den Annahmen widerspricht. —

Im zweiten Fall, wo von O violettwärts ein *Absorptionsgebiet* anschließt, erzeugen wir die Teilfarbe in wachsender Stärke durch ein einziges Remissionsgebiet, das den Punkt der Teilfarbe in seinem Innern enthält. Wir schieben, wieder von identisch verschwindendem r in RO ausgehend, eine Sprungstelle $(1 \to 0)$ von der Teilfarbe rotwärts und gleichzeitig eine Sprungstelle $(0 \to \frac{1}{2})$ von der Teilfarbe violettwärts vor, in solchem relativen Tempo, daß die Reizart der Teilfarbe getroffen wird. Aus ähnlichem Grunde wie früher muß auf diese Weise auch ihr Quantum erreicht werden, bevor oder schlimmstenfalls in eben dem Augenblick, wo die Fortsetzung des Prozesses dadurch vereitelt wird, daß die erste Sprungstelle das rote Ende des Spektrums oder die zweite den Punkt O erreicht. —

Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Wird man auf dem geschilderten Wege nur zu *einer* Sprungstelle geführt, was ausnahmsweise vorkommen kann, so ist noch eine zweite irgendwie im Spektrum möglich; resultieren aber zwei, so müssen es die einzigen sein, wenn das Pigment ein optimales sein soll.

Nur das eine kann passieren, daß die zwei Sprungstellen, auf die man geführt wird, beide in der monochromatischen Endstrecke liegen. Sie fallen dann in denselben Punkt R der Farbentafel und es ist noch eine dritte Sprungstelle irgendwo im Spektrum möglich. Aber man erkennt sofort, daß das isolierte monochromatische Remissions- oder Absorptionsgebiet, um das es sich diesfalls handelt, ganz an das Ende des Spektrums geschoben werden kann, so daß nur mehr *eine* monochromatische Sprungstelle vorliegt. —

Überschauen wir das Gesagte, *so behalten wir also schließlich*, nach Ausscheidung vieler Duplikate, *für die optimalen Pigmente nur die zweidimensionale Mannigfaltigkeit der zweiwertigen Pigmente mit ein oder zwei Sprungstellen übrig.* Unter ihnen muß jede optimale Pigmentfarbe mindestens einen Vertreter haben. Wir haben nun nur noch einige kleinere Gruppen,

die sicher nicht optimal sind, auszuscheiden. Von dem Rest wird sich zeigen lassen, daß darunter keine zwei Pigmente gleicher Reizart mehr vorkommen. Damit wird bewiesen sein, daß diese Pigmente auch wirklich alle optimal sind, und daß sie genau die eingangs erwähnte Grenzmannigfaltigkeit und zwar in je *einem* Exemplar, ohne Duplikate, darstellen.

Zunächst ordnen wir die ein- und zweisprüngigen zweiwertigen Pigmente in folgende Gruppen, die durch die beigefügte Fig. 3 wohl ohne weiteres verständlich sind. Die abgegrenzte Strecke ist das sichtbare Spektrum, als Ordinate ist die Remission aufgetragen.

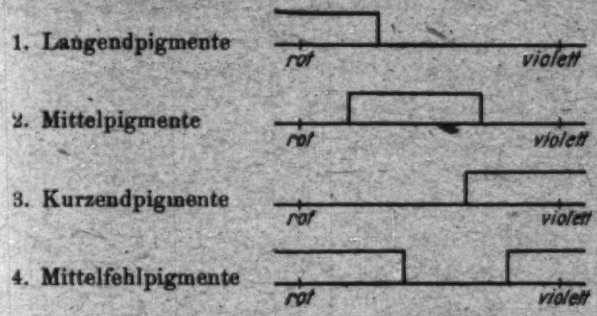


Fig. 3.

Als sicher nichtoptimal scheiden nun noch aus:

a) von den Langendpigmenten jene, deren Remission nicht bis an die kurzwellige Grenze des monochromatischen Rot reicht;

b) von den Mittelpigmenten jene, deren Sprungstellen beide entweder *zwischen* dem roten Spektralende und *O*, oder *beide zwischen J* und dem kurzwelligen Ende liegen. Für solche ist offenbar eine Vermehrung der Lichtstärke durch Ausdehnung des Remissionsgebietes möglich;

c) von den Kurzendpigmenten jene, deren Remission nicht bis an die langwellige Grenze des monochromatischen Violett reicht;

d) von den Mittelfehlpigmenten jene, welche *eine* Sprungstelle im *Inneren* des monochromatischen Rot, die *andere* im *Inneren* des monochromatischen Violett haben; denn das betreffende Purpur läßt sich durch Ausdehnung der beiden Remissionsgebiete verstärken, solange bis eine der beiden Sprung-

stellen die Grenze des monochromatischen Bereiches erreicht. (Die mit *zwei gleichfarbigen* monochromatischen Sprungstellen wurden schon früher als Duplikate ausgeschieden und durch Endpigmente ersetzt.)

Es ist nun noch der Nachweis zu führen, daß die nach den Ausscheidungen a) bis d) übrig behaltenen Pigmente alle untereinander von verschiedener Reizart sind.

Bei dieser Überlegung nehmen wir vorweg jene drei Untergruppen, deren darstellende Punkte auf eines der drei geradlinigen Berandungsstücke fallen. Sie treten nur je unter sich in Konkurrenz. Für sie ist die Richtigkeit der Behauptung ohne weiteres klar und wurde eben durch die Ausscheidungen a) bis d) herbeigeführt.

Für die übrigen muß der Nachweis — wenig elegant — partienweise geführt werden, d. h. es muß zunächst jede der vier Gruppen unter sich und dann mit jeder anderen verglichen und alle möglichen Lagenkombinationen der Sprungstellen in Betracht gezogen werden. Immerhin dürfen wir uns dabei gestatten, von den Endpigmenten abzusehen, da sie ja schließlich als Ausartungen sowohl der Mittelpigmente als der Mittelfehlpigmente mit berücksichtigt sind. Wir vergleichen also zunächst:

A. Mittelpigmente unter sich.

Bei ganz getrennter Lage der Remissionsgebiete ist Konizidenz der Schwerpunkte offenbar unmöglich. Ebenso bei umschließender Lage. Denn da (nach obiger Vorwegnahme der spektral gesättigten Pigmente) die Remissionsgebiete auch gekrümmte Teile der Spektralkurve enthalten müssen, fällt der Schwerpunkt der nichtgemeinsamen Außenteile des umfangreicheren Remissionsgebietes außerhalb des zu dem kleineren Remissionsgebiete gehörigen Segments und muß den Schwerpunkt des letzteren verlagern. Ebenso wenn die Remissionsgebiete nur übergreifen. Der gemeinsame Mittelteil, mit je einem nichtgemeinsamen Außenteil kombiniert, kann nicht beidemale auf denselben Punkt führen.

B. Mittelfehlpigmente unter sich.

Hier ist stets von einem Pigment auszugehen, daß beide Absorptionsgebiete zusammen besitzt, und zu überdenken, daß

durch die entsprechenden Ergänzungen der Schwerpunkt dieses „Differenzpigments“ in verschiedener Weise verlagert wird.

C. Mittelpigmente mit Mittelfehlpigmenten.

α) Das Remissionsgebiet des ersten und das Absorptionsgebiet des zweiten Pigments liegen ganz getrennt. Das Mittelfehlpigment entsteht dann aus dem Mittelpigment durch Hinzufügung von Remissionen, die seinen Schwerpunkt unmöglich ungeändert lassen können.

β) Das Remissionsgebiet liegt innerhalb des Absorptionsgebietes. Dieser Fall bedarf keines Wortes.

γ) Das Absorptionsgebiet liegt innerhalb des Remissionsgebietes (s. Fig. 4). Das ganze Farbengebiet zerfällt dann in

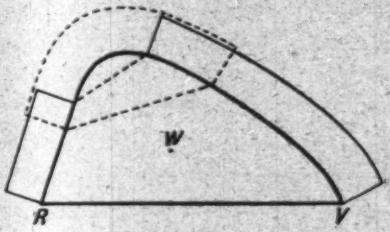


Fig. 4.

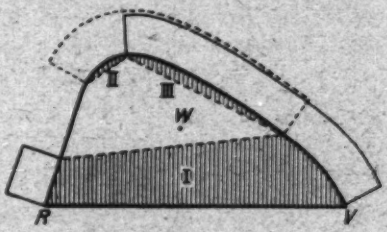


Fig. 5.

drei Streifen, deren Schwerpunkte (d. h. die der sie begrenzenden Teile der Spektralkurven), wenn die Pigmente von gleicher Reizart sein sollten, *so* auf einer Geraden liegen müßten, daß der Schwerpunkt des mittleren Streifens *nicht* in der Mitte liegt; was offenbar unmöglich ist.

δ) Absorptionsgebiet und Remissionsgebiet übergreifen (siehe Fig. 5). Es müßte im Innern der schraffierten Gebiete I, II, III je ein Punkt namhaft gemacht werden können, derart, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen, und zwar der Punkt III *nicht* in der Mitte zwischen I und II. Denn es müßte ja die Hinzufügung des Bogens II zu III den Schwerpunkt von III in denselben Punkt bringen wie die Hinzufügung des Bogenpaares I. Das ist offenbar unmöglich. — — —

Die zweidimensionale Pigmentmannigfaltigkeit, auf die wir geführt wurden, stellt also die optimalen Pigmentfarben vollständig und in je *einem* Exemplare dar. Und zwar, wie vorausgreifend bemerkt war, *für ein ganz beliebiges Beleuchtungs-*

licht, das nur alle Wellenlängen überhaupt enthält. Denn weder enthält die Definition unserer Pigmente irgendeine Beziehung auf das Beleuchtungslicht, noch haben wir im Verlauf unserer Untersuchung irgendeine andere Eigenschaft desselben benützt, als stillschweigend die, daß keine homogene Lichtart darin gänzlich fehlen sollte.

Daß unsere Pigmente ihren optimalen Charakter nicht verlieren, auch wenn das Beleuchtungslicht spektrale Lücken aufweist, erkennt man übrigens sofort durch Grenzübergang von einer nur wenig verschiedenen Beleuchtung, in der die Lücken mit kleinen Ordinatenwerten ausgefüllt sind, die man nach irgendeinem Gesetz gegen Null abnehmen läßt. Dabei ändert zwar ein Pigment im allgemeinen seinen Ort in der Farbentafel, aber nicht seine physische Beschaffenheit, bleibt also optimal auch im Grenzfall. Die eindeutige Zuordnung zwischen der Pigmentmannigfaltigkeit und den Optimalfarben bleibt aber natürlich nicht erhalten, weil große Gruppen von Pigmenten farbengleich werden, nämlich alle jene, deren Sprungstelle in eine spektrale Lücke des Beleuchtungslichtes fällt; wie ja überhaupt in diesem Fall der Verlauf der Remission innerhalb einer solchen Lücke völlig ohne Einfluß auf das Aussehen des Pigments ist.

Für eine kurze, von den eingeführten Kunstausdrücken freie Zusammenfassung des nunmehr festgestellten Hauptergebnisses unserer Untersuchung verweise ich an das Ende dieser Note (Zusammenfassung S. 621 u. 622).

§ 3. Über die Beantwortung der Fragen nach der größten erreichbaren Lichtstärke, nach der höchsten errreichbaren Sättigung und nach den notwendigen Bedingungen für lichtstärkste Pigmente.

Es ist klar, wie man rechnerisch vorzugehen hätte, um nun *den ersten Teil der auf S. 604 gestellten Frage* in irgendeinem speziellen Fall zu beantworten: *in welcher maximalen Lichtstärke läßt sich ein bestimmter Punkt der Farbentafel durch ein Pigment verwirklichen?*

Diese Frage hat natürlich nur bei vorgegebenem Beleuchtungslicht einen Sinn. Man wird sich dann als Vorarbeit aus den auf das Interferenzspektrum dieses Lichtes umgerechneten

Grundempfindungskurven eine Tafel der drei Integrale berechnen

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} x_1(\lambda)\,d\lambda, \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} x_2(\lambda)\,d\lambda, \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} x_3(\lambda)\,d\lambda,$$

wo λ_0 die kurzwellige Grenze des sichtbaren Spektrums ist, während die obere Integralgrenze von λ_0 bis an das langwellige Ende variiert. Aus dieser Tafel lassen sich die Koordinaten der optimalen Farben mit leichter Mühe ablesen, bei häufigerem Gebrauch wird man sie in einer Tafel mit zwei Eingängen vereinigen. Durch vernünftiges Probieren — ich sehe keinen einfacheren Weg — am besten vielleicht graphisch, indem man immer *ein* Integral als Funktion des anderen aufträgt und auf den entstehenden Kurven Sehnen von richtiger Neigung aufsucht — auf solche Art also wird man *jene* Sprungstellen (Integrationsgrenzen) ermitteln, für welche die drei Koordinaten des Pigments das durch den Punkt in der Tafel vorgegebene Verhältnis aufweisen. Diese drei Koordinaten geben dann an, welche Bruchteile der durch ein ideal weißes Pigment bei dieser Beleuchtung erregten Rot-, Grün-, Blauempfindung durch ein Pigment, das bei dieser Beleuchtung die vorgegebene Reizart realisiert, maximal erregt werden können.

Natürlich läßt sich ganz dieselbe Überlegung und Rechnung auch unter Benutzung irgendwelcher anderer, etwa auf drei reelle Eichlichter bezogener Eichkurven an Stelle der Grundempfindungskurven durchführen; wobei dann die optimalen Koordinaten eine noch konkretere, von jeder Hypothese über das Zustandekommen der Farbempfindung auch äußerlich freie Bedeutung bekommen.

Die geschilderten rechnerischen Vorarbeiten hier wirklich zu leisten, würde ich *deshalb* für fast verlorene Mühe halten, weil es so sehr unsicher ist, ob der erste, der die vorstehenden Resultate etwa praktisch zu verwerten wünscht, dies gerade für Tageslicht und für die Königschen Eichkurven in ihrer heute vorliegenden Form wird tun wollen. —

Eine der eben behandelten verwandte, dem Praktiker vielleicht näherliegende Frage möchte ich hier nur kurz streifen, nämlich diese: in welcher maximalen *Sättigung* läßt sich ein

bestimmter *Farbton* durch ein Pigment herstellen, wenn eine bestimmte *Helligkeit* nicht unterschritten werden soll?

Ohne Zweifel ist das nachgefragte Pigment in unserer Grenzmannigfaltigkeit zu suchen und zwar auf einem Halbstrahl durch den Weißpunkt[1]) möglichst weit außen, *so* weit, daß die gewünschte Helligkeit eben noch nicht unterschritten wird. Man müßte sich also in derselben Art wie früher die „Quantitätsfläche", jetzt eine „Helligkeitsfläche" über dem Farbensegment errichten, deren Ordinaten in jedem Punkt die *Helligkeit* der optimalen Farbe darstellen. Diese muß sich, wenn ihre Begriffsbestimmung nur überhaupt eindeutig sein soll, aus den gefundenen drei Koordinaten, die ja die Pigmentfarbe eindeutig definieren, eindeutig berechnen lassen. Aber die Ansichten, *wie* das zu geschehen hat, gehen heute noch weit auseinander. Einige halten die Helligkeit für eine lineare Funktion der Koordinaten mit konstanten Koeffizienten, den „spezifischen Helligkeiten" der Grundempfindungen; andere, darunter Helmholtz in seinen Abhandlungen über die Übertragung des Fechnerschen Gesetzes auf das Farbensystem, glauben, daß nicht einfache additive Verknüpfung vorliegt.

Die Frage nach der richtigen Fassung des Begriffes der heterochromen Helligkeit ist eine ungemein wichtige und von sehr viel größerer Tragweite als die vorliegende Untersuchung; ich werde demnächst in anderem Zusammenhang viel ausführlicher darauf eingehen. Für uns hier spielt sie aber offenbar nur eine Nebenrolle. Würde man die optimalen Lichtgemische des herzustellenden Farbtons in zunehmender Sättigung nach den gegebenen Vorschriften wirklich herstellen, so würde sich aus ihnen dasjenige sogleich herausfinden lassen, das der Forderung eben noch genügt, wofern diese überhaupt vernünftig gestellt und nicht eine bloße Verbalforderung ist.

Was nun *den zweiten Teil der auf S. 604 gestellten Frage* betrifft: *wie müssen die optimalen Pigmente, d. h. ihre Remissionsfunktionen, beschaffen sein?* — so wird sie durch unsere zwei-

1) Man beachte, daß in der Farbentafel, die wir für unsere Pigmente angelegt haben, nicht Sonnenweiß, sondern die Farbe der ideal remittierenden Fläche, also die Farbe des Beleuchtungslichtes im Schwerpunkt liegt. *Hier* ist natürlich mit „Weißpunkt" nicht dieser Schwerpunkt, sondern der Ort des Sonnenweiß gemeint.

dimensionale Pigmentmannigfaltigkeit natürlich durchaus nicht erschöpfend beantwortet. Alle ausgeschiedenen Duplikate sind ja gleichfalls optimal. Ein optimales Pigment braucht also durchaus nicht zweiwertig zu sein, es kann mehr als zwei Sprünge besitzen usw.

Die Unbestimmtheiten, die auftreten, haben alle ihren Grund in der Existenz dichromatischer und monochromatischer Bezirke im Spektrum; in diesen Bezirken ist die Remissionsfunktion unter Umständen in weitestem Maße willkürlich. Was da gestattet ist und was nicht, läßt sich aber an Hand unserer früheren Überlegungen in jedem Falle leicht übersehen und ich halte eine lückenlose Aufzählung aller möglichen Fälle für uninteressant und überflüssig. Die Frage ist immer die, ob sich der Remissionsfunktion durch geeignete Abänderung eine der ausgezeichneten Formen geben läßt oder nicht.

So wird beispielsweise ein Pigment, das vom kurzwelligen Ende bis zum Punkt $\overline{O}$ (Grenze des Orange), vollständig remittiert, optimal sein, wie immer auch seine Remission im langwelligen Teil verlaufen mag. Denn es läßt sich in ein Mittelfehlpigment verwandeln.

Dagegen sind bei Pigmenten, deren Remission auf das langwellige Ende bis zum Punkt O beschränkt ist, Abweichungen von der Zweiwertigkeit im dichromatischen Teil unzulässig, im monochromatischen nur dann zulässig, wenn der dichromatische vollständig remittiert. Sonst würde das Pigment bei der Verwandlung auf ein verbotenes Mittelpigment führen (s. oben S. 613 b).

Ganz entsprechendes gilt natürlich für die analogen Fälle am kurzwelligen Ende.

§ 4. Vergleich mit der Erfahrung.

Wilhelm Ostwald hat aus seinen umfangreichen Experimentaluntersuchungen über Pigmente rein empirisch die Folgerung gezogen, daß zur Erzielung größter *Farbenreinheit* bei einem Pigment möglichst nur die Remissionen Null und Eins, mit tunlichst schroffem Übergang, vorkommen sollen, ferner nur entweder *ein* geschlossenes Remissionsgebiet oder *ein* geschlossenes Absorptionsgebiet.[1])

1) W. Ostwald, Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., Abh. d. Math.-Phys. Kl. 34. Nr. 3. S. 471 ff. 1917; Phys. Zeitschr. 17. S. 328 ff. 1916.

Soweit trifft Ostwalds empirische Feststellung mit der von uns für optimale Pigmente theoretisch aufgestellten Bedingungen der Hauptsache nach völlig zusammen.

Ostwald fordert weiter zur Erzielung größter Reinheit, daß die Absorption bzw. die Remission genau ein „Farbenhalb" umfassen, d. h. genau von einer Spektralfarbe bis zu ihrer Komplementärfarbe reichen soll. Um für diese Forderung wenigstens ein qualitatives Verständnis zu gewinnen, erinnern wir daran, daß Ostwald unter *Reinheit* den *Bruchteil reiner Farbe* verstanden wissen will, der in dem Gesamteindruck, den das Gemisch hervorruft, enthalten sein soll und aus ihm begrifflich sich soll abtrennen lassen; zu diesem Bruchteil reiner Farbe treten dann noch gewisse Bruchteile *Weiß* und *Schwarz* als Verunreinigungen oder Trübungen.

Nun läßt sich nach Ostwald der Schwarzgehalt einer Farbe z. B. dadurch erhöhen, daß man sie auf dem Farbenkreisel mit einem ideal schwarzen, d. h. nicht remittierenden Pigment oder am sichersten mit einem schwarzen Loch mischt. Daraus läßt sich mit Rücksicht auf das Talbotsche Gesetz schließen, daß — wie immer man über die Natur des Schwarz als Empfindung urteilen mag — jedenfalls *das objektive Korrelat* dessen, was Ostwald den Schwarzgehalt nennt, *eine relativ geringe Lichtstärke* ist.

Nun ist klar, daß jene optimalen Pigmente, deren Remission auf einen allzu *kleinen* Teil des Spektrums beschränkt ist, sehr lichtschwach sein, d. h. nach Ostwald einen hohen Schwarzgehalt und aus diesem Grunde geringe Reinheit zeigen werden. — Anderseits werden Pigmente, deren Remission einen allzu *großen* Teil des Spektrums umfaßt, zwar sehr lichtstark sein, daher wenig Schwarz, dafür aber sehr viel Weiß enthalten — letzteres nach den bekannten allgemeinen Gesetzen der Lichtmischung. — Daß überhaupt die Ostwaldschen Pigmente größter Reinheit nur unter unseren optimalen zu suchen sind, folgt natürlich aus der Überlegung, daß ein Pigment geringerer Lichtstärke und gleicher Reizart gleichen Weißgehalt, aber höheren Schwarzgehalt besitzt, also geringere Reinheit.

Die Beschränkung des Remissionsgebietes auf das Gebiet zwischen zwei Komplementärfarben ist offenbar ein praktisch bewährtes Kompromiß zwischen der Scylla der weißlichen und

der Charybdis der schwärzlichen Trübung; oder in der, Helmholtz folgenden, mehr auf die objektive Beschaffenheit des Strahlengemisches gerichteten Ausdrucksform: ein Mittel zur Erzielung möglichst hoher Farbensättigung ohne allzu große Lichtverluste durch Absorption.

Wegen dieses Kompromißcharakters wäre zu erwarten, daß die Qualität der, den besten von Ostwald hergestellten Pigmentfarben noch anhaftenden Trübung, die eines mittleren Grau ist, aus nicht gar zu sehr verschiedenen Anteilen Weiß und Schwarz gemischt. Für einen Teil derselben trifft das nach Ostwalds Reinheitsbestimmungen (a. a. O. S. 560) recht angenähert zu. Für viele, namentlich für die blauen und grünen, ist allerdings der Schwarzanteil erheblich größer als der Weißanteil.

Ich kann übrigens nicht unterlassen, zu bemerken, daß ich die ganze Ostwaldsche Terminologie hier nur benutzt habe, um die von ihm gefundenen *Tatsachen* mit meinen theoretischen Ergebnissen einigermaßen vergleichen zu können; nicht als ob ich schon überzeugt wäre, daß den Begriffsbildungen, wie „Reinheit", „Schwarzgehalt", „Grau" dieselbe quantitative Bestimmtheit zukommt, wie etwa denen der Helmholtz-Königschen physiologischen Farbenmetrik. Bei aller Hochachtung vor Ostwalds wertvollen und mühsam erarbeiteten Erfolgen halte ich doch z. B. seine Absolutbestimmungen von „Reinheit" und „Grau" aus dem Werte der Remission an nur *zwei*, wenn auch ausgezeichneten Stellen des Spektrums (Maximum und Minimum), für nichts mehr als bestenfalls eine gute Faustregel, keineswegs geeignet zur exakten Definition dieser Begriffe.

Zusammenfassung.

1. Die größte Lichtstärke bei vorgegebener Reizart haben die Pigmente von folgender Beschaffenheit:

a) Sie besitzen an keiner Stelle des Spektrums einen anderen Remissionskoeffizienten als nur Null oder Eins.

b) Ihre Remission zeigt nur höchstens zwei Unstetigkeitsstellen („Sprünge" von 0 auf 1 oder von 1 auf 0) und ist nicht durchweg Null.

c) Beschränkt sich die Remission auf einen der beiden dichromatischen Spektralbezirke, einschließlich des angrenzenden monochromatischen, so reicht sie mindestens bis an das eine Ende dieses Gebietes.

d) Beschränkt sich die Remission auf die monochromatischen Bezirke, so umfaßt sie mindestens einen von beiden ganz.

e) Beschränkt sich die *Absorption* auf *einen* monochromatischen Bezirk, so beginnt sie am Spektralende.

2. Die beschriebenen Pigmente besitzen die angegebene Eigenschaft für jede beliebige Beleuchtung; d. h. bei einer ganz beliebigen Beleuchtung wird keines von ihnen an Lichtstärke übertroffen von irgendeinem Pigment, das mit ihm *bei eben dieser Beleuchtung* Licht von gleicher Reizart remittiert.

3. Weist das Beleuchtungslicht keine spektralen Lücken auf, so sind die Pigmente alle untereinander physiologisch verschieden und überdecken das reelle Farbensegment einschließlich der Berandung genau einfach.

4. Außer den unter 1. genannten Pigmenten gibt es noch andere lichtstärkste Vertreter ihrer Reizart. Diese Eigenschaft kommt beispielsweise *allen* jenen Pigmenten zu, deren *Absorption* auf *ein* mono- und dichromatisches Ende des Spektrums beschränkt ist, sie mag dort im übrigen ganz beliebig verlaufen. Überhaupt beziehen sich die erlaubten Abweichungen von den unter 1. aufgeführten Eigenschaften durchweg auf die mono- und dichromatischen Bezirke. Natürlich wird jedes solche abweichend beschaffene Pigment *einem* Pigment der erstgenannten Mannigfaltigkeit völlig gleichen — *welchem*, hängt allerdings im allgemeinen von der Beleuchtung ab.

5. Diese theoretischen Ergebnisse treffen mit einigen empirischen Feststellungen Wilhelm Ostwalds zusammen.

Wien, im Dezember 1919, II. physik. Inst. d. Universität.

(Eingegangen 22. Dezember 1919.)

4. *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel;* von *Reinhard Mecke.*

(Fortsetzung.)

II. Teil: Theoretische Untersuchungen (Beugungstheorie kleiner Kugellinsen).

(Marburger Inaugural-Dissertation 1919.)

Inhalt: § 1. Beugungserscheinungen an undurchsichtigen Kugeln. — § 2. Beugung und Interferenz an durchsichtigen Kugeln. — § 3. Berechnung der Phasenverschiebung δ und der Amplitude b. — § 4. Einfluß des an der Oberfläche vom Tropfen reflektierten Lichts auf die Beugungserscheinung. — § 5. Anwendung der Beugungsformel kleiner Kugellinsen zur Erklärung der Beugungserscheinungen im homogenen Nebel. — Zusammenfassung.

In der folgenden theoretischen Untersuchung soll nun eine Theorie gegeben werden, welche die im vorhergehenden experimentellen Teile[1]) gefundenen Kranzerscheinungen und ihre Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger Scheibchen erklärt.

Der Versuch einer solchen ist nämlich, soweit die Erscheinungen schon bekannt waren, meines Wissens noch nicht gemacht worden. Kiessling[2]) stellt zwar die Vermutung auf, daß außer eines geringen Anteils der Dispersion an der Farbenentwicklung neben der Lichtbeugung am Rande der Nebelkörperchen auch *Interferenz* im Innern derselben zur Entstehung der Farben beiträgt. Näheren Aufschluß darüber könnte aber erst eine experimentell zu prüfende analytische Behandlung des Problems gewähren. Und Barus[3]) findet, daß für die Färbung der Lichtquelle (axial colours) diese Erklärung durch einfache Interferenzfarben dünner Blättchen nicht genügt, da die Tropfen ungefähr sechsmal größer sind, als sie für

1) I. Teil vgl. Ann. d. Phys. **61**. S. 471—500. 1920.

2) Meteorol. Zeitschr. **1**. S. 117f. 1884; J. Kiessling, Die Dämmerungserscheinungen. Hamburg 1885. S. 141.

3) C. Barus, Sill. Journ. **25**. S. 224—226. 1908

Interferenzfarben in Betracht kommen. An der Hand der theoretischen Abhandlung von Verdet über lamellare Gittererscheinungen kommt er zu dem Schlusse, daß die Farben der Lichtquelle gleich denen dünner Blättchen sein könnten, deren Dicke $2r(n-1)$ beträgt.[1]) Eine Verallgemeinerung dieser Annahme für die Erklärung der Farbenfolge im *zentralen Felde* und in den *Kränzen* sei jedoch nicht ohne weiteres angängig, da man hier auf unüberwindbare Schwierigkeiten stoßen würde, insbesondere seien dies die zur Lichtquelle *komplementäre* Färbung des zentralen Feldes und seine satten Farbtöne.

§ 1. Beugungserscheinungen an undurchsichtigen Kugeln.

Zum besseren Verständnisse der nun folgenden Theorie muß ich jedoch zuerst noch einmal kurz die Gleichungen für die Beugung an undurchsichtigen kreisförmigen Scheibchen oder kleinen Kugeln ableiten, um so mehr als in den bisherigen Ableitungen meistens nur die Intensität der Erscheinung berücksichtigt worden ist, während die *Phasenänderung* der Lichterregung, auf die es bei Interferenzerscheinungen besonders ankommt, unerwähnt geblieben ist.

Deshalb muß ich auch von dem Huygensschen Prinzip in der strengeren mathematischen Fassung von Kirchhoff[2]) ausgehen, da nur dieses, entgegen der einfacheren Fresnelschen Fassung, die Phase richtig ergibt.

In den großen Entfernungen R_1 bzw. R_2 zwischen Lichtquelle und Beobachtungspunkt P befindet sich *ein* Tröpfchen mit dem Radius r. Gehorcht dann die Lichtausbreitung dem Gesetze

$$s = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda}\right), \tag{1}$$

so ist die Lichterregung im Beobachtungspunkte gegeben durch

$$s_P = \frac{a[\cos(nR_2) - \cos(nR_1)]}{2\lambda R_2}\int \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R_1 + R_2 + \delta}{\lambda}\right) d\sigma, \tag{2}$$

wo (nR_1) und (nR_2) die Richtungswinkel gegen die Normale der Beugungsebene bedeuten. Bei senkrecht zur Beugungs-

1) Diese Folgerung ist nach meiner Theorie nicht zutreffend. Vgl. S. 629 und 647.

2) G. Kirchhoff, Optik. S. 27; P. Drude, Lehrbuch der Optik. S. 170 und 175.

ebene einfallendem parallelen Lichte ist nun $\cos(n\,R_1) = 1$ und $\cos(n\,R_2) = -\cos\varphi$[1]), wenn man unter φ den Beugungswinkel versteht, somit

$$\cos(n\,R_2) - \cos(n\,R_1) = -2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,. \tag{2a}$$

Setze ich noch

$$\frac{t}{T} - \frac{R_1}{\lambda} = \frac{t'}{T},$$

was nur einer Verlegung des Zeitanfangspunktes gleichkommt, ferner zur Abkürzung

$$\begin{cases} \text{a)} \quad C = \int \cos\frac{2\pi}{\lambda}\,\delta\,d\sigma, \\ \text{b)} \quad S = \int \sin\frac{2\pi}{\lambda}\,\delta\,d\sigma, \end{cases} \tag{3}$$

so ist der Schwingungszustand im Punkte P gegeben durch

$$s_P = \frac{-\,a\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda R}\left[C\sin 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R}{\lambda}\right) - S\cos 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R}{\lambda}\right)\right]. \tag{4}$$

Die Lichtstärke ist

$$M = \left(\frac{-\,a\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda R}\right)^2 [C^2 + S^2]. \tag{5}$$

Nach Einführung von Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkt des Tropfens als Ursprung und nach der für kleine Tropfen erlaubten Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $\pi r^2/\lambda R$ führt die Lösung des Integrales (3a) für die untere Grenze r bekanntlich[2]) auf eine Besselsche Funktion erster Ordnung, welche sich in die konvergente unendliche Reihe

$$J_1(z) = \frac{z}{2}\left(1 - \frac{z^2}{2\cdot 4} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdots\right). \tag{6}$$

entwickeln läßt. Hier bedeutet

$$z = \frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi. \tag{7}$$

Die Funktion ist periodisch; Nullstellen sind vorhanden bei

$$z_1 = 1{,}22\,\pi, \quad z_2 = 2{,}233\,\pi, \quad z_3 = 3{,}238\,\pi \text{ usw.}$$

---

1) Richtungssinn der Normalen ist zu beachten!

2) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Optik S. 91ff. oder Verdet, Wellentheorie I, S. 203ff.

Maxima mit den rasch abnehmenden Funktionswerten

1 0,0175 0,00416 0,00160

liegen bei

$$z_0 = 0 \quad z_1 = 1{,}63\,\pi \quad z_2 = 2{,}65\,\pi \quad z_3 = 3{,}70\,\pi \text{ usw.}$$

Für die obere Grenze verschwindet der Wert für das Integral, ebenso ist das Integral (3b) Null, da $\sin 2\pi/\lambda\,\delta$ eine ungerade Funktion ist. Man erhält somit für die Lichterregung im Punkte P den Ausdruck

$$s_P = \frac{a\pi r^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda R}\left[\frac{2}{z} J_1(z)\right] \sin 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R}{\lambda}\right) \tag{8}$$

und für die Intensität das Amplitudenquadrat davon.

Die gebeugten Strahlen erleiden also neben einer erheblichen, periodisch schwankenden Schwächung ihrer Lichtstärke noch eine *Phasenverschiebung* von $\pi/2$ gegenüber der ungehinderten Fortpflanzung.

Für die Verallgemeinerung der Formeln auf eine große Anzahl unregelmäßig verteilter Tröpfchen kann ich auf die Lehrbücher[1]) verweisen. Durch Einführung von neuen Koordinaten in bezug auf ein in der Beugungsebene beliebig gelegenes Koordinatensystem und Summierung über die vorhandene Anzahl von Tröpfchen findet man, daß die Intensität proportional dieser Anzahl wächst. Allerdings liegen beim Nebel die Tropfen nicht alle in einer Ebene und die Summierung ist auch über die Tiefendimension zu erstrecken, doch wird bei nicht zu großer Dichte des Nebels hierdurch das Resultat[2]) nicht geändert. Für die Lichtquelle selbst, wo ja auch das Babinetsche Theorem von der Gleichheit der Erscheinung komplementärer Beugungsschirme versagt, gilt dieses Gesetz nicht. Eine Berechnung der Intensität ist hier aber sehr erschwert und würde auch an dieser Stelle zu weit führen, da diese Überlegungen nur für die ev. Erklärung der Färbung der Lichtquelle selbst (axial colours) in Betracht kommen, worauf aber nicht näher eingegangen werden soll

1) P. Drude, Lehrbuch d. Optik, S. 206; G. Kirchhoff, Optik, S. 98ff.; Verdet, Wellentheorie, S. 200 u. 210.

2) Der Beweis wird ganz analog wie bei einer Beugungsebene durchgeführt.

(vgl. S. 629 u. 647). Im allgemeinen muß sie sich für diesen zentralen Fleck in die zu (16) analoge Form

$$M_0' = a^2 + n_1 a^2 \left(\frac{\pi r^2}{\lambda R}\right)^2 \tag{9}$$

bringen lassen, wobei n_1 mit wachsender Dicke und Dichte der Nebelschicht abnehmen und sogar bei sehr großer Anzahl der vorhandenen Nebeltröpfchen infolge der damit verbundenen Intensitätsabnahme erhebliche negative Werte annehmen muß. Die Beugungserscheinung besteht im monochromatischen Lichte also aus einem hellen Fleck in der Mitte von der Intensität M_0 umgeben von konzentrischen Ringen, deren Lage und relative Helligkeit (8) ergibt. Im weißen Lichte setzt sich die Erscheinung aus farbigen Ringen zusammen, welche in einer bestimmten Anordnung aufeinander folgen, und zwar ist diese Reihenfolge *unabhängig von der Tropfengröße*. Für das zentrale Feld, d. h. für den dem hellen zentralen Fleck sich unmittelbar anschließenden Teil des inneren Beugungsbildes, muß dieser Farbenton infolge der geringen Abhängigkeit[1]) von der Wellenlänge nahezu weiß mit einem *bläulichen* Tone sein, alles in Übereinstimmung mit den Beobachtungen bei den Kränzen um Sonne und Mond[2]) und den Versuchen an undurchsichtigen oder nur durchscheinenden, d. h. diffuses Licht durchlassenden Teilchen von beliebiger Größe. Nur bei Nebeltröpfchen von etwa $1-5\,\mu$ Radius zeigen sich gefärbte zentrale Felder und Abweichungen in der Farbenfolge, die abhängig sind von der Tropfengröße und dem Brechungsexponenten. Die *Durchsichtigkeit* muß also einen Einfluß auf die Beugungserscheinung haben, den ich nun untersuchen will.

§ 2. Beugung und Interferenz an durchsichtigen Kugeln.

Die Tropfen des Nebels wirken nämlich als Kugellinsen, welche das auffallende Licht durch zweimalige Brechung ablenken und stark divergent machen. Infolge der dadurch bedingten großen Abnahme der Lichtstärke wurde ein Einfluß der den Tropfen durchsetzenden Strahlen auf die Beugungserscheinung

1) Die Intensität ist nahezu durch den Ausdruck $1/\lambda^2$ gegeben, da dort $2/z\, I_1(z) \sim 1$ ist, so daß blaue Töne eine größere Intensität haben als die roten.

2) Vgl. J. Pernter, Meteorol. Optik, S. 406—413.

oft abgesprochen.[1]) Dies scheint nun bei großen Tropfen wirklich der Fall zu sein; bei Tropfen, deren Radius nur ein geringes Vielfache der Wellenlänge ist, dürfte die Helligkeit jedoch noch hinreichend sein, um jene großen Veränderungen der Erscheinungen hervorzurufen. Da das Licht beim Durchgange durch den Tropfen eine Gangverzögerung erfährt, und die Strahlen kohärent, also interferenzfähig, sind, so muß es sich um eine Interferenzerscheinung der den Tropfen durchsetzenden Strahlen mit den gebeugten handeln.[2])

Die Lichterregung aber, welche von den durch einen Tropfen gegangenen Strahlen im Punkte P hervorgerufen wird, läßt sich stets in die Form

$$s = b \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda}\right) - \delta\right] \tag{10}$$

bringen, während die der gebeugten Strahlen durch (8) gegeben war. Hierbei sind b und δ zunächst noch unbestimmt, ihre Berechnung erfolgt erst im nächsten Paragraphen. Um die Gleichungen jedoch übersichtlicher zu gestalten, führe ich vorher folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} A = \dfrac{a\pi r^2}{R}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}, \\ K = \dfrac{b}{A} = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{R}{\pi r^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}, \\ J = \dfrac{2}{z}J_1(z). \end{cases} \tag{11}$$

Nach dem Prinzip der Superposition der Lichterregungen folgt dann analog zu (3) und (4) aus (11) und (10)

$$\begin{cases} C = \dfrac{J}{\lambda} + K\sin\delta, \\ S = K\cos\delta \end{cases} \tag{12}$$

und die Intensität entsprechend zu (5).

Bei einer Vermehrung der Tropfen wächst auch hier die Helligkeit proportional ihrer Anzahl. Für die *axialen* Strahlen),

---

1) Vgl. J. Pernter, Meteorol. Optik S. 434.

2) Vgl. eine Bemerkung von R. v. Helmholtz in Ann. d. Phys. 27, S. 503—543. 1886.

bei denen noch *ungebeugtes* Licht interferieren kann, kommt außerdem der Anteil

$$+ n_2 \cdot 2ab\cos\delta$$

mit einer gewissen Stärke n_2 hinzu, welche von der Dicke der Nebelschicht abhängt. Die Intensitätsgleichung für diesen Teil der Erscheinung läßt sich dann in der Form

$$(13) \qquad \begin{cases} M_0 = a^2 + n_1 A^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2K}{\lambda}\sin\delta + K^2\right] \\ \qquad\qquad + 2n_2 ab\cos\delta \end{cases}$$

schreiben, wobei n_1 wieder sinken muß, n_2 aber mit wachsender Dichte und Dicke des Nebels zunimmt. Eine Berechnung der Größenverhältnisse von n_1 und n_2 zueinander ist jedoch ohne weiteres nicht durchführbar, da hier die Vorgänge noch komplizierterer Art sind als bei undurchsichtigen Scheibchen.

§ 3. Berechnung der Phasenverschiebung δ und der Amplitude b.

Den Strahlengang des Lichtes durch den Tropfen zeigt nun Fig. 1. Bedeutet α der Einfallswinkel, β der Brechungs-

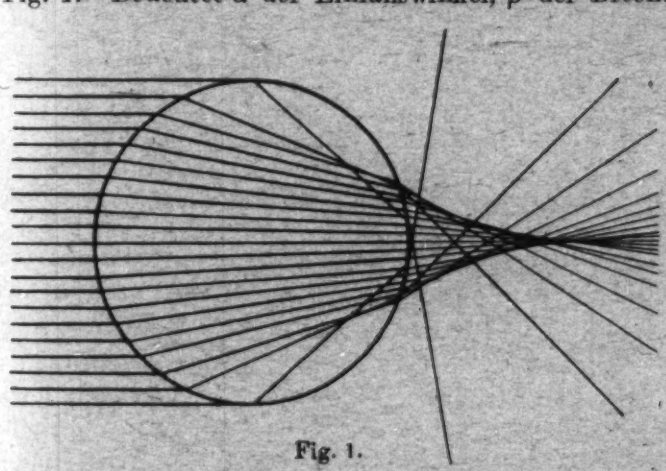


Fig. 1.

winkel, so beträgt die Ablenkung des aus dem Tropfen austretenden Strahles

$$(14) \qquad \varphi = 2(\alpha - \beta)$$

oder nach dem Brechungsgesetz $\sin\alpha/\sin\beta = n$ bei kleinen Winkeln angenähert

$$(14a) \qquad \varphi = 2\alpha\frac{n-1}{n}.$$

Für Wasser mit einem mittleren Brechungsexponenten von 4/3 wäre φ ungefähr die Hälfte des Einfallswinkels.

Da der Strahl ein optisch dichteres Medium durchsetzt, so erfährt er zur gleichen Zeit eine Gangverzögerung, deren Größe durch die Differenz $CABD - EOF$ (Fig. 2) gegeben

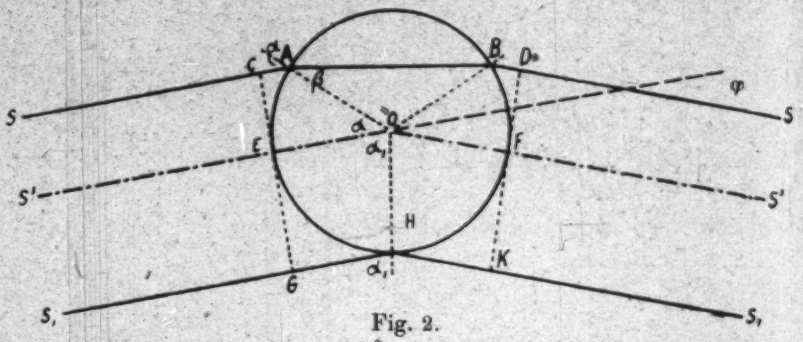


Fig. 2.

ist, wobei aber unter $CABD$ die optische Länge zu verstehen ist. Aus der Figur läßt sich dieser Wegunterschied leicht berechnen zu

$$\Delta = 2r(n\cos\beta - \cos\alpha), \tag{15}$$

so daß zunächst einmal eine Phasenverschiebung von

$$\delta_1 = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi r}{\lambda}(n\cos\beta - \cos\alpha) \tag{15a}$$

auftritt. Eine weitere Phasenänderung könnte durch eventuelle Beugung entstehen. Beugung des durch eine Linse gegangenen Lichtes findet aber nur in der Nähe ihres Brennpunktes statt, d. h. längs der Brennlinie.[1]) Im Beobachtungspunkte, der sich stets in großer Entfernung vom Brennpunkte befindet, kann eine solche Phasenänderung nie eintreten. Es muß aber die Tatsache berücksichtigt werden, daß die Schwingung in der Wellenfläche nach Durchgang durch einen Brennpunkt sich umkehrt, d. h. um eine halbe Periode beschleunigt schwingt. Diese Phasenanomalie, welche experimentell von Gouy[2]), Zeemann und Sagnac[3]) aus der Umkehr von Interferenz-

1) Verdet, Wellentheorie I. S. 98.
2) Gouy, Compt. rend. **110.** S. 1251—1253. 1890.
3) Sagnac, Journ. d. Phys. **2.** S. 721—722. 1903.

erscheinungen geschlossen wurde, ist von Debye[1]) und F. Reiche[2]) theoretisch begründet worden. Reiche zeigt, daß sie in großer Entfernung vor und hinter dem Brennpunkte 0 bzw. π beträgt. In seiner Nähe führt sie, eben infolge von Beugung, Schwankungen aus; im Brennpunkte selbst hat die Phasenanomalie den Wert $\pi/2$, dort haben wir es dann mit einem besonderen Falle von Fraunhoferschen Beugungserscheinungen[3]) zu tun.

Die gesamte Phasenänderung in (18) beträgt somit

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta + \pi . \tag{16}$$

Zur Berechnung der Amplitude b schlage ich ein von F. Richarz[4]) und von Roth[5]) benutztes Verfahren ein, das gestattet, die Intensität des den Tropfen durchsetzenden Lichtes zu berechnen. Diese Intensität, welche durch b^2 gegeben ist, ist proportional dem Quadrate der Amplitude des einfallenden Lichts und umgekehrt proportional der Divergenz, d. h. proportional der in die Raumwinkeleinheit gestrahlten Lichtmenge. Die Amplitude erfährt durch zweimalige Brechung nach den Fresnelschen Reflexionsformeln eine Abnahme, deren Komponente senkrecht zur Einfallsebene

$$a_s = a \frac{4\left(n \cos\frac{\varphi}{2} - 1\right)^2}{(n^2-1)^2} \tag{17}$$

und parallel dazu

$$a_p = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} a_s$$

beträgt. Aus dem Mittelwert dieser Intensitäten folgt für nicht zu große Winkel (bis ca. $\varphi = 30^0$) genähert

$$a' = \varepsilon a = a\left(\frac{2}{n+1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n-1} \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) . \tag{18}$$

Die Divergenz des Lichtes ist nun proportional der Fläche, auf der sich eine gegebene Lichtmenge ausbreitet. Eine solche

---

1) Debye, Ann. d. Phys. **30.** S. 755ff. 1909.
2) F. Reiche, Ann. d. Phys. **29.** S. 65—93 u. 401—440. 1909.
3) Vgl. E. Lommel, Abhdl. d. Bayr. Akad. **15.** S. 257. 1886.
4) F. Richarz, Deutsche Meteorol. Ztschr. S. 23. 1908.
5) F. Roth, Deutsche Meteorol. Ztschr. **2.** S. 52. 1885.

kleine Lichtmenge (Fig. 3) des parallelen Strahlenbündels von der Intensität a^2 sei, bevor es zum Tropfen gelangt, auf dem ringförmigen Querschnitt $df = 2\pi\varrho\, d\varrho$ verteilt. Nach dem Durchgang durch den Tropfen erstreckt sich dieselbe Menge,

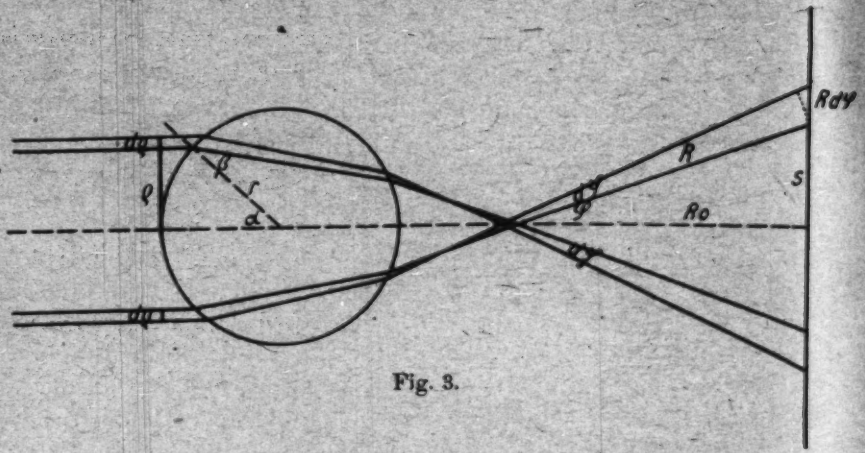


Fig. 3.

welche jetzt aber nach der Brechung eine Abnahme ihrer Helligkeit gemäß (18) auf a'^2 erfahren hat, über die Fläche $dF = 2\pi s \cdot R\, d\varphi$ des Raumwinkels $2\pi \sin\varphi\, d\varphi$. Die Lichtintensität im Beobachtungspunkte ist also:

$$b^2 = a'^2 \frac{df}{dF} = \varepsilon^2 a^2 \frac{\varrho\, d\varrho}{R s\, d\varphi}. \tag{19}$$

Nun bestehen folgende Beziehungen zum Einfalls- und Ablenkungswinkel:

$$\varrho = r \sin\alpha \qquad d\varrho = r\cos\alpha\, d\alpha \qquad s = R\sin\varphi. \tag{20}$$

Streng genommen müßte R zwar vom Schnittpunkte der Strahlen φ und $\varphi + d\varphi$ ausgerechnet werden, bei der Kleinheit des Tropfens kann dies aber von seinem Mittelpunkt aus geschehen.

Nach Einführung dieser Werte in (19) und einigen Umformungen unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes ergibt sich schließlich für die Größe K nach (11) der Wert

$$K = \frac{\varepsilon \cdot n}{A \cdot \pi \cos^2\frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\frac{\varphi}{2}}}, \tag{21}$$

für $\varphi = 0$ strebt K dem Grenzwerte

$$K_0 = \frac{2}{(n+1)^2(n-1)} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{zu.} \tag{22}$$

Um später die Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen, ist es angebracht, gleich hier die numerischen Werte von Δ und K anschließen zu lassen, die die Tab. 1 für Wasser mit dem mittleren Brechungsexponenten 1,3333 bei verschiedenen Einfallswinkeln wiedergibt. Spalte 3 und 4 enthalten die Zunahme von Δ gegenüber $\Delta_0 = r \cdot 2\,(n-1) = 0{,}666 \cdot r$ (für $\varphi = 0$) im absoluten und im Winkelmaß.

Diese Zunahme ist besonders bei größeren Tropfenradien beträchtlich und strebt für $\alpha = 90^0$ dem maximalen Werte von $2\sqrt{n^2-1} = 1{,}7638$ zu.

Tabelle 1.

α	φ	$\Delta - \Delta_0$	$180 \cdot (\Delta - \Delta_0)$	ε :	$\frac{n}{\Delta}\sqrt{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\varphi/2}}$	K
0°	0°			0,735	2,000 · 1/r	0,468 · 1/r
5°	2° 30′	0,0020 · r	0,36° · r	0,733	1,989	0,465
10°	5° 2′	0,0074	1,33°	0,730	1,956	0,456
15°	7° 37′	0,0178	3,20°	0,725	1,897	0,440
20°	10° 16′	0,0316	5,69°	0,713	1,822	0,418
30°	15° 57′	0,0734	13,21°	0,686	1,623	0,362
40°	22° 22′	0,1376	24,77°	0,639	1,376	0,291
50°	29° 52′	0,2302	41,44°	0,568	1,101	0,214
60°	39°	0,3610	64,98°	0,463	0,822	0,136

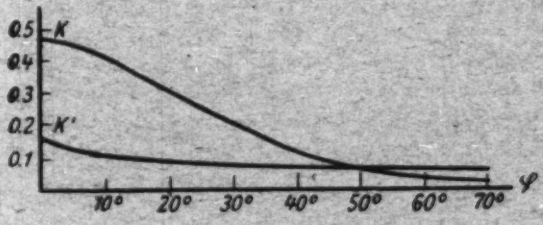


Fig. 4.

Die infolge der stärkeren Schwächung der Amplitude und des Anwachsens der Divergenz bedingte Abnahme von K ist bei kleinen Winkeln zuerst gering, um dann aber ziemlich beträchtlich zu werden. Die Kurve K in Fig. 4 bringt die Verhältnisse noch besser zum Ausdruck. Infolge der Dispersion des Lichtes beim Durchgang durch den Tropfen besteht auch noch eine geringe Abhängigkeit von Δ und K von der Wellenlänge, welche Tab. 2 für 4 verschiedene Fraunhofersche Linien zeigt.

Tabelle 2.

L	λ	n	Δ_0'	$180(\Delta_0' - \Delta_0)$	K_0
B	0,687 μ	1,3306	$0{,}6612 \cdot r$	$-0{,}10 \cdot r$	$0{,}473 \cdot 1/r$
D	0,589	1,3332	0,6664	−0,04	0,468
E	0,527	1,3354	0,6708	+0,07	0,464
G	0,431	1,3406	0,6812	+0,26	0,453

Doch sind die Abweichungen vom Mittelwerte nicht erheblich. Ein Vergleich der Konstanten Δ_0 und K_0 ($\varphi = 0$) mit denen der andern im experimentellen Teile benutzten Flüssigkeiten gibt die folgende Tabelle.

Tabelle 3.

	n	Δ_0	Δ/Δ_w	K_0	K/K_w
Wasser	1,333	$0{,}666\ r$	1,0	$0{,}468\ 1/r$	1,0
Äther	1,354	0,708	1,062	0,439	0,937
Alkohol	1,362	0,725	1,087	0,428	0,915
Chloroform	1,446	0,892	1,338	0,345	0,737
Toluol	1,499	0,998	1,497	0,306	0,653
Benzol	1,504	1,008	1,512	0,302	0,646
Anilin	1,586	1,172	1,758	0,258	0,550

Die erhebliche Zunahme von Δ_0 bzw. Abnahme von K_0 bei Flüssigkeiten mit hohem Brechungsexponenten (z. B. Anilin) kommt besonders deutlich bei den zu Wasser relativen Werten der 3. und 5. Spalte zum Ausdruck.

§ 4. Einfluß des an der Oberfläche vom Tropfen reflektierten Lichtes auf die Beugungserscheinung.

Es ist jetzt die Frage zu untersuchen, ob noch andere Strahlen vorhanden sind, welche mit dem gebeugten Lichte merkbare Interferenzerscheinungen hervorzurufen vermögen. Von dem einfallenden Lichte durchsetzt nämlich nur ein Teil den Tropfen mit zweimaliger Brechung. Das übrige Licht wird teils an der Oberfläche gleich, teils aber auch mehrmals innen reflektiert, um dann erst den Tropfen zu verlassen. Innere Reflexionen kommen nun für Interferenzen mit gebeugtem Licht nicht in Betracht. Der einmal innen zurückgeworfene Strahl tritt auf der Rückseite des Tropfens aus und gelangt somit nicht in das Auge des Beobachters; bei mehrmaligen inneren Reflexionen ist aber der Gangunterschied zu groß und die Intensität zu gering geworden, um noch

einen merklichen Einfluß auf die Gesamterscheinung ausüben zu können. So sind bereits schon bei dem zweimal reflektierten Strahl für Wasser und $\varphi = 0$, die Werte $\Delta = 2r(3n-1) = 9\Delta_\omega$ und $K = 0{,}004\,K_\omega$, und noch ungünstiger ist es bei drei inneren Reflexionen. Besser liegen die Verhältnisse aber bei dem an der Oberfläche reflektierten Lichte, da hier die streifend, d. h. unter einem Einfallswinkel von nahezu 90° auffallenden Strahlen so kleine Ablenkungswinkel und Phasenänderungen erleiden, daß sie sichtliche Interferenzen hervorrufen können; auch ist die Intensität eine bedeutend größere als bei den inneren Reflexionen, allerdings reicht sie nicht an die Helligkeit des durchgehenden Lichtes heran.

Aus Fig. 2 ist leicht ersichtlich, daß hier die Wegdifferenz $GHK - EOF$ gleich

$$\Delta_1 = -2r\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{23}$$

also negativ ist. Zwischen Einfallswinkel und Beugungswinkel besteht noch die Beziehung

$$\varphi = \pi - 2\alpha_1, \tag{24}$$

woraus dann bei kleinen Winkeln angenähert

$$-\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda} = z \quad \text{folgt.} \tag{23a}$$

Für die Berechnung der Amplitude des reflektierten Lichtes gelten dieselben Überlegungen wie bei den durch den Tropfen gehenden Strahlen. Das einfallende Licht erleidet durch Reflexion die Schwächung

$$a''^2 = (-\varepsilon_1 a)^2 = (-a)^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos\left(\beta_1+\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\beta_1-\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cotg}\left(\beta_1+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{cotg}\left(\beta_1-\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^2\right]. \tag{25}$$

Da nun

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \tag{26}$$

und der Einfallswinkel negativ zu nehmen ist, so erhält man für die Amplitude c des reflektierten Strahles mit Rücksicht auf (26) aus (19) den genauen Wert

$$c = -\frac{\varepsilon_1 a}{2}\,\frac{r}{R}. \tag{27}$$

Hieraus geht hervor, daß die Divergenz des Lichtes stets konstant[1]) ist, daß es also, abgesehen von der Abnahme seiner Amplitude a, überallhin gleich stark reflektiert wird. Ich führe nun wieder die zu (11) analoge Abkürzung

$$K_1 = x K = \frac{\varepsilon_1}{2\pi r \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \tag{28}$$

ein, wobei mir x^2 das Verhältnis der Intensitäten vom reflektierten und durchgegangenen Lichte anzeigt. Die folgende Tabelle enthält dann wieder für dieselben Beugungswinkel der Tab. 1 die entsprechenden Werte von Δ_1, ε_1, K_1 und x. Fig. 4 zeigt in einer Kurve K' die Abnahme von K_1 graphisch.

Tabelle 4.

φ	Δ_1	$180 \cdot \Delta_1$	ε_1	K_1	x
0°	0,0	0,0	1,000	0,159 1/r	0,340
2° 30′	0,0437 · r	7,87° · r	0,934	0,149	0,320
5° 2′	0,0878	15,80°	0,872	0,139	0,305
7° 37′	0,1332	23,98°	0,814	0,130	0,296
10° 16	0,1790	32,22°	0,759	0,122	0,291
15° 57′	0,2776	49,97°	0,654	0,106	0,294
22° 22	0,3880	69,84°	0,556	0,092	0,316
29° 52′	0,5154	92,77°	0,463	0,079	0,369
39°	0,6676	120,17°	0,374	0,067	0,490

Ein Vergleich mit Substanzen von anderen Brechungsexponenten erübrigt sich, da nur ε_1 von n abhängig ist. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, beträgt der Wert von x im Durchschnitt $^1/_3$; daß aber die Intensitäten des reflektierten und des durchgehenden Lichts nicht, wie sonst angenommen wird, unerheblich sind, zeigt folgende Überlegung: Senkrecht zur Richtung des Strahlenbündels können nur die an der Oberfläche der Tropfen reflektierten Strahlen ins Auge des Beobachters gelangen. Dieses Licht, welches bei den Versuchen sehr deutlich bemerkbar ist, besitzt nun eine Intensität von $c^2 = 0{,}007\,(r/R)^2$, d. h. also nur 0,027 der Intensität des reflektierten bzw. 0,0031 des durchgegangenen Lichts für $\varphi = 0$. Wenn man die Blickrichtung von $\varphi = 90°$ bis $\varphi = 0$ ändert, kann man auch deutlich die beträchtliche Helligkeitszunahme beobachten.

Zu dem gebeugten und dem durch den Tropfen gegangenen Strahle, welche durch die Gleichungen (8) und (10) gegeben

1) Vgl. F. Richarz, Meteorol. Ztschr. **25**. S. 23. 1908.

sind, kommt nun also als dritter und letzter Strahl, der Interferenz hervorrufen könnte, der an der Oberfläche reflektierte hinzu. Sein Schwingungszustand im Punkte P ist durch

$$s_2 = -\frac{e_1 a}{2}\,\frac{r}{R}\cos 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R - \Delta_1}{\lambda}\right) \tag{29}$$

darstellbar, wo Amplitude und Phase sich aus (27) bzw. (23) berechnen lassen. Da der Strahl den Brennpunkt, welcher auf der Rückseite des Tropfens liegt, nicht passiert, so findet hier keine Phasenverschiebung um π statt. Aber bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium wird nach den Fresnelschen Reflexionsformeln die Amplitude, wie in (25) ersichtlich, negativ. Mit Rücksicht auf (16), (21) und (23), (28) erhält jetzt Gleichung (12) das Aussehen

$$\begin{cases} C = \dfrac{J}{\lambda} - K\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta + K_1\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta_1\,, \\ S = -K\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta - K_1\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta_1 \end{cases} \tag{30}$$

und die Intensitätsgleichung erweitert sich dann auf die komplizierte Form

$$\begin{cases} M_1 = A^2\Big|\dfrac{J^2}{\lambda^2} - \dfrac{2JK}{\lambda}\left(\sin\dfrac{2\pi\Delta}{\lambda} - x\sin\dfrac{2\pi\Delta_1}{\lambda}\right) \\ \qquad + K^2\left(1 + 2x\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}(\Delta + \Delta_1) + x^2\right)\Big|\,. \end{cases} \tag{31}$$

Selbstverständlich wächst auch hier die Intensität proportional der Anzahl der unregelmäßig verteilten Tropfen. Für die axialen Strahlen kann die Reflexion nicht in Betracht kommen und es bleibt die frühere Gleichung (13) unverändert bestehen.

§ 5. Anwendung der Beugungsformel kleiner Kugellinsen zur Erklärung der Beugungserscheinungen im homogenen Nebel.

In dem vorigen Paragraphen habe ich also bis jetzt gezeigt, daß an Stelle der Beugungsformeln kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen (8), (9) für kleine Kugellinsen die dort abgeleiteten Gleichungen (31) und (13) zu setzen sind. Ist nun diese Theorie auch imstande, die im experimentellen Teil[1]) nachgewiesenen eigenartigen Beugungserscheinungen des homogenen Nebels zu erklären? Nach Bejahung dieser Frage, und

1) Ann. d. Phys. **61.** S. 471–500. 1920.

zwar sowohl für monochromatisches als auch für weißes Licht, wird es noch von Wichtigkeit sein, zu wissen, inwieweit die aufgestellten Gleichungen eine Bestimmung der Tropfengröße zulassen.

a) Monochromatisches Licht.

Die Intensität in einem beliebigen Punkte des Beugungsbildes hängt nun von dem Tropfenradius, von der Wellenlänge und vom Beugungswinkel ab. An Stelle von φ ist es jedoch oft zweckmäßiger $z = 2\pi r/\lambda \sin\varphi$ zu setzen, außerdem treten r und λ nur in der Verbindung r/λ auf, so daß die Helligkeitsverteilung des Beugungsbildes im Grunde genommen eine Funktion der beiden unabhängigen Variabeln[1]) z und r/λ ist. Die Lage der Maxima und Minima im monochromatischen Licht würde sich aus dem ersten Differentialquotienten von (31) nach φ berechnen. Da aber die direkte Auswertung dieser Gleichung praktisch wohl unmöglich sein dürfte, so blieb mir zu ihrer Bestimmung nur die graphische Methode übrig. Zur Darstellung brachte ich vorläufig auch nur den Intensitätsverlauf des Beugungsbildes im Natriumlicht ($\lambda = 0{,}589\,\mu$) für die Tropfenradien $2\,\mu$, $2{,}25\,\mu$ und $2{,}5\,\mu$; der Wert der Variablen r/λ betrug also stets 3,39 bzw. 3,82 und 4,25. Die Werte von I und I^2 wurden der der Lommelschen Abhandlung[2]) beigefügten, ausführlichen Tabelle Besselscher Funktionen entnommen, zur Bestimmung aller anderen Größen dienten die diesbezüglichen (erweiterten) Tabellen dieser Arbeit. Außer für die Winkelwerte von $2\pi\,\Delta/\lambda$, welche logarithmisch berechnet wurden, genügte für die Rechnungen ein Rechenschieber; ihre Genauigkeit und Richtigkeit wurde außerdem noch durch den stetigen Verlauf der Kurven erwiesen. Auf diese Weise entstanden aus ungefähr je 30 Punkten die in Fig. 5 dargestellten Intensitätskurven, denen gleichzeitig die Kurve für undurchsichtige Tropfen beigefügt worden ist. Der Unterschied ist erheblich und in die Augen fallend. Während für letztere die Minima stets bei $z = 3{,}83$ und 7,01 liegen, verschieben sie sich bei einem Tropfenradius von $2\,\mu$ nach $z = 3{,}35$ und $z = 6{,}50$, was Beugungswinkeln von 9^0 und $17^0\,42'$ entsprechen würde. Die Maxima sind stark ausgeprägt und haben eine bedeutend

1) Abgesehen von der geringen Veränderlichkeit des Brechungsexponenten mit der Wellenlänge.

2) E. Lommel, Abhdlg. d. Bayr. Akad. 15. S. 224—328. 1886.

größere Helligkeit als bei undurchsichtigen Tropfen. Sehr charakteristisch ist nun der Intensitätsverlauf beim Tropfenradius 2,25 μ. Hier wird nämlich gerade die in den Versuchen so auffallende Erscheinung, daß die beiden ersten Minima

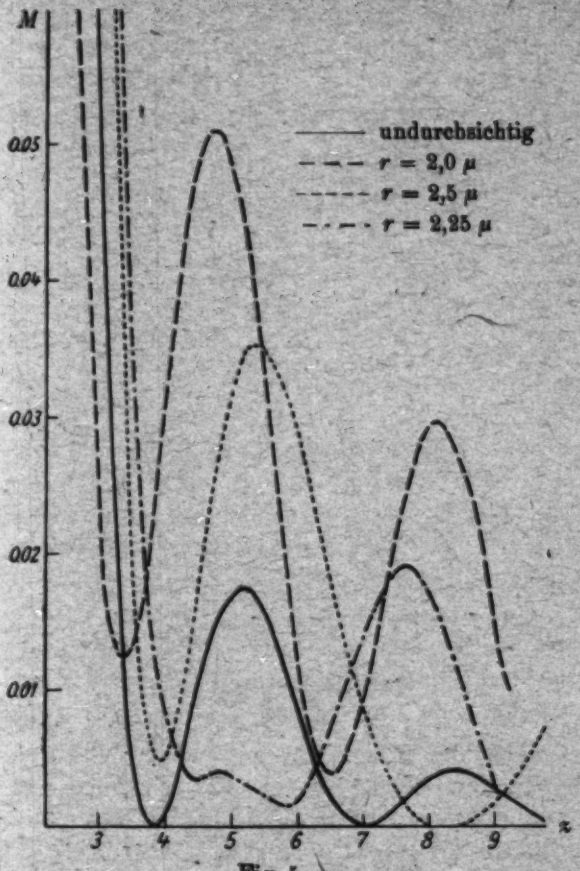


Fig. 5.

sich unter Umständen zu einem breiten, dunklen Ring vereinigen können, durch eine aus der *Theorie* folgende Kurve dargestellt. In Fig. 5 zeigt das bei $z = 4{,}8$ liegende, sehr kleine Maximum, daß das sehr breite Minimum zwischen $z = 4$ und $z = 6$ wirklich aus 2 Minima bei $z = 4{,}6$ und $z = 5{,}9$ besteht, die sich nahezu vereinigt haben. Für den Radius 2,5 μ ergeben sich die Minima bei $z = 3{,}90$ und 8,1, gleichbedeutend mit den Winkeln 8° 22′ und 17° 36′. Besonders bemerkenswert ist hier noch die beträchtliche Abweichung des zweiten Minimums

von der normalen Lage und seine Breite, während der erste dunkle Ring ziemlich schmal bleibt. Da ferner auch die Helligkeit der Minima Schwankungen unterworfen ist, so beweisen die obigen Beispiele wohl schon zur Genüge, daß die Beugungstheorie kleiner Kugellinsen imstande ist, das mannigfaltige, in § 3[1]) beschriebene Aussehen in allen Einzelheiten zu erklären. Auch der Beobachtungskurve (Fig. 2)[1]) passen sich die Werte der beiden ersten Minima von $2\,\mu$ und $2{,}5\,\mu$, d. h. 9° und 17° 42′ bzw. 8° 22′ und 17° 36′, nebst der im folgenden Paragraphen berechneten Färbung[2]) des zentralen Feldes in den Punkten C und D ziemlich gut an. Infolge der entgegengesetzten Abweichung der Minima liegen die Werte dicht beisammen, so daß das Aussehen des Beugungsbildes fast nur durch die etwas verschiedene Breite der Ringe charakterisiert wäre. Nach dieser Beobachtungskurve müßten sich dann auch für einen ziemlich in der Mitte zwischen $2\,\mu$ und $2{,}5\,\mu$ liegenden Tropfenradius die beiden Minima vereinigen, was für $2{,}25\,\mu$ ja tatsächlich erfüllt ist, also auch hier Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie. Berechnet man nun für jede einzelne Tropfengröße die dazugehörende Intensitätsverteilung, so muß sich schließlich eine der Beobachtung (Fig. 2)[1]) entsprechende Kurve ergeben. Man erkennt deutlich, daß die Abweichungen immer geringer werden müssen, da K so lange umgekehrt proportional dem Radius abnimmt und der Gangunterschied mit größer werdenden Tropfen wächst, bis schließlich die diesbezüglichen Glieder in (31) vernachlässigt werden können und — nach den Beobachtungen von etwa $5\,\mu$ ab — nur noch das normale Beugungsbild I^2/λ^2 übrig bleibt. (Beschleunigt könnte dieser Vorgang noch durch eine gewisse Inhomogenität des Nebels und durch die Ausdehnung der Lichtquelle werden.) Aus diesen Gründen mußten dann auch Versuche, welche ich an dünn ausgezogenen Glasfäden anstellte, fehlschlagen, denn diese besaßen schon einen Radius von mindestens $30\,\mu$, auch war der Brechungsexponent[3]) ein größerer als bei Wasser.

1) A. a. O. S. 493.

2) Da die Werte 3,39 und 4,25 von r/λ der Berechnung zugrunde liegen, so sind bei der Beobachtung im *roten* Licht ($\lambda = 0{,}65\ \mu$) die Tropfen, welche diesen Beugungsbildern entsprechen würden, tatsächlich größer, nämlich $2{,}2\ \mu$ bzw. $2{,}76\ \mu$. Für $r = 2{,}2\ \mu$ ist das zentrale Feld grünlichgelb gefärbt (vgl. Fig. 7).

3) Vgl. unten.

Ferner ist ersichtlich, daß im monochromatischen Licht Tropfengrößen $< 5\ \mu$ nicht ohne weiteres berechnet werden können, denn jedem Tropfenradius entspricht ja ein gänzlich anderer und deshalb unbekannter Wert der für die Berechnung erforderlichen Größe z; es kann sogar, wie obiges Beispiel andeutet, in der Nähe der Spitzen A und B (Fig. 2)[1]) der Fall eintreten, daß zwei verschiedene Tropfenradien fast genau dieselben Beugungsbilder in bezug auf den Ringdurchmesser der Minima haben, da die beiden Äste der Kurve fast zusammenfallen, besonders bei B.

b) Weißes Licht.

Im weißen Licht beschränkte ich mich auf die Berechnung des Farbentones im zentralen Feld, da nach den Beobachtungen nur für dieses (im Gegensatz zu den komplizierteren Gesetzmäßigkeiten in den Ringen) ein regelmäßiger Farbenwechsel besteht. Diese Berechnung kann bekanntlich mit der Farbengleichung und dem Farbendreiecke von Maxwell[2]) ausgeführt werden. Als Grundfarben wählte Maxwell ein Rot von der Wellenlänge $0{,}630\mu$, ein Grün bei $\lambda = 0{,}528\,\mu$ und ein Indigo bei $\lambda = 0{,}457\,\mu$, von denen nach seinen Messungen 24,0 Proz. Rot, 38,3 Proz. Grün und 37,7 Proz. Indigo zusammen Weiß ergaben. Für die Farbenbestimmung ist es nun noch notwendig, den Anteil jeder Spektralfarbe in diesen drei Grundfarben zu wissen, um durch die Aufteilung in einzelne Komponenten die verschiedenen Farben addieren zu können. Wie aber Exner in seiner Theorie des Regenbogens gezeigt hat, genügt es im allgemeinen, die Rechnung für acht verschiedene Wellenlängen durchzuführen, nämlich für die Spektrallinien B, C, D, E, x, F, y, G, welche auch ich deshalb auswählte. Man muß dann nur auch das von Exner benutzte Farbendreieck nehmen, welches gegenüber dem Dreieck von Maxwell eine kleine Verschiebung der drei zugrunde gelegten Fixpunkte, besonders des für Blau nach Violett zu, aufweist, da Maxwell seine Farbberechnungen mit 22 Wellenlängen ausführte. In dem Farbendreieck von Exner ist jedoch noch m. E. eine kleine Änderung in der Farbenbenennung anzubringen, indem an Stelle

1) A. a. O. S. 493.

2) J. C. Maxwell, Phil. Trans. L. R. S. S. 52. 1860; vgl. auch Mascart, Traité d'Optique I.

von Rosa, welches nur ein mit Weiß gemengtes Rot aber *keine reine* Farbe sein kann, die Bezeichnung „Rötlich-Violett" einzuführen ist (vgl. Fig. 6 u. 7). Folgende der Exnerschen Arbeit[1]) entnommene Tab. 5 zeigt die Auflösung dieser 8 Farben in die 3 Komponenten der Grundfarben und zwar in Prozenten der Intensität des weißen Sonnenlichts.

Tabelle 5.

	λ	Rot	Grün	Violett	Weiß
B	0,687 μ	2,3	0,0	0,0	2,3
C	0,656	8,5	0,1	0,8	9,4
D	0,589	14,6	11,7	− 0,1	26,2
E	0,527	− 0,1	15,2	0,2	15,3
x	0,494	− 0,8	7,1	5,5	11,8
F	0,486	− 0,8	4,5	9,3	13,0
y	0,449	0,3	0,1	14,8	15,2
G	0,431	0,0	− 0,4	7,2	6,8
	Weiß	24,0 +	38,3 +	37,7 =	100,0%

Durch Addition erhält man dann die Farbgleichung für weißes Licht, und auf dieselbe Weise läßt sich auch bei anderer Intensitätsverteilung der Anteil der einzelnen Farben am Farbton feststellen. Diesen kann man sich aber entstanden denken aus einer Mischung reiner Spektralfarbe mit einem bestimmten Anteil Weiß; so lautet z. B. die für $z = 2{,}8$ (d. h. für $\lambda = 0{,}589\ \mu$ ist $\sin\varphi = 1{,}65 \cdot 1/r\,\mu$) im Beugungsbild undurchsichtiger Tropfen durch Addition der Komponenten erhaltene und auf Prozente der Gesamtsumme umgerechnete Farbengleichung

$$53{,}47\ R + 38{,}28\ G + 8{,}25\ V = 100{,}0\ ,$$

worin die violette Grundfarbe am wenigsten enthalten ist. Reduziert man nun die Weißgleichung (Tab. 5) auf diesen Anteil Violett, also auf $5{,}25\ R + 8{,}37\ G + 8{,}25\ V = 21{,}87$, so erhält man sofort den Prozentgehalt von Weiß in der Mischfarbe zu 21,87 Proz.; Spektralfarbe ist also mit 78,13 Proz. vertreten und zwar sind davon, wie eine einfache Rechnung zeigt, 48,22 Proz. Rot und 29,91 Proz. Grün. Die Bestimmung der Farbe geschieht nun mittels eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Ecken die drei Grundfarben einnehmen, während die

1) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 530. 1910.

übrigen Farben längs der Seiten ausgebreitet gedacht sind. Die ungefähren Grenzen sind durch die punktierten Linien angedeutet (Fig. 6), außerdem ist jede Dreiecksseite noch in 10 gleiche Teile geteilt, so daß jede Farbe durch eine Zahl angebbar ist. Im obigen Beispiel besteht die Farbe aus 0,38 Teilen Grün und 0,62 Teilen Rot, welches dem Punkte 3,8 des Farbendreiecks entspricht, da sich die Abstände von den

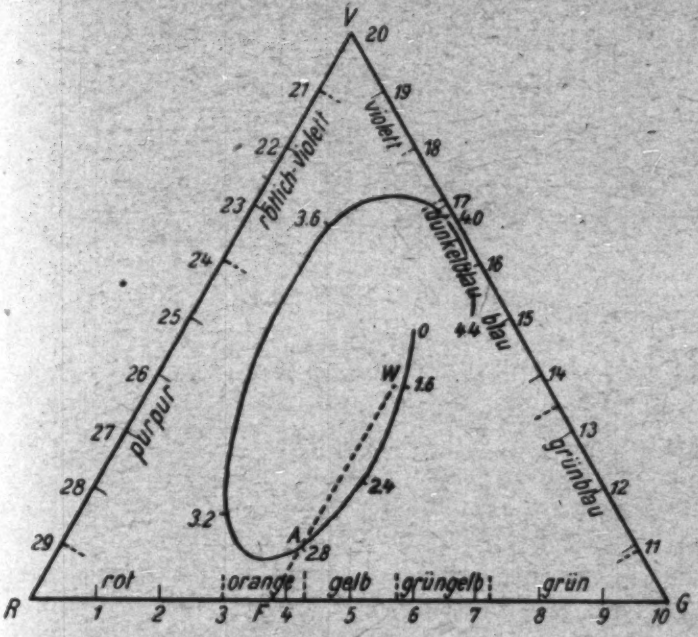


Fig. 6.

Dreiecksecken umgekehrt proportional den Anteilen an Grundfarben verhalten. Der Farbton für $z = 2{,}8$ ist also ein tiefes Dunkelorange mit wenig Weiß. Trägt man nun den durch die Farbengleichung in Dreieckskoordinaten gegebenen Wert in das Farbendreieck ein und verbindet den entsprechenden Punkt A mit dem Weißpunkt W, so gibt der Schnittpunkt der über A hinaus verlängerten Geraden mit der Dreiecksseite direkt die Spektralfarbe, während der Punkt A selbst die Strecke im Verhältnis des Weiß- und Farbgehaltes teilt; d. h. es ist $WA : WF = 78{,}13$ und $AF : WF = 21{,}87$.

Auf diese oben nur kurz angedeutete Weise bestimmte ich nun zunächst die Farbenfolge in der Beugungserscheinung un-

durchsichtiger Tropfen und erhielt so im Farbendreieck die in Fig. 6 dargestellte Kurve, während Tab. 6 die Farbgleichungen und die aus ihnen berechneten Farbtöne wiedergibt.

Tabelle 6.

z	Rot	Grün	Viol.	Int.	Weiß Proz.	Farbe Proz.	L[1]	Farbton (ber.)
0,0	21,23	46,81	61,15	129,19	68,5	31,5	16,8	weißlichblau
1,6	11,78	19,89	19,10	50,77	96,6	3,4	13,5	weiß
2,4	4,97	5,51	2,72	13,20	54,6	45,4	4,6	hellgelb
2,8	2,606	1,866	0,402	4,874	21,9	78,1	3,8	dunkelorange
3,2	1,041	0,381	0,266	1,688	41,8	58,2	1,1	tiefrot
3,6	0,241	0,168	0,771	1,180	37,1	62,9	21,8	schwarzviolett
4,0	0,025	0,445	0,996	1,466	7,1	92,9	17,0	dunkelblau
4,4	0,093	0,691	0,784	1,568	24,7	75,3	15,4	dunkelblau

Wie man sieht, entspricht die Farbenfolge vollauf den Beobachtungen an Staubplatten und homogenen Nebel großer Tropfen. Besonders bemerkenswert ist der schroffe Farbenwechsel zwischen Rot und Violett, verbunden mit einer beträchtlichen Abnahme der Gesamtintensität (Spalte 5), so daß das Minimum des weißen Lichts bei $z = 3{,}7$ (bzw. 3,83 und $\lambda = 0{,}571$) eine zur Messung gut geeignete scharfe Grenze ergibt. Für $z = 1{,}6$ berührt die Kurve nahezu den Weißpunkt, infolgedessen dürfte dort der Gesamteindruck bei dem geringen Farbgehalt an Blau (3,4 Proz.), welcher unter Berücksichtigung der Ausdehnung der Lichtquelle noch mehr herabgesetzt[2]) wird, reines Weiß sein. Deshalb benutzte ich für die Berechnung der Färbung des zentralen Feldes aus Gleichung (31) auch diesen Wert von z, umsomehr als in dieser Entfernung von der Lichtquelle die diesbezüglichen Beobachtungen in Tab. 1 bis 4[3]) auch erst ausgeführt werden konnten. Die Resultate gibt Tab. 7 und Fig. 7. Die Reflexion an der Oberfläche kommt hier nicht so in Betracht, den Hauptanteil an der Farbenentwicklung haben vielmehr die Strahlen, welche den Tropfen durchsetzen. Die Interferenzerscheinung ist jedoch nicht identisch mit den Farben dünner Blättchen, denn diese gehorchen nicht dem

1) Lage der reinen Spektralfarbe im Farbendreieck vgl. Fig. 6.
2) Vgl. Mascart, Traité d'Optique III.
3) A. a. O. S. 485.

sin-Gesetz (31), sondern werden durch $\pm \cos 2\pi/\lambda \cdot \Delta$ dargestellt. Eine große Ähnlichkeit besteht allerdings mit ihnen, wie die Resultate zeigen. Nach diesen Werten, welche gerade die beiden ersten Perioden des Farbenwechsels umfassen, bestimmte ich nun aus der jeweiligen beobachteten

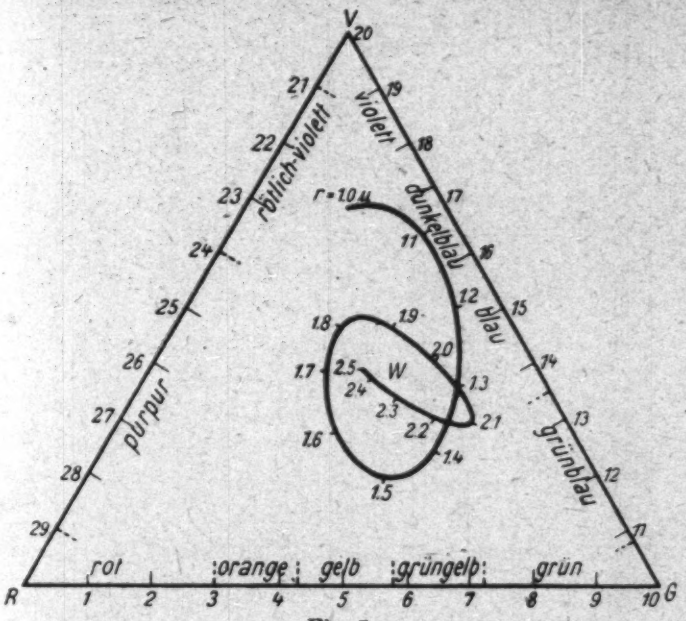


Fig. 7.

Färbung des zentralen Feldes die Tropfengröße in den Tab. 1 und 2.[1]) Für die dritte Periode, d. h. für Tropfenradien größer als 2,5 μ, glaubte ich jedoch die Farbberechnung in der angegebenen Weise nicht mehr durchführen zu können, da dann infolge des großen Gangunterschieds und dem dadurch bedingten schnellen Wechsels von $\sin 2\pi\Delta/\lambda$ bzw. $\cos 2\pi(\Delta+\Delta_1)/\lambda$ 8 Wellenlängen für die Farbengleichung nicht mehr genügen dürften.

Die Berechnungen würden aber immer hellere Farbentöne ergeben, bis schließlich (bei etwa 4—5 μ) kein Unterschied in der Färbung des zentralen Feldes mehr zu erkennen ist, so daß auch hier recht gute Übereinstimmung mit der Beobachtung besteht. Die Fig. 7 läßt z. B. noch deutlich erkennen, daß infolge der starken Krümmung der Kurve

1) A. a. O. S. 485.

Tabelle 7.

r	Rot	Grün	Viol.	Int.	Weiß Proz.	Farbe Proz.	L[1])	Farbton
1,00 μ	20,6	25,6	71,5	117,7	56,8	43,2	20,9	hellviolett
1,125	8,1	53,3	96,8	158,2	21,3	78,7	16,7	dunkelblau
1,25	16,6	81,8	78,9	177,3	39,0	61,0	14,9	hellblau
1,375	34,3	85,7	44,1	164,1	71,0	29,0	8,7	hellgrün
1,5	48,3	67,5	28,8	144,6	52,8	47,2	5,6	grünlich gelb
1,625	51,4	45,7	42,9	140,0	81,2	18,8	0,8	rot
1,75	42,0	37,0	62,4	141,4	68,3	31,7	24,2	purpur
1,875	27,9	43,9	65,6	137,4	83,3	16,7	20,2	violett
2,00	18,7	55,9	51,3	125,9	62,0	38,0	14,6	blau
2,125	19,3	58,8	36,2	114,3	70,2	29,8	11,8	grün(bläulich)
2,25	26,6	54,1	38,2	118,9	85,2	14,8	8,7	grün
2,375	34,2	46,6	47,5	128,3	94,8	5,2	27,5	hellpurpur
2,5	36,4	43,9	52,4	132,7	86,4	13,6	24,9	purpur
undurchs.	23,2	39,2	37,6	100,0	96,6	3,4	13,5	weiß (blau)

bei 2,1 μ die grüne Farbe der zweiten Periode besonders gut ausgeprägt und beständig sein muß. Ein Vergleich aber der so berechneten Färbungen mit denen des Ostwaldschen Farbenatlasses, wie ich ihn bei den Beobachtungen versucht habe, läßt sich hier nicht durchführen, denn die obige Berechnung beruht auf der dem Auge verschiedenen, rein subjektiven Helligkeitswahrnehmung der einzelnen Farben, während im Atlas alle Farben (objektiv) dieselbe Helligkeit besitzen, außerdem ist ihm auch ein für die Praxis bestimmtes Farbendreieck, dessen drei Ecken nämlich die *betreffende Spektralfarbe, Weiß und Schwarz* einnehmen, zugrunde gelegt.

Aus Gleichung (31) ist jetzt auch die Abhängigkeit der eigenartigen Beugungserscheinungen im homogenen Nebel vom Brechungsexponenten und die Erklärung der Beobachtungen an anderen Flüssigkeiten leicht ersichtlich. Da nämlich die Durchsichtigkeit der Tropfen (wenigstens für das zentrale Feld) den größten Anteil an der anomalen Farbenentwicklung hat, so muß, um dieselbe Phasendifferenz $2\pi\Delta/\lambda$ und somit auch dieselbe Farbenerscheinung im Beugungsbild zu bekommen, die Beziehung bestehen (15a)

$$r : r_1 = (n_1 \cdot \cos\beta_1 - \cos\alpha_1) : (n \cdot \cos\beta - \cos\alpha),$$

d. h. die Tropfenradien müssen sich annähernd für kleine α und β umgekehrt proportional den um eins verminderten

1) Vgl. Fig. 7.

Brechungsexponenten verhalten. Allerdings besteht zwischen den Intensitätsgrößen K nicht dasselbe, reziproke Verhältnis (vgl. Tab. 3), und dazu kommt außerdem noch die nicht zu vernachlässigende Reflexion an der Oberfläche des Tropfens. Infolgedessen können sehr wohl kleine Verschiedenheiten an den Erscheinungen in den *Ringen*, besonders bei monochromatischem Licht, auftreten, so daß hierin die Messungen der Ringdurchmesser im Anilinnebel[1]), welche nicht genau diesem Verhältnisse entsprechen, ihre Erklärung finden. Auf jeden Fall können dieselben Beugungserscheinungen erst an um so kleineren Tropfengrößen auftreten, je größer der Brechungsexponent ist, wie ja auch einwandsfrei aus den Versuchen hervorgeht. Ist aber der Brechungsexponent bekannt, so gestattet dann auch die jeweilige Färbung des zentralen Feldes die Tropfengröße schnell und bequem bis auf wenige Prozente genau zu bestimmen, während dies im monochromatischen Licht aus den Beugungswinkeln der Minima ja nicht ohne weiteres möglich war. Die Grenze, bis zu der die obige Methode anwendbar ist, beträgt bei Wasser ungefähr $3-4\,\mu$.

Es bleibt jetzt noch übrig, die zum zentralen Feld *meistens komplementäre* Färbung der Lichtquelle zu erklären, deren Intensität durch die Formel (13) gegeben war. Da ich auf die Ableitung dieser Gleichung nicht näher eingehen konnte, die Erscheinung auch weniger charakteristisch und überhaupt schwer wahrzunehmen ist, so kann ich mich hier kurz fassen. Besonders zu bemerken ist, daß die Färbung erst bei sehr dichtem Nebel auftritt, wo also die Helligkeit der Lichtquelle schon beträchtlich abgenommen hat. Diese Intensitätsabnahme drückt sich in der Formel durch einen großen negativen Wert von n_1 aus, und dieser Zeichenwechsel hat nun zur Folge, daß die Färbung ins Komplementäre umschlägt. Dazu kommt noch das Glied

$$2n_2\, a \cdot A \cdot K \cos \frac{2\pi}{\lambda} A$$

mit einer gewissen Stärke n_2, demzufolge die Lichtquelle, wie auch aus den Beobachtungen hervorgeht, *nicht immer genau komplementär* zum zentralen Feld gefärbt erscheint. Die Verhältnisse liegen hier also durchaus nicht so einfach, wie sie etwa Barus für seine Erklärung annahm, besonders ist die

1) A. a. O. S. 498.

Schichtdicke des Nebels von nicht geringem Einfluß auf die Sichtbarkeit der Erscheinung. Näheren Aufschluß darüber kann aber erst eine eingehende theoretische Untersuchung über die Lichtdurchlässigkeit von *dichtem* Nebel geben.

Zusammenfassung.

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Untersuchungen lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Die im ersten Teil dieser Arbeit [vgl. die Zusammenfassung[1])] näher beschriebenen eigenartigen Farbenerscheinungen und Intensitätsverteilungen im Beugungsbild des künstlichen homogenen Nebels lassen sich durch die Beugungstheorie kleiner Kugellinsen erklären.

An Stelle der einfachen Beugungsformel undurchsichtiger, kreisförmiger Scheibchen tritt hier eine bedeutend kompliziertere Gleichung (31), welche dadurch entsteht, daß auch das den Tropfen durchsetzende und das an seiner Oberfläche reflektierte Licht mit dem gebeugten interferiert. Infolgedessen kann auch die Tropfengröße aus den Durchmessern der Ringe nicht mehr berechnet werden; nur die Färbung des zentralen Feldes, welche den Farben dünner Blättchen *ähnelt*, gestattet bei kleinen Tropfen durch seine Gesetzmäßigkeit in der Farbenfolge diese Bestimmung mit einiger Genauigkeit auszuführen.

Bei größeren Tropfen, wie sie bei den Versuchen von F. Mierdel und *ausschließlich* im natürlichen Nebel vorkommen, läßt sich allerdings auch fernerhin die alte Beugungsformel für die Berechnung der Tropfenradien aus den Ringdurchmessern anwenden, da dann der Einfluß der Durchsichtigkeit des Tropfens und der Reflexion an seiner Oberfläche nicht mehr zu beobachten ist und die Tropfen sich ganz wie undurchsichtige, kreisförmige Scheibchen verhalten.

Vorstehende Dissertation wurde im Physikalischen Institut der Universität Marburg ausgeführt. Hrn. Geheimrat Prof. Dr. F. Richarz und Hrn. Prof. Dr. F. A. Schulze möchte ich auch an dieser Stelle für die freundliche Anregung und Unterstützung meinen besten Dank aussprechen.

1) A. a. O. S. 499.

(Eingegangen 2. Februar 1920.)

5. *Zungenpfeife und Röhrensender;* *von H. Vogel und M. Wien.*

In einer kürzlich in diesen Annalen erschienenen Untersuchung[1]) hat einer von uns die Zungenpfeife als gekoppeltes System behandelt und gezeigt, daß die charakteristischen Änderungen des Tones der Zungenpfeife bei allmählicher Verlängerung der Ansatzröhre sich aus der Theorie der gekoppelten Schwingungen herleiten lassen.

Zunge und Ansatzrohr sind die beiden gekoppelten Systeme. Von den beiden freien Koppelungsschwingungen der beiden Systeme ist im allgemeinen die stärkere und weniger gedämpfte die „tonangebende", indem der die Schwingungen unterhaltende Luftstrom durch die Zunge in der Periode dieser Schwingung reguliert wird. In der Nähe der Resonanz der beiden Systeme besitzen die beiden Koppelungsschwingungen annähernd die gleiche Amplitude und Dämpfung, es müssen also hier labile Zustände bezüglich der Tonhöhe auftreten, die sich in einer schnellen Änderung der Tonhöhe an der Resonanzstelle bei Verlängerung der Ansatzröhre äußern, oder bei enger Koppelung sogar in einem eigentümlichen, plötzlichen Umspringen des Tones. Diese Tonänderung wiederholt sich jedesmal beim Verlängern des Rohres, so oft einer der Obertöne der Röhre mit dem Ton der Zunge in Resonanz tritt. Der Verlauf der Tonkurve an einer Resonanzstelle in seiner Abhängigkeit von der Koppelung wird durch die Kurven der Figg. 1a, 2a u. 3a charakterisiert, die an der von H. Vogel in seiner oben genannten Arbeit untersuchten Zungenpfeife gewonnen wurden.

Bei loser Koppelung verläuft die Tonkurve verhältnismäßig weich und stetig (Fig. 1a). Mit zunehmender Koppelung wird die Tonänderung größer und steiler. Aus der steilen Tonänderung wird schließlich ein Umspringen des Tones, jedoch

1) H. Vogel, Ann. d. Phys. 62. S. 247. 1920.

erfolgt dies nicht genau an der Resonanzstelle, sondern, je nachdem die Röhre verlängert oder verkürzt wird, hinter oder vor der Resonanzstelle. Es tritt ein „Ziehen" des Tones ein und dabei entsteht beim Hin- und Hergehen die in Fig. 2a dargestellte „Ziehschleife".

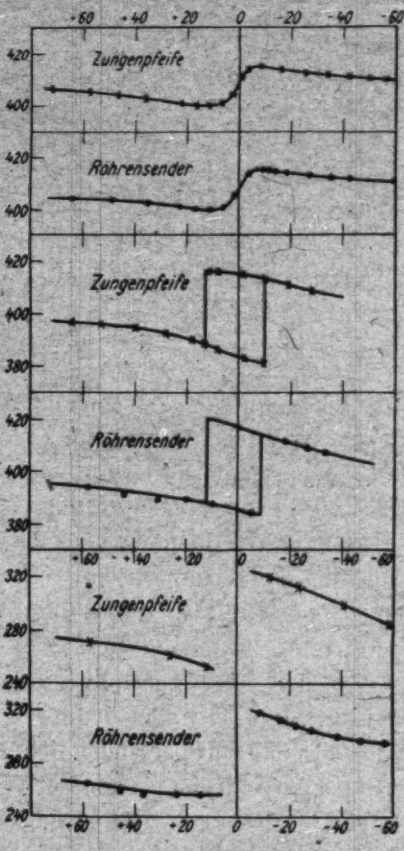


Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 2a. Fig. 2b. Fig. 3a. Fig. 3b.

Bei ungenügender Rückkoppelung und stärkerer Dämpfung setzt der Ton an der Resonanzstelle aus, so daß eine mehr oder weniger große Tonlücke entsteht (Fig. 3a).

Als im Laufe des Krieges der Röhrensender und der Audionempfang aufkamen und dabei gekoppelte Schwingungskreise angewandt wurden, zeigte es sich, daß hier die gleichen Erscheinungen auftraten, wie sie uns schon vor dem Kriege aus den Versuchen an Zungenpfeifen bekannt waren.

Im folgenden soll nun diese Übereinstimmung zwischen Röhrensender und Zungenpfeife eingehend dargelegt werden, wobei zuerst die grundsätzliche Übereinstimmung nachgewiesen und dann gezeigt werden soll, daß die Ergebnisse der Versuche an der Zungenpfeife sogar zahlenmäßig durch elektrische Systeme wiedergegeben werden können. Gewisse Abweichungen der Zungenpfeife von der Theorie der gekoppelten Schwingungen, die schon bei den Versuchen von Weber hervortraten und sich auch bei unseren Versuchen wiederholten, ließen sich ebenfalls mit elektrischen Schwingungskreisen durch eine be-

sondere Form der Rückkoppelung hervorrufen. Diese besondere Rückkoppelung verspricht wieder für den Röhrensender und Audionempfang Vorteile, so daß hier, wie so häufig, die gegenseitige Befruchtung akustischer und elektrischer Schwingungsversuche deutlich in die Erscheinung tritt.

Normale Koppelungsschwingungen beim Röhrensender.

Jedem, der mit Röhrensendern oder Audionempfang zu tun gehabt hat, ist die gegenseitige Beeinflussung zwischen Antenne und Zwischenkreis beim Sender, zwischen Antenne und Audionkreis beim Empfänger wohl bekannt, und man findet dabei sogleich die charakteristischen Merkmale der gekoppelten Schwingung wieder. Als Beispiel sei hier die Änderung der Wellenlänge eines Audion-Zwischenkreis-Empfängers von Telefunken mit der Abstimmung der Antenne angeführt.

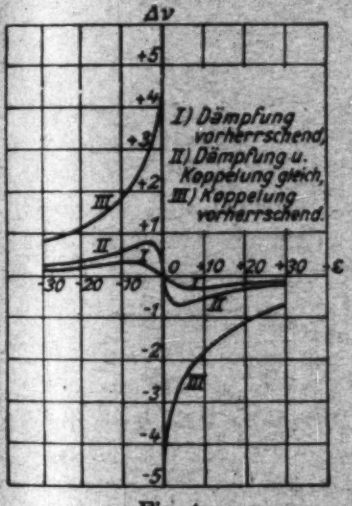


Fig. 4.

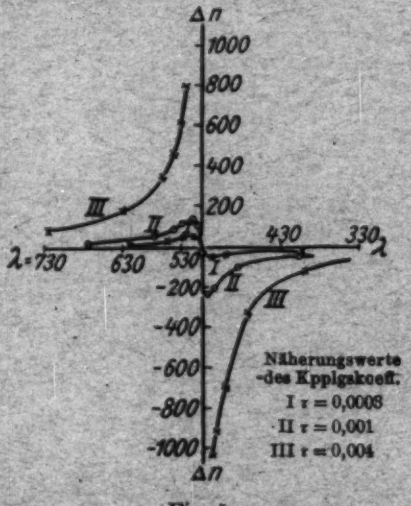


Fig. 5.

Fig. 4 ist einer früheren Arbeit[1]) entnommen und stellt die aus der Theorie berechnete Änderung der Schwingungszahl eines gekoppelten Systems in der Nähe der Resonanz für drei verschiedene Koppelungsgrade dar. In Fig. 5 sind die beobachteten Änderungen der Schwingungszahl eines Audions wiedergegeben in ihrer Abhängigkeit von der Abstimmung einer mit ihm gekoppelten künstlichen Antenne mittlerer Dämpfung, und

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. S. 151. 1897.

zwar ebenfalls für drei verschiedene Koppelungsgrade (τ annähernd $= 3 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3}, $4 \cdot 10^{-3}$). Als Abszisse ist die Wellenlänge der Antenne, als Ordinate die Änderung der Schwingungszahl des Empfängers aufgetragen. Die Übereinstimmung der Figg. 4 u. 5 ist offensichtlich; bemerkenswert ist, daß der Einfluß der resonierenden Antenne trotz der sehr losen Koppelung bei dem Schwebungsempfang deutlich hervortritt. Es ergibt sich daraus, wie schwierig bei kurzen Wellenlängen eine Entkoppelung elektrischer Schwingungskreise ist, besonders wenn sie auf engem Raum nebeneinander untergebracht werden müssen.

Die weitere Untersuchung erfolgte nicht bei Hochfrequenz, sondern bei langsamen elektrischen Schwingungen mit Frequenzen von der gleichen Größe wie die der Zungenpfeife.

Einfluß der Koppelung, Dämpfung, Rückkoppelung, Heizung, Anodenspannung.

Die Versuchsanordnung war die übliche (Fig. 6). Als Induktionsspulen im Schwingungskreis und im Sekundärkreis wurden große Spulen benutzt, die für Untersuchung langsamer elektrischer Schwingungen von H. Birnbaum[1]) in dem hiesigen Institut hergestellt und verwandt waren. Sie waren unterteilt, so daß ein Teil der Spulen zur Rückkoppelung benutzt werden konnte. Der Widerstand war verhältnismäßig gering, besonders derjenige der im Sekundärkreis verwandten Spule, die aus verdrillter Litze bestand. Als Kapazitäten dienten Glimmer- und gute Papierkondensatoren, als Senderröhre wurde für die meisten Versuche eine *K*-Röhre von Schott & Gen., gelegentlich auch eine Röhre der A.-E.-G. verwandt. Der Ton wurde mittels eines Telephons, das lose mit der Spule des Schwingungskreises gekoppelt war, beobachtet, und die Tonhöhe mit einem Tonometer von Max Kohl in Chemnitz gemessen. Es wurde systematisch unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen der Einfluß der Koppelung

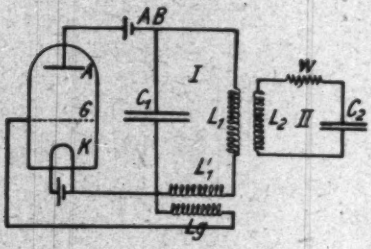


Fig. 6.

1) H. Birnbaum, Ann. d. Phys. 49. S. 201. 1916.

zwischen Schwingungskreis und Sekundärkreis beobachtet, dann wurde durch Einschaltung von Widerstand in den Sekundärkreis die Änderung der Tonkurven mit der Dämpfung bei gleichbleibender enger Koppelung studiert, schließlich bei gleichbleibender Koppelung und Dämpfung der Einfluß der Rückkoppelung, der Heizung der Glühkathode und der Anodenspannung.

Bei sämtlichen Versuchen blieb der Primärkreis unverändert. $L_1 = 7{,}1 \cdot 10^8$ cm, $C_1 = 0{,}22$ M.F., ebenso die Selbstinduktion des Sekundärkreises, $L_2 = 3{,}75 \cdot 10^7$ cm. C_2 wurde, um die Tonkurve zu erhalten, zwischen $C_2 = 2{,}6$ M.F. und $C_2 = 6{,}0$ M.F. abgeändert. Der Ohmsche Widerstand der Sekundärspule betrug ca. 3 Ohm.

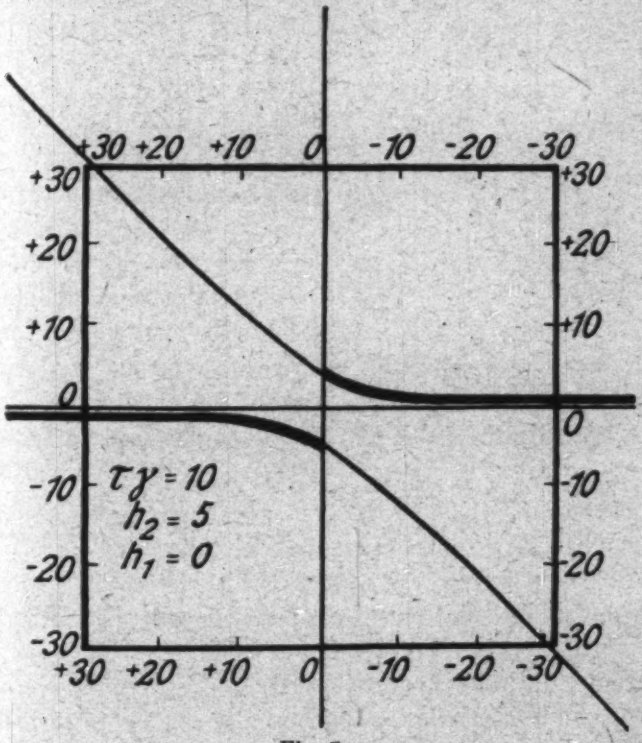


Fig. 7a.

Änderung der Koppelung. Bei der engsten angewandten Koppelung $\tau = 0{,}15$ wurde die Fig. 7 (S. 654) erhalten. Die Erscheinung baut sich auf der Fig. 7a auf, in der die theoretischen

Koppelungsschwingungen für mittlere Koppelung dargestellt sind.[1]) Die verstärkten Kurvenstücke sind die Teile der beiden theoretischen Kurven, bei denen die Dämpfung die geringere ist, die unverstärkten die mit größerer Dämpfung. Es müßten also, wenn die Dämpfung allein maßgebend wäre, genau an der Resonanzstelle die eine Tonkurve in die andere überspringen, ohne daß ein „Ziehen" auftritt. Es bleibt jedoch die einmal vorhandene Schwingung noch ein Stück über den Resonanzpunkt hinaus bestehen, so daß beim Hin- und Hergang die Ziehschleife entsteht. Manchmal kommt es dabei vor, daß in der Nähe der Resonanz beide Töne gleichzeitig, aber schwach und unsicher auftreten, was wir bei den Zungenpfeifen nicht beobachtet haben.

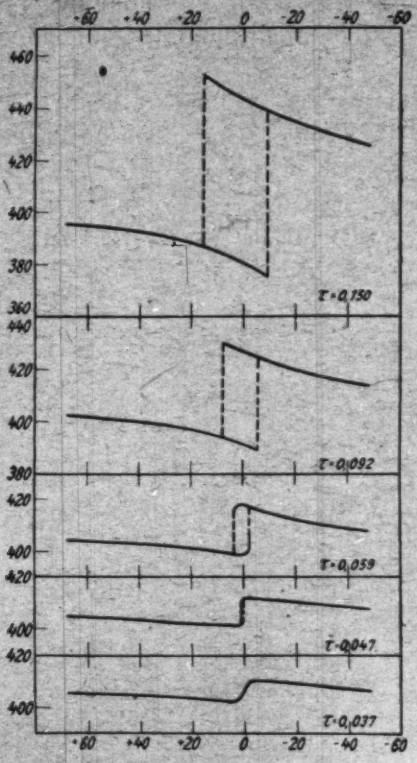


Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

Je loser die Koppelung ist, um so geringer ist der Tonsprung, gleichzeitig wird auch das Ziehen schwächer. In der Fig. 9 ist der Sprung nur noch sehr klein, kurz vor demselben biegt die Tonkurve von der theoretischen Kurve ab; das Ziehen ist in Fig. 10 kaum mehr merklich. Schließlich erhalten wir bei noch loserer Koppelung in Fig. 11 den sprung- und schleifenlosen Verlauf der Tonkurve, wie er den Koppelungsschwingungen mit vorherrschender Dämpfung (Fig. 1a) entspricht.

1) Vgl. M. Wien, a. a. O. Fig. 4.

Veränderung der Dämpfung (Fig. 12 bis 16). Vergrößern wir die Dämpfung bei gleichbleibender Koppelung (0,15) durch Einschalten von 5 Ohm Widerstand in den Sekundärkreis, so wird das Ziehen geringer (Fig. 13) und auch der Sprung etwas

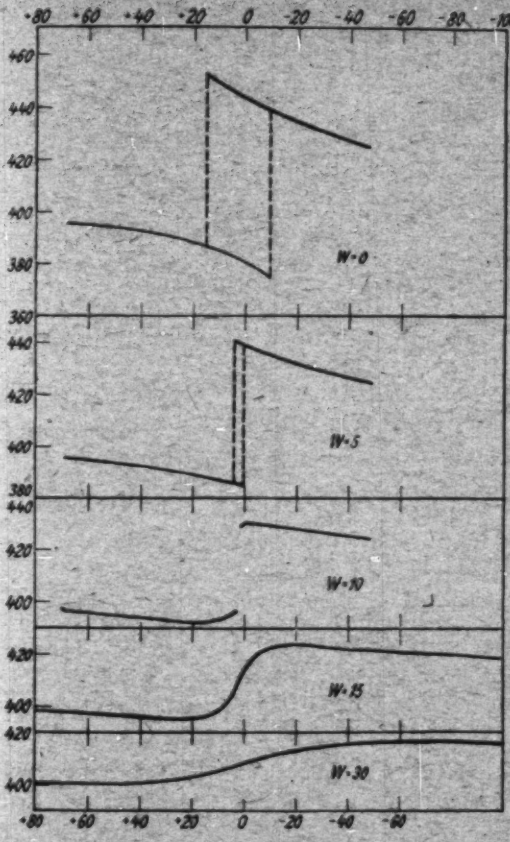


Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

kleiner als ohne Zusatzwiderstand ($W = 0$, Fig. 12). Bei weiterer Vermehrung der Dämpfung (10 Ohm) setzt der Ton in der Umgebung der Resonanz aus, weil dem Primärsystem zu viel Energie entzogen wird (Fig. 14). Schalten wir noch mehr Widerstand (15 Ohm) ein, so wird die Energieentziehung wieder geringer, wir erhalten eine kontinuierliche, aber sprunglose Tonkurve mit noch immer ziemlich großer Tonänderung (Fig. 15), bei noch größerer Dämpfung (30 Ohm) wird die Kurve immer flacher (Fig. 16), bis schließlich die Wirkung des Sekundärsystems überhaupt verschwindet.

In Fig. 17 sind Versuche wiedergegeben, bei denen die *Rückkoppelung* gegenüber dem bisherigen Wert (ausgezogene Kurve, Sprungstellen 2, 2) erheblich vermehrt und erheblich vermindert wurde. Die Vermehrung (gestrichelte Kurve, Sprungstellen 3, 3) verstärkt das Ziehen bei annähernd gleich großem Tonsprung und geringer Änderung der Tonkurve. Bei der loseren Rückkoppelung (punktierte Kurven) setzt der Ton in einem ziemlich großen Gebiet um die Resonanzstelle herum aus (bei den

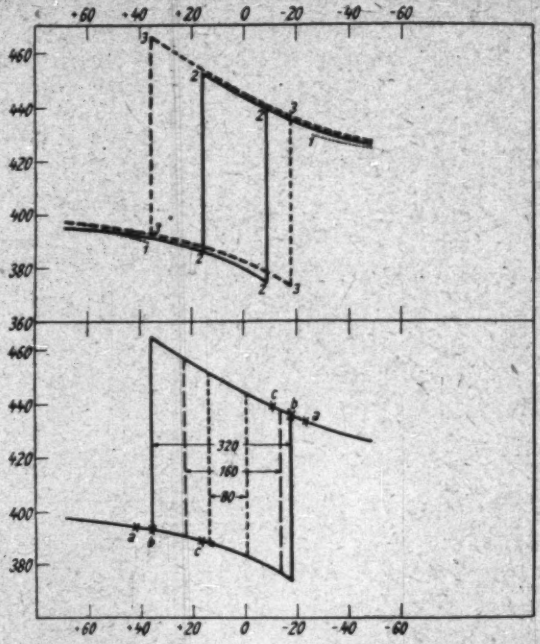


Fig. 17.

Fig. 18.

mit 1 bezeichneten Stellen). Die Tonkurve zeigt auch hier nur eine geringe Abweichung von der theoretischen Kurve.

Ähnlich wie die Vermehrung der Rückkoppelung wirken die *Erhöhung der Anodenspannung* (80, 160, 320 Volt, Fig. 18) und die *Verstärkung des Heizstromes* der Glühkathode (Sprungstellen *a* bei einem Heizstrom von 1,35 Amp., *b* bei 1,25, *c* bei 1,05 Amp.). Beides vermehrt das Ziehen, übt aber nur einen geringen Einfluß auf die Größe des Tonsprunges und die Tonkurve aus.

Die Verstärkung der Rückkoppelung, der Anodenspannung und der Heizung bewirken ferner alle drei ein Herabdrücken des Einflusses der Dämpfung in dem Sinne, daß das Aussetzen

weniger leicht auftritt und sich auf einen kleineren Bereich beschränkt.

Wir sehen aus dem Vorstehenden, daß die Form der Tonkurven durch die Wahl der Konstanten der elektrischen Schwingungskreise in weiten Grenzen abgeändert werden kann. Es ist deshalb leicht möglich, die Tonkurven der Zungenpfeifen durch passende elektrische Anordnungen nachzubilden. In den Figg. 1b, 2b und 3b (S. 650) sind die Ergebnisse solcher Versuche dargestellt, wobei zum bequemen Vergleich die elektrische Tonkurve jedesmal unter der entsprechenden akustischen Tonkurve zum Abdruck gelangt ist. Die noch vorhandenen geringen Abweichungen der Figuren sind meistens auf den Umstand zurückzuführen, daß bei der Zungenpfeife bei größerer Verstimmung schon der Einfluß des nächstfolgenden Obertones der Ansatzröhre merklich ist.

In anderen Fällen weichen jedoch die Tonkurven der Zungenpfeife von den normalen Koppelungskurven mehr ab. Hierauf soll im folgenden näher eingegangen und der Versuch gemacht werden, auch diese Abweichungen durch elektrische Systeme nachzubilden.

Abweichungen der Zungenpfeife von der Koppelungstheorie.

Es wurde schon in der Arbeit von H. Vogel mehrfach darauf hingewiesen, daß die Tonkurven der Zungenpfeife oft nicht genau der Theorie entsprechen, sondern vor allem bei engerer Koppelung die tiefere Koppelungsschwingung gegenüber der höheren bevorzugt ist, so daß also die Vertiefung des Koppelungstones gegenüber dem Eigenton der Zunge größer ist als die entsprechende Erhöhung. Ganz besonders stark tritt dies bei den Versuchen von Weber hervor, der sogar nur von einer Vertiefung des Tones gegenüber dem Ton ohne Ansatzrohr spricht und auch seine Theorie in diesem Sinne aufbaut. Bei loserer Koppelung ist diese Bevorzugung der tiefen Töne geringer und schließlich kaum mehr merklich; so waren bei den Versuchen von Willis[1]) und den meisten Versuchen von H. Vogel die Erhöhungen und Vertiefungen des Pfeifentones gegenüber dem Ton der Zunge annähernd gleich groß.

1) O. Willis, Pogg. Ann. 24. S. 397. 1832.

In den Ziehschleifen der Zungenpfeife ist diese Bevorzugung der tieferen Töne mehrfach an der Unsymmetrie der Schleifen erkennbar, vgl. z. B. Vogel (Fig. 28 u. 29.)

Eine sehr deutliche derartige unsymmetrische Tonkurve der Zungenpfeife ist in Fig. 19a wiedergegeben. Sie wurde bei enger, aber nicht allzu enger Koppelung erhalten. Bei allzu enger Koppelung tritt Absorption ein, so daß ein mehr oder weniger großer Teil der Tonkurve gerade in der Umgebung der Resonanz ausfällt und schließlich nur Kurvenstücke, ähnlich wie sie Weber erhielt, übrig bleiben.

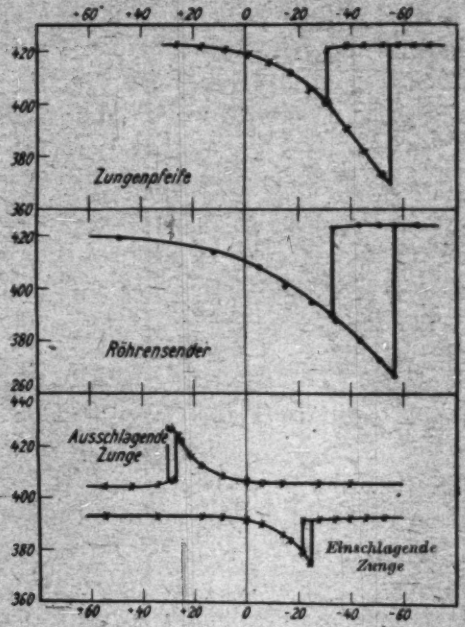


Fig. 19a.

Fig. 19b.

Fig. 21.

Innerhalb der Ziehschleife der Fig. 19a verläuft die Tonkurve der höheren Koppelungsschwingung nahezu parallel der Abszissenachse, die Tonänderung ist demnach gering; anders bei der tieferen Koppelungsschwingung, bei dieser ist die Tonänderung innerhalb der Ziehschleife groß, so daß die untere Seite der Ziehschleife stark geneigt ist, und infolgedessen die untere rechte Ecke der Schleife besonders stark ausgebildet erscheint.

Gleichzeitig mit der Unsymmetrie tritt oft auch eine Verschiebung der Ziehschleife nach den tieferen Tönen hin

ein, so daß die Schleife nicht genau an dem Ort der Resonanz liegt. Bei der Zungenpfeife lassen sich jedoch alle diese Erscheinungen schwer messend verfolgen, weil die Tonhöhe der Zunge nicht konstant ist, und auch die Eigenschwingungen der Ansatzröhre sich nicht mit Sicherheit bestimmen lassen (vgl. Vogel, S. 255 f.). Die wichtigste Frage ist nun: Kommt auch eine Bevorzugung der höheren Töne vor? Weber gibt an, daß bei Betrieb seiner Zungenpfeife durch Saugen anstatt durch Druckluft die Erscheinung sich umkehrt, und der Ton an der Resonanzstelle der Ansatzröhre nach oben umspringt. Weber hat jedoch nur wenige Versuche mit Saugluft gemacht, aus denen sich nichts sicheres über die Vorgänge entnehmen läßt. Auch uns gelang es bei dem Betrieb der Zungenpfeife mit Saugluft nicht, regelmäßige Tonkurven zu erhalten; der Ton versagte in weiten Gebieten ganz und ist auch sonst nur schwach und schwankend. Besser und deutlicher tritt die Erscheinung bei einer etwas anderen Anordnung hervor, die auf folgender Überlegung beruht: der Unterschied zwischen dem Betrieb der Zungenpfeife mit Druck- und Saugluft ist im Grunde genommen der, daß die Zunge bei Druckluft als einschlagende, bei Saugluft als ausschlagende Zunge arbeitet. Dieser Unterschied kann aber auch dadurch erzielt werden, daß man nach wie vor Druckluft verwendet, aber einen Einsatz mit einer senkrecht gegen den Luftstrom gerichteten

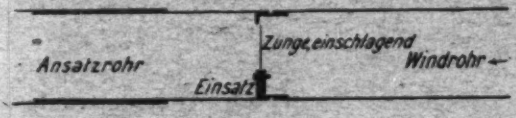


Fig. 20.

Zunge benutzt (vgl. Fig. 20), der auch umgekehrt eingesetzt werden kann, so daß die Zunge einmal als einschlagende, das andere Mal als ausschlagende wirkt. Hiermit ließen sich einigermaßen sichere Tonkurven erzielen; die Ergebnisse sind in Fig. 21 dargestellt. Die starke Verschiebung der Ziehschleife bei der ausschlagenden Zunge nach den hohen Tönen, bei der einschlagenden Zunge nach den tiefen tritt deutlich hervor, und die Unsymmetrie ist sicher erkennbar, obgleich die Ziehschleifen nur schmal sind.

Diese Bevorzugung einmal der tiefen das andere Mal der hohen Koppelungsschwingung hängt offenbar mit der Art und Wirkung der Rückkoppelung zusammen. Außer der Zunge wirkt bei der Rückkoppelung auch das sekundäre System: die schwingende Luftsäule mit. Leider kann die Rückkoppelung bei der Zungenpfeife nicht willkürlich verändert werden, und die Eigentöne der ungekoppelten Systeme sind, wie gesagt, nicht sicher meßbar, infolge dessen ist eine systematische Untersuchung der ganzen Erscheinung bei der Zungenpfeife nicht möglich und kann nur bei den analogen elektrischen Systemen erfolgen.

Rückkoppelung durch das Sekundärsystem bei Röhrensendern.

Es gelang, die Erscheinung, welche soeben bei den Zungenpfeifen erläutert wurde, mittels der Röhrensender nachzumachen, dadurch, das neben der gewöhnlichen Rückkoppelung durch den Primärkreis eine zweite Rückkoppelung durch den Sekundärkreis eingeführt wurde. Dazu wird eine Spule L'_2 in den Sekundärkreis eingeschaltet, die induzierend auf eine in den Gitterkreis eingeschaltete Spule Lg' wirkt (vgl. Fig. 22). Die ursprüngliche Rückkoppelung mit dem Gitter durch L'_1 — primäre Rückkoppelung — wird durch diese „sekundäre Rückkoppelung" vermehrt oder vermindert, je nach der Phasendifferenz der durch sie bewirkten Gitterspannungen. Diese Phasendifferenz kann durch Umschalten der Zuleitungen von L'_2 um 180° verändert werden. Je nach der Größe der gegenseitigen Induktionen L'_1 gegen Lg und L'_2 gegen Lg' kann die primäre oder sekundäre Rückkoppelung vermehrt oder vermindert werden, so daß die eine oder die andere überwiegt. In den Figuren 23—25 sind eine Reihe von Versuchsergebnissen wiedergegeben bei sonst gleicher Anordnung wie früher in Fig. 7, wobei die sekundäre Rückkoppelung allmählich verstärkt wurde.

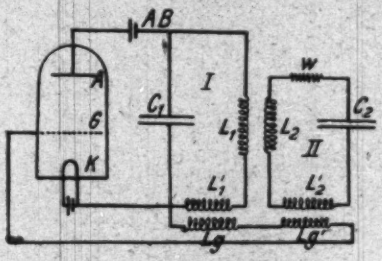


Fig. 22.

Die Wirkung dieser zusätzlichen sekundären Rückkoppelung ist die, daß die Ziehschleife nicht mehr symmetrisch um die

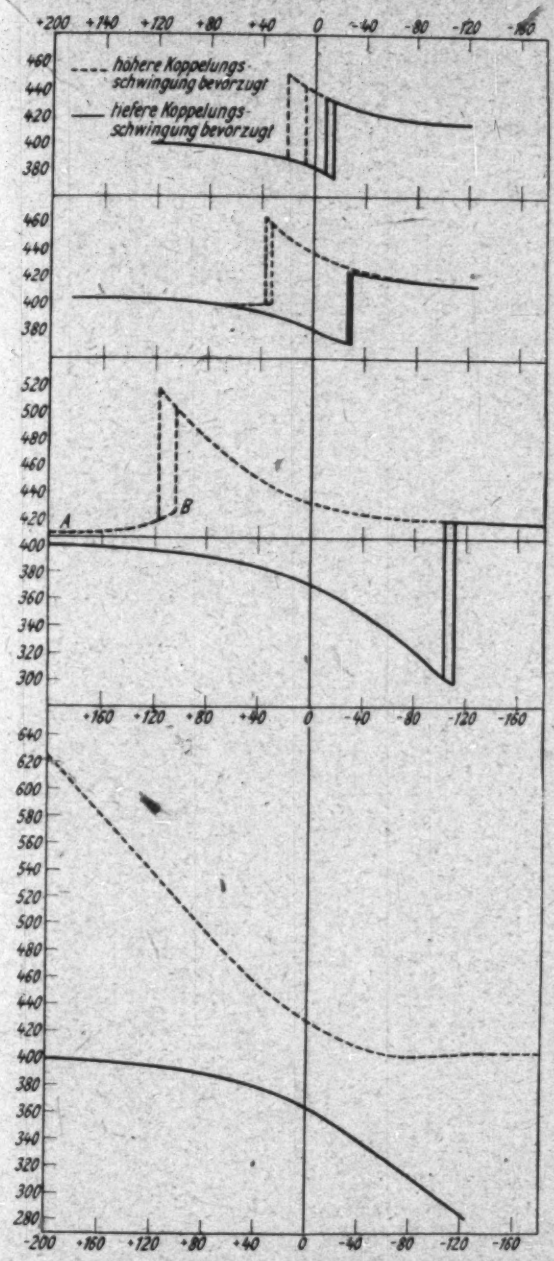


Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Resonanzstelle herumliegt, sondern es bleibt die betreffende Koppelungsschwingung weit über die Stelle der Resonanz hinaus

erhalten, die Ziehschleife ist nach rechts oder links von der Resonanzstelle fort verschoben; und zwar kann man durch Umtauschen der Zuleitungen der Spule L'_2 je nach Wunsch sowohl die höhere wie die tiefere Koppelungsschwingung bevorzugen, so daß die Verschiebung nach rechts oder nach links erfolgt. Bei starker sekundärer Rückkoppelung kann die Verschiebung der Ziehschleifen sehr groß werden. In dem Beispiel der Fig. 25 erfolgen die Tonsprünge statt an der Resonanzstelle (405 Schwingungen) bei dem Ton 295 bzw. 510. Die ganze Form der Kurven entspricht dem Bilde der Fig. 21, das mit der einschlagenden und ausschlagenden Zunge gewonnen wurde.

Das Ziehen ist in diesen Beispielen ziemlich klein. Man kann durch Wahl einer Röhre mit steilerer Charakteristik — A.-E.-G.-Röhre — auch breitere Ziehschleifen erreichen. In Fig. 19b (S. 658) ist der Versuch gemacht worden, durch passende Rückkoppelung, Koppelung, Dämpfung usw. das Bild der unsymmetrischen Ziehschleife der Zungenpfeife (Fig. 19a) möglichst genau nachzubilden.

Um die Vorgänge zu erklären, soll nun noch der extreme Fall untersucht werden, bei dem die Gitterkoppelung mit dem

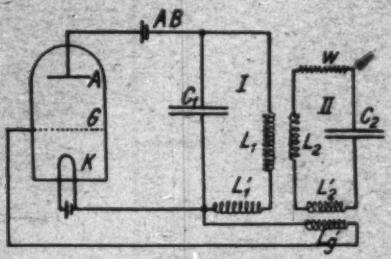


Fig. 27.

primären Kreis ganz aufgehoben ist und nur noch der Sekundärkreis mit dem Gitter gekoppelt ist. Diese Anordnung läßt sich bei Röhrensendern ohne weiteres realisieren (Fig. 27), während der analoge Fall bei der Zungenpfeife natürlich nicht herstellbar ist.

Der Vorgang ist bei reiner sekundärer Rückkoppelung folgender: Die Gitterspannung unterstützt bei richtiger Phase die Schwingungen im Primärkreis, bei entgegengesetzter Phase

unterdrückt sie eine etwa vorhandene Schwingung.[1]) Bei primärer Rückkoppelung werden beide Koppelungsschwingungen entweder unterstützt oder unterdrückt: sie sind um die Resonanz herum gleichberechtigt. Anders bei sekundärer Rückkoppelung. Hier kommt es auf die Phasendifferenz der Schwingung im primären und sekundären Kreis an: bei der tieferen Koppelungsschwingung ist die Phase im Sekundär- und Primärkreis gleich, bei der höheren entgegengesetzt. Demnach ist auch die durch die sekundäre Rückkoppelung bewirkte Gitterspannung bei den beiden Koppelungsschwingungen entgegengesetzt gerichtet: wird im Primärkreis die eine durch die Gitterspannung unterstützt, so wird die andere unterdrückt und umgekehrt. Es kann mithin immer nur eine der beiden Koppelungsschwingungen auftreten. Durch Umschalten der Spule L'_2 wird die Phase der Gitterspannung um 180° geändert, man kann also durch Umschalten entweder die eine oder die andere Koppelungsschwingung erhalten.

In Fig. 26 (S. 661) sind die Ergebnisse an dem Röhrensender mit rein sekundärer Rückkoppelung wiedergegeben. Es tritt entsprechend dem eben Gesagten immer nur eine der beiden möglichen Koppelungsschwingungen auf, ein Umspringen und Ziehen findet nicht statt. Die beiden Tonkurven entsprechen im allgemeinen den theoretischen Koppelungsschwingungen der Fig. 7a. Die Abweichungen dürften damit zusammenhängen, daß, um die zur Unterhaltung der Schwingung in dem weiten Tonbereich notwendige Rückkoppelung zu erzielen, ein Eisenkern in der Koppelungsspule verwandt wurde.

Da diese Methode zur Vermeidung des unbequemen Ziehens und der Labilität der Wellenlänge für die drahtlose Telegraphie von Bedeutung sein dürfte, so bedarf es noch einer näheren Untersuchung der Vorgänge bei Hochfrequenz, über die in Kürze von anderer Seite berichtet werden soll.

Ist, wie bei den vorhergehenden Versuchen, gleichzeitig primäre und sekundäre Rückkoppelung vorhanden, so ist diejenige der beiden Koppelungsschwingungen, bei der die beiden Rückkoppelungen sich unterstützen, bevorzugt, die andere, bei

1) Vgl. z. B. M. Vos und R. Ziegler, Jahrb. d. drahtl. Telegr. 14. S. 585. 1920.

der sie gegeneinander arbeiten, benachteiligt. Demnach wird auch der Umsprung nicht in der Umgebung der Resonanz erfolgen, sondern, je nachdem die bestehende Schwingung die benachteiligte oder bevorzugte Koppelungsschwingung ist, vor oder nach der Resonanz. Betrachten wir z. B. die Fig. 25 und nehmen an, es sei die tiefere Koppelungsschwingung — ausgezogene Kurve — die bevorzugte, so erfolgt der Umsprung bei allmählichem Vertiefen des sekundären Systems nicht für den Ton 406 in der Umgebung der Resonanz, sondern erst, nachdem man das Sekundärsystem noch über 100 Schwingungen tiefer gestimmt hat, bei dem Ton ca. 295. Erhöht man nun bei der gleichen Anordnung den Ton des sekundären Systems, so wird die gleiche Kurve rückwärts zurückgelegt, nur erfolgt der Umsprung von der hohen auf die tiefe Koppelungskurve infolge des Ziehens etwa 7 Schwingungen später. Schaltet man L'_2 um, so wird die höhere Koppelungsschwingung bevorzugt — gestrichelte Kurve —, und die Ziehschleife liegt bei ca. 500 Schwingungen. Eigentümlich ist hier die starke Abweichung des kurzen Stücks AB der tiefen Schwingung von der theoretischen Koppelungskurve.

Das Ganze kann man sich so vorstellen, als ob die die beiden Koppelungskurven verbindende Ziehschleife infolge der sekundären Rückkoppelung auf den beiden Koppelungskurven nach rechts oder links verschoben würde. Der Tonsprung wird dabei vergrößert, weil er nicht mehr an der Resonanzstelle erfolgt, wo die beiden Koppelungskurven sich am meisten nähern. Da der auf der „benachteiligten" Koppelungskurve liegende Teil der Ziehschleife annähernd parallel der Abszissenachse verläuft, der der „bevorzugten" Koppelungskurve angehörende Teil der Ziehschleife schon in das steilere Kurvenstück der Koppelungskurve fällt, so erklärt sich hieraus ohne weiteres die oben besprochene „Unsymmetrie" der Ziehschleife, die besonders bei breiten Ziehschleifen (z. B. Fig. 19b) deutlich hervortritt.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die Erscheinungen an der Zungenpfeife, die kürzlich von einem von uns unter dem Gesichtspunkt der gekoppelten Schwingungen untersucht worden sind,

genau in der gleichen Weise an gekoppelten Röhrensendern auftreten. Es lassen sich mit elektrischen Systemen sogar zahlenmäßig die Tonkurven der Zungenpfeife nachmachen. Auch die Bevorzugung der höheren oder der tieferen Koppelungsschwingung bei der Zungenpfeife und die damit verbundene Unsymmetrie der Ziehschleife lassen sich bei elektrischen Systemen unter Zuhilfenahme „sekundärer Rückkoppelung" reproduzieren. Bei ausschließlich sekundärer Rückkoppelung tritt nur eine der beiden Koppelungsschwingungen auf, so daß kein Umspringen und Ziehen des Tones erfolgt.

Jena, Physikal. Institut d. Universität,
5. April 1920.

(Eingegangen 6. April 1920.)

6. *Die Magnetisierbarkeit von Kupfer-Zinklegierungen;* *von Rudolf H. Weber.*

(Nach Messungen von Konrad Greulich † berichtet.)

1. Herr K. Greulich[1]) hat im Jahre 1914 auf meine Veranlassung eine große Anzahl von Kupfer-Zinklegierungen verschiedenen Prozentgehaltes hergestellt und ihre Magnetisierbarkeit untersucht. Ein Nebenzweck dieser Untersuchungen war es, festzustellen, ob sich aus der Kurve Suszeptibilität – Prozentgehalt vielleicht, ähnlich wie bei der Leitfähigkeitskurve[2]), ein Anhalt ergäbe für die Existenz chemisch bevorzugter Mischungsverhältnisse, wie sie etwa bei chemischen Verbindungen — z. B. Cu Zn — zu erwarten sein würde.

2. Die Legierungen wurden im Rößlerschen Schmelzofen und zwar nach zwei verschiedenen Methoden hergestellt. Einmal wurde das Zink bis zum Schmelzen erhitzt, und dann in kleinen Portionen fein verteiltes Kupfer mit Salmiak gemischt, hinzugegeben, wobei allmählich die Temperatur gesteigert wurde (Tab. I). Diese Methode gestattet, zur Herstellung die Temperatur so niedrig zu halten, wie es der jeweiligen Legierung entspricht. Andererseits wurde Kupfer unter Borax geschmolzen und das Zink hinzugegeben (Tab. II). Hier ist also die Herstellungstemperatur anfänglich stets höher, als die Schmelztemperatur. Ein Übelstand dieser Methode ist es, daß die Herstellung infolge Verbrennens und Verdampfens mit nicht unbeträchtlichem Zinkverlust verbunden ist.

Da Schamotte- und Graphittiegel eisenhaltig sind und Eisen in geringen Mengen an das Schmelzgut abgeben — die Folge

1) K. Greulich, Rostocker Dissertation 1915 und Sitzungsberichte und Abhandl. d. naturforschenden Gesellschaft zu Rostock, N. F. VI, S. 227, 1915. Herr K. Greulich ist im Kriege gefallen, deshalb habe ich die Bearbeitung seiner Untersuchungen für die Annalen übernommen.

2) Vgl. R. H. Weber, Wied. Ann. 66. S. 705. 1899.

hiervon war seinerzeit die Auffindung der „Metamagnetischen Legierungen" durch K. Overbeck[1]) —, was für unsere Zwecke natürlich streng vermieden werden mußte, so wurden zum Herstellen der Schmelzen jetzt Berliner Porzellantiegel von 7,5 cm Höhe und 5,5 cm oberem Durchmesser verwendet, die bequem in den Schmelzraum des Rößlerschen Ofens passen.

Als Grundmetalle wurden gekörntes elektrolytisches Kupfer und granuliertes Zink I der Firma Kahlbaum verwendet. Verkleinerung mittels Eiseninstrumenten war bei diesen unnötig.

3. Der Guß erfolgte in Formen aus Formsand, deren Hohlraum mit aufgeschlämmter Chilekleie überzogen war, teils um die Oberfläche glatter zu gestalten, teils um den direkten Kontakt des noch flüssigen Gusses mit dem etwas eisenhaltigen Formsand zu vermeiden. Die fertigen Legierungen erwiesen sich nach diesen Vorsichtsmaßregeln in der Tat völlig eisenfrei.

Die Formen hatten parallelepipedischen Gußraum $4 \times 15 \times 80$ mm. Die gegossenen Stücke wurden dann etwas kürzer geschnitten (rund 60 mm lang) und die Abfallstücke zur Analyse verwendet. Die weitere Bearbeitung geschah mittels Feilens und Schleifens. Die Legierungen von 60 bis 70 Proz. Zn sind so spröde, daß die Bearbeitung sehr schwierig ist und sich im wesentlichen auf Schleifen beschränken muß, da sie nicht einmal das Einschrauben in einen Schraubstock gestatten.

4. Die Analysen wurden elektrolytisch in der Platinschale aus salpetersaurer Lösung vorgenommen. Außerdem wurden die Dichten im Pyknometer bestimmt, die aber teilweise einen unregelmäßigen Gang aufwiesen (siehe Tabellen), wohl infolge von Gußfehlern. Auf die magnetischen Messungen haben solche Fehler keinen Einfluß, wenn sie nicht zufällig gerade an die Stelle des stärksten Abfalles des magnetischen Feldes zu liegen kommen.

5. Die magnetische Meßmethode war die folgende. Die zylindrischen Polschuhe eines du Boisschen Halbringelektromagneten hatten einen Durchmesser von 4 cm und standen

1) K. Overbeck, Rostocker Dissertation 1914. Sitzungsberichte und Abhandl. d. naturforschenden Gesellschaft zu Rostock, VI, S. 141. 1914. In den Dissertationen von K. Overbeck und K. Greulich findet sich eine ausführlichere Besprechung der Herstellungsmethoden.

sich im Abstand von 6 mm gegenüber. Zwei kleine Messingklötzchen hielten diesen Abstand auch bei Erregung des Magneten konstant. Über den Polschuhen, etwas seitlich von ihnen, endete ein vertikales, von der Zimmerwand aus getragenes, $2^1/_4$ m langes, 5 cm weites Rohr, anfangs aus Glas, später aus Messing, oben und unten mit Glasansätzen (Gaslichtzylindern), in dem zwei parallele Seidenfäden abwärts liefen. An diesen wurden mittels geeigneter Aufhängevorrichtung die Legierungen horizontal befestigt, so daß sie mit einem Ende zwischen die Polschuhe des Magneten ragten. Am anderen Ende der Legierungen waren Glimmerblättchen angeklebt, auf denen ein vertikaler Nadelstrich eingekratzt war. Auf diesen wird ein Ablesemikroskop mit auswechselbarer Vergrößerung eingestellt. Legierung und Aufhängevorrichtung war von einem geeignet gebauten Glasgehäuse umgeben, um Luftströmungen zu vermeiden.[1])

6. Die Suszeptibilität berechnet sich aus der durch Erregung des Magnetfeldes H erfolgenden Verschiebung s^{cm} der Legierung, deren Querschnitt q ist, nach der Formel

$$(1) \qquad \varkappa = \frac{2Mgs}{H^2 q l},$$

worin g die Erdbeschleunigung, l die Länge der Aufhängefäden und M die Masse der Legierung, vermehrt um die Massen der Aufhängevorrichtung, des angeklebten Glimmerblättchens und der Hälfte der Aufhängefäden ist. Das Magnetfeld war durch Vergleich mit einem Gansschen magnetischen Etalon (Firma Edelmann) für verschiedene Stromstärken im Elektromagneten ermittelt worden. Im folgenden wurde durchweg ein Feld von 9000 Gauss verwendet. Das Rückstandfeld war nachgewiesenermaßen zu vernachlässigen. Die Messungen sind der Formel (1) gemäß absolute, worauf aber kein besonderer Wert zu legen ist.

7. Die folgenden zwei Tabellen sowie die Figur auf S. 671 geben die Meßresultate von K. Greulich wieder.

Überraschend ist der abnorm hohe Diamagnetismus der Legierungen um 30 Proz. Kupfer, für die $-\varkappa \cdot 10^6$ über 5 Ein-

1) Eine ausführlichere Besprechung der Methode findet sich in der Dissertation von Overbeck.

heiten erreicht. Es ist das nächst dem des Wismuts (15 Einheiten) der höchste bekannte Wert. An dritter Stelle kommt Antimon mit 4,6 Einheiten.

In der Figur sind die Daten der Tab. I als kleine Kreise, die der Tab. II als Kreuze eingetragen. Die beiden Serien fügen sich, mit geringen Abweichungen, gut ineinander ein. Die Herstellungsweise hat also keinen Einfluß auf die Suszeptibilität.[1])

I. Tabelle für die Legierungen ausgehend vom reinen Zink.

Nr.	% Cu	Dichte	Ablenkung	Vergröß.	Querschnitt	Gewicht + Glimmerblättchen	$-\varkappa \cdot 10^6$
Zn	0,0	7,101	63	41,3×	0,373·1,43	26,7940	0,877
I 1	1,996	7,178	68	41,3	0,380·1,435	28,0017	0,964
I 2	4,160	7,294	77	41,3	0,384·1,435	28,1044	1,084
I 3	5,801	7,361	83	41,3	0,380·1,43	27,9575	1,175
I 4	7,346	7,422	88	41,3	0,380·1,43	27,9069	1,229
I 5	7,77	7,423	88	41,3	0,380·1,50	27,6173	1,244
I 6	9,849	7,437	97	41,3	0,400·1,46	29,7547	1,36
I 7	14,18	6,846	67	26×	0,380·1,48	27,6474	1,54
I 8	15,25	6,816	76	26	0,400·1,46	27,7189	1,584
I 9	18,24	7,099	84	26	0,410·1,465	29,1942	1,787
I 10	20,07	7,237	87	26	0,350·1,37	23,9622	1,926
I 11	23,77	7,656	94	26	0,380·1,40	29,4667	2,39
I 12	25,25	7,565	70	14×	0,320·1,39	28,0586	3,005
I 13	25,66	7,718	71	14	0,320·1,39	23,8791	3,152
I 14	28,15	7,643	90	14	0,380·1,40	27,8055	3,868
I 15	30,03	7,944	106	14	0,390·1,47	31,9112	4,77
I 16	35,65	7,90	99	14	0,380·1,42	32,0578	4,371
I 17	40,60	8,015	40	14	0,420·1,45	33,1005	1,756
I 18	44,95	8,145	36	14	0,360·1,47	29,4038	1,628
I 19	52,52	8,278	31	14	0,360·1,40	29,4559	1,475
I 20	59,63	8,465	26	14	0,350·1,43	28,9304	1,224
I 21	61,47	8,468	25	14	0,380·1,41	31,2996	1,18

8. Die Kurve der Figur macht den Eindruck, als ob sie aus mehreren geradlinigen, durch stetige Übergänge verbundenen Ästen zusammengesetzt sei, doch fallen, abgesehen von einer Stelle, keine ausgezeichneten Punkte an Orte einfacher chemischer Verbindungsmöglichkeiten, besonders auch nicht an die Stelle einer Verbindung CuZn, wo ein solches Zusammentreffen erwartet werden könnte.

Besonders auffallend ist der geradlinige Verlauf der zwei

1) Vgl. K. Overbeck, Ann. d. Phys. 46. S. 680. 1915.

steil ansteigenden Äste der Punkte 1, 2, 3, 4, 5 und 6, 7, 8, 9, 10. Setzt man den Prozentgehalt und die Suszeptibilität

$$p\,\% = x; \quad -x \cdot 10^{-6} = y,$$

so genügen diese Geraden den Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} (1 \text{ bis } 5) & y = 0{,}3639\,x - 6{,}233, \\ (7 \text{ bis } 10) & y = -0{,}4069\,x + 18{,}878, \end{cases}$$

worin die Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sind. Bei letzterer ist der Punkt 6 nicht

II. Tabelle für die Legierungen ausgehend vom reinen Kupfer.

Nr.	% Cu	Dichte	Ablenkung	Vergröß.	Querschnitt	Gewicht + Glimmerblättchen	$-x \cdot 10^6$
II 1	96,78	7,095	40	41,3×	0,390·1,425	36,0729	0,706
II 2	86,05	8,627	45	41,3	0,335·1,40	28,7338	0,759
II 3	64,08	8,365	70	41,3	0,365·1,40	30,1856	1,136
II 4	63,47	8,396	49	26×	0,375·1,40	28,8469	1,160
II 5	55,95	8,369	79	41,3×	0,370·1,43	31,9756	1,807
II 6	54,78	8,278	55	26×	0,335·1,43	28,1543	1,321
II 7	52,52	8,288	56	26	0,355·1,44	30,5732	1,391
II 8	52,22	8,087	63	26	0,365·1,44	29,3918	1,440
II 9	52,03	8,227	60	26	0,360·1,40	29,6678	1,443
II 10	50,89	8,136	70	26	0,345·1,44	28,8797	1,494
II 11	50,20	9,169	60	26	0,340·1,44	28,5435	1,507
II 12	45,32	8,156	35	14×	0,390·1,44	33,9672	1,705
II 13	42,58	8,012	53	14	0,420·1,395	24,7928	1,844
II 14	41,16	8,016	47	14	0,415·1,47	32,0708	1,996
II 15	38,95	7,938	69	14	0,400·1,43	32,1059	3,129
II 16	37,82	7,928	77	14	0,410·1,45	33,7200	3,600
II 17	33,29	7,714	112	14	0,385·1,47	32,9667	5,262
II 18	19,22	7,286	87	26×	0,370·1,465	25,5852	1,812
II 19	17,91	7,301	90	26	0,390·1,445	25,9722	1,789
II 20	16,93	7,299	72	26	0,365·1,46	27,7300	1,642
II 21	12,70	7,111	58	26	0,370·1,445	27,4236	1,336
II 22	9,271	7,221	56	26	0,360·1,45	28,3209	1,169
II 23	5,846	7,187	50	26	0,340·1.445	24,9542	1,122

mit berücksichtigt, weil er möglicherweise schon auf einem stetigen Übergang zwischen beiden Ästen liegt, was übrigens auf die Schlußfolgerung keinen wesentlichen Einfluß hat. Diesen Gleichungen entsprechend sind die beiden Geraden in die Kurve eingezeichnet. Die übrigen geradlinigen Stücke der Kurve sind nach Gutdünken gezogen. Aus ihnen soll auch nichts gefolgert werden.

9. Ob ein solcher stetiger Übergang zwischen diesen zwei Hauptästen überhaupt stattfindet, oder ob sie geradlinig bis zu

ihrem Schnitt weiter verlaufen, läßt sich zurzeit nicht entscheiden. Sicher aber kann man aus diesem Schnittpunkt sehr genau die x-Koordinate, also den Prozentgehalt des Scheitelpunktes ermitteln. Der Schnittpunkt liegt bei

$$\bar{x} = 32{,}776 \text{ Proz.}; \quad \bar{y} = 5{,}694.$$

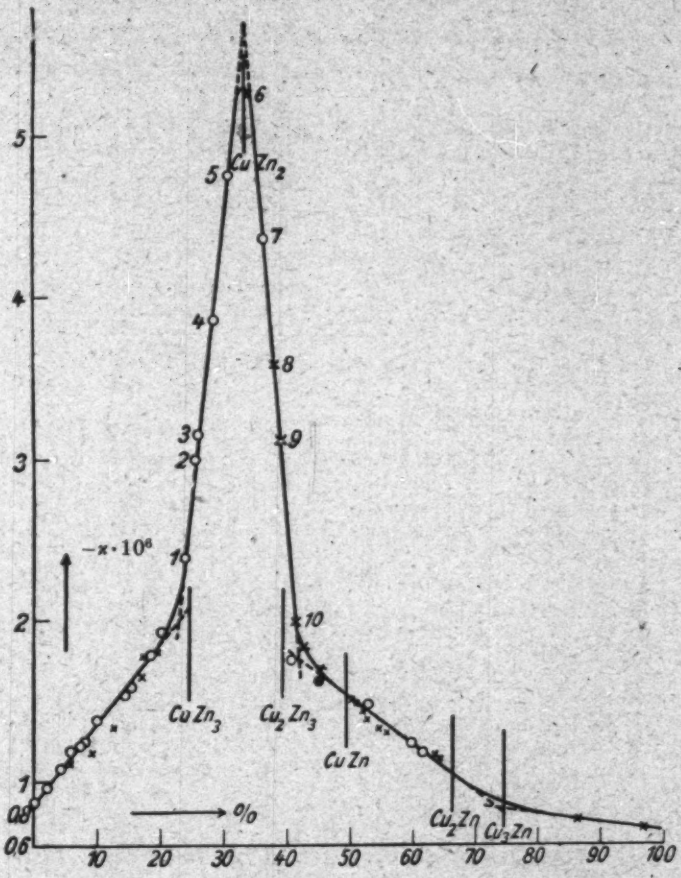


Fig. 1.

Die chemische Verbindung $CuZn_2$ würde einen Kupfergehalt von

$$p = 32{,}716 \text{ Proz.}$$

erfordern. Das stimmt mit obigem Werte $\bar{x}$ so gut überein, daß es schwer wird, an einen reinen Zufall zu glauben.

Nimmt man übrigens den Punkt 6 mit in die Berechnung der Koeffizienten der zweiten Gleichung (2) auf, so wird

$$\bar{x} = 32{,}578; \quad \bar{y} = 5{,}622 .$$

Auch dieser Wert $\bar{x}$ gibt noch innerhalb der Beobachtungsfehler eine vollkommene Übereinstimmung mit p.

10. Die Legierung $CuZn_2$ (32,716 Proz. Cu) hat ein eigenartiges Aussehen. Man könnte sie eher für ein Mineral (Erz) halten, als für ein Metall. Sie ist sehr spröde und kann mit einem Hammerschlag zertrümmert werden. An Zink erinnert sie gar nicht, ist aber noch rein weiß bzw. metallisch grau, während eine 35 prozentige Legierung schon deutlich gelblich ist. Bei 40 Proz. sind die Legierungen auch noch sehr spröde und können mit dem Hammer zerspalten werden. Der Bruch ist glatter als bei $CuZn_2$, sehr schön goldgelb gefärbt und bleibt glänzend, ohne, wie Messing, anzulaufen. CuZn (49,302 Proz. Cu) ist richtiges Messing.

11. Zusammenfassung: Während bisherige Leitfähigkeitsbestimmungen an CuZn-Legierungen für eine Bevorzugung der Legierung CuZn sprechen, lassen die Untersuchungen der Magnetisierbarkeit eher eine Besonderheit für das Mischungsverhältnis $Cu\text{-}Zn_2$ vermuten, dem ein sehr großer Diamagnetismus (mindestens $\varkappa = -5{,}3 \cdot 10^{-6}$) zukommt. Weitere Untersuchungen zur Klärung dieser Frage werden hier vorgenommen.

Rostock, 8. Februar 1920.

(Eingegangen 13. Februar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

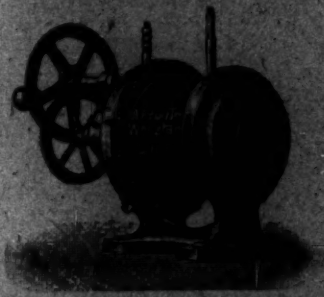
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

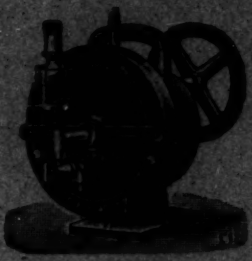
System Pfeiffer, D. R. P.



Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

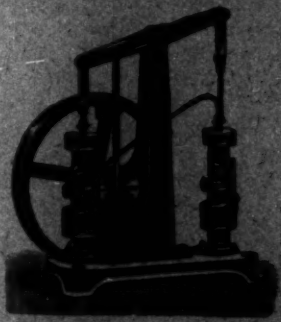
Neukonstruktionen nach Angabe.

System Gaede, D. R. P. angemeldet



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



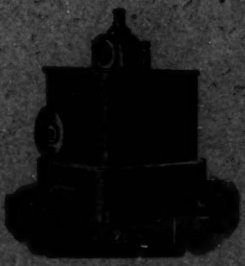
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieberluftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

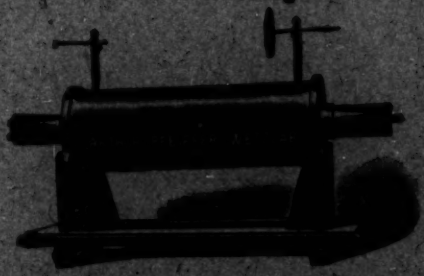
Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene

Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

		Seite
1.	P. Krüger. Theorie der Schneidentöne. (Hierzu Tafel I.)	573
2.	A. Rubinowicz. Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (I. Mitteilung.)	691
3.	A. Rubinowicz. Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (II. Mitteilung.)	716
4.	G. Hoffmann. Zur experimentellen Entscheidung der Frage der Radioaktivität aller Elemente	738
5.	Max Wien. Bemerkung zu der Arbeit von W. Hahnemann und H. Hecht: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“	759

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1920. № 16.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Theorie der Schneidentöne;* *von F. Krüger.*

(Hierzu Tafel I.)

Die Entstehungsweise der Schneidentöne ist trotz erheblicher Fortschritte in ihrer Erkenntnis noch keineswegs völlig geklärt. R. Wachsmuth[1]) faßt das Resultat seiner und seiner Schüler[2]) Arbeiten über Schneidentöne folgendermaßen zusammen: „Nach alledem wären also die Schneidentöne Töne, welche aus der Störung des Gleichgewichts einer frei ausströmenden Luftlamelle durch eine Einlage entstehen. Durch Stauung des Luftstromes an der (stumpfen) Kante, welche demselben entgegensteht, wird eine Pendelung um die Gleichgewichtslage eingeleitet, bei welcher die Lamelle ihrer ganzen Länge nach um die Einlage hin- und herpendelt oder — bei größerem Abstande — in Unterabteilungen (einzelne Bände) zerfällt und sich in diesen gegen die Einlage bewegt.“ Wie schon W. König[3]) betont, ist hiermit ein klarer Einblick in den Mechanismus dieser Tonerzeugung noch nicht gewonnen: Die Ursache der Pendelung ist nicht aufgeklärt, ferner steht die Deutung der empirisch gefundenen Tatsache der Konstanz des Produktes aus der Tonhöhe und Schneidenabstand noch aus, ebenso die des mehrfachen plötzlichen Springens der Tonhöhe in die höhere Oktave bei Vergrößerung des Schneidenabstandes. König[3]) selbst hat dann eine Theorie dieser letzteren Erscheinung zu entwickeln gesucht, die auf der Rückwirkung der Stauung der Lamelle an der Schneide auf den Austritt der Flüssigkeit aus dem Spalt beruht; aber er gibt selbst zu, daß diese Theorie die Tatsache nicht erklärt, daß

1) R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. (4) 14. S. 469. 1904.

2) Literatur vgl. R. Göller, Dissertation Gießen 1912, und bei J. Rieht, Dissertation Gießen 1917.

3) W. König, Physikal. Zeitschr. 13. S. 1053. 1912.

die Tonbildung erst von einem bestimmten, nicht zu kleinen Schneidenabstande an erfolgt, und ferner die Ursache der Oktavensprünge im Dunkeln läßt. Der Erklärung der Schneidentöne durch Wirbelbildung, die schon durch die photographischen Schlierenaufnahmen der Schneidentöne durch Wachsmuth nahegelegt war und auf die in der Diskussion zu dem Königschen Vortrage mehrfach hingewiesen wurde, glaubte sich König unter Hinweis auf die Schwierigkeiten der Deutung der Gesetzmäßigkeiten der Schneidentöne auf dieser Grundlage nicht anschließen zu können.

Die von E. Schmidtke[1]) im hiesigen Institut an einer ausströmenden Wasserlamelle angestellten Messungen haben die völlige Analogie der Pendelungen der Wasserlamelle beim Auftreffen auf eine Schneide mit den Schneidentönen einer Luftlamelle erwiesen und den Zusammenhang der Pendelungen mit der Wirbelablösung sichergestellt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich auf dieser Basis eine klare Theorie der Schneidentöne geben läßt.

Wie früher[2]) gezeigt wurde, besitzt eine frei ausströmende Flüssigkeitslamelle infolge der abwechselnd rechts und links am Spalt erfolgenden Wirbelablösung eine pendelnde Bewegung, die die Ursache der sogenannten Spalttöne bildet. Die von W. Kohlrausch[3]) gemessene Tonhöhe der Spalttöne ließ sich aus den Konstanten der an der Wasserlamelle beobachteten Wirbelbildung berechnen.

Bezeichnet u die Wanderungsgeschwindigkeit des Wirbelsystems, l den Abstand zweier aufeinander folgender Wirbel, so gilt für die Tonhöhe N, falls sie eben der Anzahl der in der Zeiteinheit abgelösten Wirbel gleichgesetzt wird,

$$N = \frac{u}{l},$$

eine Formel, die übrigens formal mit der bekannten Wellengleichung $N = \frac{v}{\lambda}$ (λ = Wellenlänge, v = Fortpflanzungsgeschwindigkeit) übereinstimmt. Da das Verhältnis der Wirbelgeschwin-

1) E. Schmidtke, Ann. d. Phys. 60. S. 715. 1919.
2) F. Krüger u. E. Schmidtke, Ann. d. Phys. 60. S. 701. 1919.
3) W. Kohlrausch, Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. 13. S. 545. 1881.

digkeit u zur Strömungsgeschwindigkeit U konstant ist und sich experimentell zu 0,23 ergab, da ferner das ebenfalls konstante Verhältnis des Abstandes l zweier aufeinander folgender Wirbel zu der Spaltbreite D gleich 4,9 bestimmt wurde, so ergab sich in guter Übereinstimmung mit den akustisch bestimmten Werten

$$\frac{N \cdot D}{U} \cong 0{,}05 \qquad \text{oder} \qquad N \cong 0{,}05 \cdot \frac{U}{D}.$$

Wird der frei ausströmenden Flüssigkeitslamelle ein Keil oder eine Schneide gegenübergestellt, so erfolgt, falls der Schneidenabstand nicht zu klein ist, ein Pendeln der Lamelle von der einen auf die andere Seite der Schneide, wobei die, wie bei der freien Lamelle, abwechselnd rechts und links am Spalt abgelösten, wenn auch erst in einiger Entfernung vom Spalt, meistens erst nahe an der Schneide deutlich sichtbar werdenden rechts- bzw. linksdrehenden Wirbel sich durch dies eben durch sie bewirkte Pendeln an der Schneide so teilen, daß alle rechts drehenden Wirbel an der rechten Seite der Schneide, alle links drehenden Wirbel an der linken Seite der Schneide entlang wandern, wie das in der Arbeit von E. Schmidtke eingehend beschrieben ist. Bei diesem Vorbeipendeln der Lamelle an der Schneide werden aber, wie in der genannten Arbeit weitergefunden ist, an der Schneide neue Wirbel gebildet, ganz analog wie die Wirbel an einem Stabhindernis und bei den sog. Hiebtönen gebildet werden. Diese Wirbel haben jeweils entgegengesetzten Drehungssinn wie die vor der Schneide durch die Wirkung des Spalts entstandenen. Sie ergänzen die einseitig drehenden Spaltwirbel auf jeder Seite der Schneide zu einem dem v. Kármánschen ähnlichen Wirbelsystem abwechselnd rechts- und linksdrehender Wirbel. Treten diese an der Schneide entstandenen Wirbel wegen der Reibung an der Keilfläche auch schwächer in Erscheinung, so sind sie doch bei stärkerem Strömen der Lamelle deutlich zu erkennen.

Die Rückwirkung dieser mit dem Auftreffen eines Spaltwirbels auf die Schneide verbundenen Stauung führt nun zu einer resonanzartigen Beeinflussung der Frequenz der Wirbelablösung. Ein Anlaß zur Bildung eines neuen Wirbelkeimes am Spalt wird jedesmal gegeben sein, wenn die Stauung des vorhergehenden Spaltwirbels mit gleichem Drehungssinn an der

Schneide rücklaufend am Spalt angelangt ist, eine Stauung, die ja auch mit einer Seitwärtsablenkung der Flüssigkeitslamelle und also einer Knickung derselben am Spalt verbunden ist. Die Dauer der Periode dieses erregenden Vorganges oder der damit identischen Periode der erzwungenen Schwingung ist durch die Summe der Laufzeiten gegeben, welche einerseits ein Wirbel braucht, um die Strecke vom Spalt zur Schneide zu durcheilen, und welche andererseits die Stauungswelle zum Durchlaufen derselben Strecke, aber in umgekehrter Richtung, von der Schneide zum Spalt, benötigt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stauungswelle erfolgt mit der für die jeweilige Flüssigkeit charakteristischen Schallgeschwindigkeit c, welche natürlich groß gegenüber der Wanderungsgeschwindigkeit u des Wirbelsystems ist. Bedeutet also f den Schneidenabstand, so ist die Dauer T der genannten Periode

$$T = \frac{f}{c} + \frac{f}{u} = f \cdot \frac{u + c}{u \cdot c} = \frac{f}{u},$$

da u, wie erwähnt, gegen c zu vernachlässigen ist. Die Frequenz N der Wirbelablösung oder die damit identische Höhe des Schneidentones ist also durch die Beziehung

$$N = \frac{1}{T} = \frac{u}{f}$$

gegeben.

Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Spaltwirbel mit gleichem Drehungssinn ist hiernach also stets einfach gleich dem Schneidenabstand f; er ist unabhängig sowohl von der Wirbelgeschwindigkeit u wie von der Spaltbreite D. Bei der frei ausströmenden Lamelle ohne entgegenstehende Schneide ist der Abstand l zweier aufeinander folgender Wirbel mit gleichem Drehungssinn zwar auch unabhängig von der Wirbelgeschwindigkeit u, aber abhängig von der Spaltbreite D, und zwar dieser direkt proportional ($l = 4{,}9\ D$). Hier aber ist der Wirbelabstand von der Spaltbreite unabhängig und wird durch den Schneidenabstand bedingt; hier ist also $l = f$. Zu bemerken ist noch, daß, damit die Frequenz N eines Schneidetones und eines Spalttones gleich ist, nicht nur der Schneidenabstand gleich dem Wirbelabstand bei der frei ausströmenden Lamelle ($l = 4{,}9\ D$), sondern daß auch die Wirbelgeschwindigkeit in beiden Fällen dieselbe sein muß. Dies bedeutet aber

nicht etwa auch Gleichheit der Ausströmungsgeschwindigkeit U, da das Verhältnis der Wirbelgeschwindigkeit u zur Ausströmungsgeschwindigkeit U, wie noch des weiteren besprochen werden wird, nicht dasselbe ist, sondern im ersten Falle etwa gleich 0,4, im letzteren etwa gleich 0,2 ist.

Die Vorstellung einer ähnlichen Rückwirkung der Stauung auf den Ausströmungsvorgang am Spalt ist wohl zuerst bei Lord Rayleigh[1]) angedeutet. Unabhängig davon und in quantitativer Form ist sie jedoch von W. König entwickelt.

Der wesentliche Unterschied der hier gegebenen Analyse des Vorgangs gegenüber der von König und Lord Rayleigh besteht jedoch einmal darin, daß hier die Wirbelgeschwindigkeit u als maßgebender Faktor auftritt, während bei jenen die Strömungsgeschwindigkeit U der Lamelle selbst an deren Stelle steht; diese beiden Geschwindigkeiten sind aber durchaus verschieden, die Wirbelgeschwindigkeit ist immer sehr viel kleiner als die Strömungsgeschwindigkeit und beträgt, wie unten gezeigt, weniger als die Hälfte der letzteren.

Der zweite, ebenso wichtige Unterschied ist darin zu erblicken, daß nach der hier gegebenen Theorie der durch die Laufzeiten bedingte Wirbelabstand f sich nach Analogie des Vorganges der erzwungenen Schwingungen an die Stelle des natürlichen Wirbelabstandes l der frei ausströmenden Lamelle setzt, dieser also ihren eigenen Wirbelabstand aufzwingt. Der Fall der Resonanz oder des stärksten Pendelns wird also vorhanden sein, wenn der natürliche Wirbelabstand l gleich dem Schneidenabstand f ist. Wegen der starken Dämpfung der Eigenschwingung der frei ausströmenden Lamelle wird die Resonanzkurve jedoch sehr flach und breit sein, also auch bei erheblicher Differenz von l und f wird noch ein starkes Mitschwingen stattfinden. Mit zunehmender Differenz von beiden wird die erzwungene Schwingung schwächer und schwächer. Wird mit wachsenden Schneidenabstand f der Wirbelabstand der erzwungenen Pendelung immer größer und nähert sich dem Doppelten des Wirbelabstandes bei der frei strömenden Lamelle, so wird der „Zwang" für den erzwungenen Wirbelabstand viel geringer, wenn dieser Wirbelabstand dadurch auf die Hälfte

1) Lord Rayleigh, Theory of sound, vol. II, p. 412. London 1896.

und damit wieder nahe auf den Wert des Wirbelabstandes der frei pendelnden Lamelle gebracht wird, daß in der Mitte zwischen dem Wirbel an der Schneide und dem Spalt ein neuer Spaltwirbel auftritt, so daß jetzt $l = \frac{f}{2}$ wird und somit $N = \frac{2}{f} \cdot u$. Die Tonhöhe ist damit plötzlich um eine Oktave gesprungen. In Übereinstimmung mit dieser Resonanztheorie des Oktavensprunges steht die Tatsache, daß der Schneidenton nach dem Oktavensprunge erheblich lauter ist als vor demselben, eben wegen der besseren Resonanz mit dem Spaltton, und mit wachsendem Schneidenabstand und sinkender Tonhöhe stetig in seiner Intensität abnimmt. Mit zunehmendem Schneidenabstand tritt dann wieder eine „erzwungene" Vergrößerung des Wirbelabstandes und damit umgekehrt proportional ein Sinken der Tonhöhe ein. Wegen der erwähnten starken Dämpfung der Eigenschwingung der frei ausströmenden Lamelle und der damit verbundenen flachen Resonanzkurve findet aber ein teilweises Überdecken der Schwingungsintervalle I und II statt; d. h. es gibt gewisse Werte des Schneidenabstandes, in denen sowohl der Grundton wie seine Oktave auftreten, dies Intervall des Schneidenabstandes erstreckte sich z. B. bei einem Versuch von R. H. Göller (a. a. O.) von 0,554 bis 0,616 cm (Spaltdicke D: 1 mm). Man erhält den einen oder den anderen Ton, je nachdem man die Tonhöhe durch Vergrößerung im I. Intervall oder durch Verkleinerung des Schneidenabstandes im II. Intervall ändert. Dieser Oktavensprung wird sich wiederholen, so oft ein ganzzahliger Bruchteil des Schneidenabstandes angenähert gleich dem Wirbelabstand bei der frei ausströmenden Lamelle geworden ist. Die Erklärung der Oktavensprünge ergibt sich hier also als unmittelbare Konsequenz der theoretischen Grundvorstellungen.

Es ist hiernach ferner verständlich, weshalb der Schneidenabstand nicht unter einen gewissen Minimalwert $f_{\min}$ sinken darf, damit noch ein Ton entstehen kann. Der natürliche Wirbelabstand der frei ausströmenden Lamelle läßt sich eben durch den Zwang der regulierenden Wirkung der Stauung der Schneide nicht unter einen gewissen Wert herabdrücken, dann versagt die Wirbelbildung. Wie Versuche von Göller (a. a. O.) lehren,

ist diese untere Grenze des Scheidenabstandes etwa gleich dem halben Abstand zweier aufeinander folgender Wirbel mit gleichem Drehungssinn bei der frei ausströmenden Lamelle, also etwa $f_m = \frac{l}{2}$; für einen Spalt von der Breite 1 mm findet Göller nämlich diesen Minimalwert zu 2,86 mm, während $\frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}9\, D$ = 2,45 mm ist. Aus den Versuchen von J. Rieth ergibt sich jedoch, daß der Minimalabstand f_m für den Beginn der Tonentstehung näher bei l, dem Wirbelabstand der frei ausströmenden Lamelle selbst liegt. Wegen der Stauungsrückwirkung der Schneide kann der für die Ausbildung der ersten Wirbel erforderliche Raum bei der freien Lamelle nur ein angenähertes Maß für den für die Wirbelbildung erforderlichen Minimalraum bei den Schneidentönen bilden.

Aus der Gleichung $N = \frac{u}{f}$ würde sich nun sogleich die Abhängigkeit der Tonhöhe N der Schneidentöne oder der Frequenz der Wirbelablösung von der Strömungsgeschwindigkeit U ergeben, wenn die Beziehung zwischen der Wirbelgeschwindigkeit u und der Strömungsgeschwindigkeit U bekannt wäre. Für die Wirbelablösung hinter stabförmigen Hindernissen ist nach den Beobachtungen von Bènard[1]) und nach den theoretischen Betrachtungen von v. Kármán[2]) das Verhältnis $\frac{u}{U} = a$ eine Konstante; dasselbe gilt mit einem etwas anderen Wert der Konstanten für die Wirbelbildung an Spalten.[3]) Es erscheint daher berechtigt, die Konstanz des Verhältnisses $\frac{u}{U}$ auch hier für die Schneidentöne anzunehmen; die unten folgenden direkten Messungen von u und U werden diese Annahme experimentell bestätigen. Wir setzen daher $u = a' \cdot U$. So ergibt sich für die Frequenz der Schneidentöne

$$N = \frac{u}{f} = \frac{a' \cdot U}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{N \cdot f}{U} = a'.$$

---

1) H. Bènard, Compt. Rend. 147. S. 839. 1908.

2) Th. v. Kármán, Göttinger Nachricht. S. 541. 1912; Th. v. Kármán u. A. Rubach, Phys. Zeitschr. 13. S. 49. 1912.

3) F. Krüger u. E. Schmidtke, Ann. d. Phys. 60. S. 701. 1920.

Diese Konstante a' hat also physikalisch die Bedeutung des Verhältnisses der Wirbelgeschwindigkeit zur Strömungsgeschwindigkeit, sie ist nach den Beobachtungen ungefähr gleich 0,4. Der genaue Wert 0,50, wie ihn die Königsche Theorie verlangt, ist hiernach für die Konstante a' jedenfalls nicht zu erwarten.

Im zweiten Intervall ist analog

$$N = \frac{u}{\frac{f}{2}} = \frac{2u}{f} = \frac{2U \cdot a'}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{N \cdot f}{2U} = a';$$

entsprechend ergibt sich für das dritte Intervall $\frac{Nf}{3U} = a'$ usw.

Über den Wert der Konstanten $a' = \frac{u}{U}$ läßt sich theoretisch zurzeit nichts irgendwie Sicheres voraussagen. Experimentell findet sich ein Wert, der etwa bei 0,4 liegt; er ist ungefähr das Doppelte des entsprechenden Wertes, der bei freier Strömung an einer Platte zu 0,20, an einem Stabe zu 0,14, an einem Spalt zu 0,23 bestimmt ist. Darf man die v. Kármánsche Formel $u = \frac{\Gamma}{l\sqrt{8}}$ (I = Wirbelstärke), auch hier heranziehen, so liegt die Deutung nahe, daß die Verdoppelung von $\frac{u}{U}$ durch eine Verminderung des l auf seinen halben Wert verursacht wird. Denn infolge der geschilderten Neubildung von Wirbeln am Keil wird die Gesamtzahl der Wirbel pro Längeneinheit verdoppelt. Übrigens beträgt in der noch nicht aufgerollten Grenzschicht, in welcher sich ein kontinuierliches System linearer Elementarwirbel mit der Geschwindigkeit u fortbewegt, der Wert von $\frac{u}{U}$ 0,5.

Von der Veränderung des Wirbelabstandes durch Änderung des Schneidenabstandes darf jedoch das Verhältnis $\frac{u}{U}$ nicht abhängen, wenn man annehmen darf, daß bei sonst ungeänderten Verhältnissen pro Längeneinheit der Trennungsfläche der Lamelle und ruhender Flüssigkeit dieselbe Wirbelstärke gebildet wird. Dann wächst eben die Wirbelstärke Γ in demselben Verhältnis wie der Wirbelabstand l, und die Ge-

schwindigkeit des Wirbelsystems $u = \frac{\Gamma}{l\sqrt{8}}$ bleibt konstant, also auch das Verhältnis $\frac{u}{U}$. Die Messungen, die natürlich auch hier letzten Endes allein entscheidend sein können, bestätigen in der Tat die Unabhängigkeit des Verhältnisses $\frac{u}{U}$ von dem Wirbelabstand l bei den Schneidentönen. Dies gilt auch noch, wenn bei dem Oktavensprung plötzlich pro Längeneinheit doppelt so viel Wirbel gebildet werden. Dann bleibt das Verhältnis $\frac{u}{U}$ konstant, da mit dem Wirbelabstand l auch die Wirbelstärke Γ auf die Hälfte sinkt, so daß wieder die Wirbelgeschwindigkeit $u = \frac{\Gamma}{l\sqrt{8}}$ und damit das Verhältnis $\frac{u}{U}$ konstant bleibt. Diese Konstanz des Verhältnisses beim Oktavensprung, also beim Übergang vom I. in das II. Intervall ist auch durch direkte, unten wiedergegebene Messungen festgestellt.

Die Richtigkeit dieser Theorie ist zuerst durch den Nachweis zu erbringen, daß im I. Intervall der Wirbelabstand gleich dem Schneidenabstand, im zweiten gleich der Hälfte des Schneidenabstandes ist usw. Es wurden zu diesem Zweck mit dem in der Arbeit von E. Schmidtke beschriebenen Strömungsapparat neue Aufnahmen gemacht, um recht deutliche Wirbelbilder des Vorganges zu erhalten. Nach mehrfachen Versuchen gelang es, gegenüber den früheren wesentlich schönere Wirbelbilder zu erhalten dadurch, daß zunächst statt Lykopodiumpulver gewöhnliche, nicht entfettete, also auf der Oberfläche schwimmende Aluminiumbronze verwandt wurde. Ferner wurde das Wasser mit Kaliumpermanganat tief rot gefärbt; auf diesem dunklen Untergrund hebt sich das glänzende Aluminiumpulver leichter ab und läßt die Wirbel mit großer Deutlichkeit hervortreten. Man streut das Pulver entweder in den Ausströmungskasten oder in die Nähe des Spaltes in das Wasser im großen Reservoir, es braucht dann lange Zeit nicht erneuert zu werden. Der Spalt und der Keil wurden dann soweit abgeschnitten, daß sie nur wenige Millimeter aus dem Wasser herausragten, so daß ihre Umrisse in der Photographie sehr scharf wurden. Eine so für das I. Intervall er-

haltene Photographie, die mit dem gleichen Apparat in derselben Weise durch Belichtung mit Blitzlichtpulver in der Arbeit von E. Schmidtke aufgenommen wurde, zeigt Fig. 1 (vgl. Taf. I).

Man sieht auf beiden Seiten des Keils, der einen Winkel von 52° und eine Seitenlänge von 7 cm hat, je drei Wirbel. Der Abstand je zweier dieser Wirbel ist gleich 13,8, 13,1, 11,5 und (10,1) mm, im Mittel also, wenn man den letzten offenbar infolge einer Störung herausfallenden Wert fortläßt, gleich 12,8 mm. Der Schneidenabstand der Figur ist gleich 13 mm; also ist in der Tat recht genau der Wirbelabstand gleich dem Schneidenabstand. Die erst an der Schneide gebildeten neuen Wirbel sind in der Figur kaum zu sehen, sie sind, wie schon erwähnt, natürlich durch die Reibung an der Wand stark gedämpft. Man kann sie jedoch bei direkter Beobachtung mit dem Auge gut erkennen, wenn man die Flüssigkeit mit großer Geschwindigkeit ausströmen läßt, so daß starke Wirbelbildung auftritt; für die Photographie ist aber solche schnelle Strömung weniger geeignet.

Fig. 2 und 3 (vgl. Taf. I) zeigen die analogen Aufnahmen für das II. Strömungsintervall. Man sieht, besonders gut bei der direkten Beobachtung mit dem Auge, aber auch recht gut auf der Aufnahme 2, daß hier ein Wirbel schon in der Mitte zwischen Spalt und Schneide vorhanden ist. Die Wirbel erhalten sich nicht lange, doch sind auf jeder der beiden Aufnahmen wenigstens zwei deutlich erkennbar, deren Abstand gemessen werden kann. Es ergibt sich so für den Wirbelabstand auf der Fig. 2 (vgl. Taf. I) der Wert 10 mm, auf der Fig. 3 (vgl. Taf. I) der Wert 9,2 mm, im Mittel also 9,6 mm. Der Schneidenabstand beträgt 20 mm. Hier ist also in der Tat der Wirbelabstand sehr nahe gleich dem halben Schneidenabstand.

Zur weiteren Bestätigung der Theorie müssen nun die oben abgeleiteten Beziehungen zwischen der Wirbelfrequenz (Tonhöhe) N, dem Schneidenabstand f und der Wirbelgeschwindigkeit u bzw. der Strömungsgeschwindigkeit U abgeleiteten Beziehungen geprüft werden; d. h. also, die Gleichungen $N \cdot f = u$ und $\frac{N \cdot f}{U} = a' = \frac{u}{U}$.

Zur Messung der in diesen Gleichungen vorkommenden Größen diente die schon von E. Schmidtke benutzte und beschriebene Apparatur. Die Pendelungsfrequenz N der Flüssigkeitslamelle wurde mit der Stoppuhr gemessen, indem etwa sechsmal oder öfters die Zeit für 20 Pendelungen bestimmt wurde. Zur Messung der Wirbelgeschwindigkeit u waren an der einen Seite des als Schneide dienenden Keils über der Wasseroberfläche in etwa 1 cm Abstand voneinander zwei Drähte befestigt, über die quer in Abständen von je 1 cm dünne Drähte gelötet waren. Dann wurde die Zeit, bei diesem Versuch zunächst mit der Stoppuhr, gemessen, die ein Wirbel zum Durchlaufen der durch diese Querdrähte fixierten Strecke von 5 cm gebrauchte. Die Spaltbreite des wie bei Schmidtke aus zwei Blechen unter einer Neigung von 70° bestehenden Spaltes betrug 1,9 mm; der hier benutzte Keil hatte, wie schon erwähnt, einen Winkel von 52° und eine Seitenlänge von 7 cm.

Die Strömungsgeschwindigkeit wurde zunächst wie bei E. Schmidtke indirekt bestimmt, indem die Geschwindigkeit U' im Ausströmungskasten gemessen wurde, aus der sich durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Kastenbreite zur Spaltbreite die Ausströmungsgeschwindigkeit U im Spalt selbst berechnet. Es war jedoch sehr schwierig und unsicher, U' durch Messen der Geschwindigkeit suspendierter Aluminiumteilchen zu bestimmen, da diese Teilchen doch ziemlich schnell zu Boden sanken. Messungen an auf der Flüssigkeitsoberfläche schwimmenden Teilchen etwa von Lykopodium oder nicht entfettetem Aluminiumpulver waren, wie schon Schmidtke betont, ganz unmöglich, da die Oberflächenschicht in dem Kasten bisweilen völlig stagniert. Es wurden daher besondere Schwimmer konstruiert, zunächst aus einer kleinen Glühlampe, wie sie für Taschenlampenbatterien dienen, dann aus einer größeren geblasenen Glaskugel von etwa 2 cm Durchmesser. Sie wurden durch unten angehängte Gewichte aus dünnen Draht beschwert, so daß sie möglichst ganz unter Wasser schwammen. Es gelang jedoch bei der geringen Wassertiefe von etwa 7 cm nicht, sie gerade ganz unter Wasser zum Schwimmen zu bringen. Um aber den störenden Einfluß der Wasseroberfläche auf ein Minimum zu bringen, wurden auf der oberen Seite der Schwimmer ganz dünne Drähte von 0,1 mm Durchmesser und etwa

1 cm Länge befestigt; diese berührten dann mit ihrer Spitze eben die Wasseroberfläche und hielten den Schwimmer selbst in stabiler Lage ganz unter Wasser. So wurde aus 19 Einzelmessungen der Zeit die der Schwimmer gebrauchte um 2, bzw. 1 cm zurückzulegen, das Mittel genommen. Es ergab sich $U' = \frac{1}{11{,}7}$ cm/sec für die Strömungsgeschwindigkeit im Kasten. Durch Multiplikation mit $\frac{12{,}9}{0{,}19}$, dem Verhältnis der Kastenbreite zur Spaltbreite, ergab sich hieraus die Ausströmungsgeschwindigkeit im Spalt zu $U = 5{,}80$ cm/sec. Beim Schneidenabstand $f = 2{,}2$ cm ergab sich die Pendelungsfrequenz zu $N = 1{,}075$. Das Produkt aus Pendelungsfrequenz mal Schneidenabstand beträgt hier also $N \cdot f = 2{,}37$. Für die Wirbelgeschwindigkeit ergab sich als Mittel aus 43 Einzelmessungen der Wert 2,41 cm/sec. Die oben abgeleitete Beziehung $N \cdot f = u$ ist hier in der Tat gut erfüllt. Aus dem eben angegebenen Werte von U berechnet sich

$$\frac{Nf}{U} = a' = 0{,}41 .$$

Die Konstante a' ist nun in der Tat gleich dem Verhältnis der Wirbelgeschwindigkeit zur Strömungsgeschwindigkeit, denn hierfür berechnet sich in sehr guter Übereinstimmung $\frac{2{,}41}{5{,}80} = 0{,}42$. Diese Gleichung muß natürlich erfüllt sein, da ja schon die vorhergehende Gleichung $N \cdot f = u$ durch die Versuche bestätigt ist.

Der hier gefundene Wert 0,41 für den Ausdruck $\frac{u}{U}$ stimmt nun zwar gut mit dem von Göller (a. a. O.) erhaltenen, der als Mittel von fünf bei verschiedenen Schneidenabständen gefundenen Zahlen den Wert 0,42 angibt, weniger gut jedoch mit den Zahlen von J. Rieth, der als Mittelwert 0,50 findet, und mit den an der Wasserlamelle erhaltenen Zahlen von Schmidtke, der im Mittel auch etwa 0,50 erhielt. Um nun meine Beobachtungen mit denen Schmidtkes besser vergleichen zu können, wurde der von letzterem benutzte Keil von 3,7 cm Seitenlänge und einem Schneidenwinkel von 52° anstelle des oben benutzten eingesetzt. Da ferner bei den Spalttönen die Proportionalität der Tonhöhe mit der Ausströmungsgeschwindigkeit nur für nicht zu enge Spalten gilt, so wurde die Spalt-

breite aus Vorsicht auf 4 mm erweitert. Schließlich wurde die Messung der Wirbelgeschwindigkeit erhöht, indem statt der einfachen Stoppuhr zur Messung der Zeiten ein Chronograph benutzt wurde. Dieser[1]) war eine Kopie des nach den Angaben von A. v. Brunn[2]) für die Sternwarte der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig konstruierten. Bei der angewandten Belastung von 50 kg betrug die vom Papierstreifen während einer Sekunde durchlaufene Strecke 2,55 cm. Bei den hier zu messenden Zeiten von etwa 0,3 Sekunden wäre eine Stoppuhr ganz unzureichend gewesen, während die Messung mit Hilfe des Chronographen gut gelang.

Vor allem wurde aber auch noch die Genauigkeit der Messung der Ausströmungsgeschwindigkeit U erhöht. Dies geschah einfach in der Weise, daß die aus dem Bassin pro Sekunde ausfließende Wassermenge gemessen wurde. In der Regel wurde die in 15 Sekunden ausfließende Menge mit einem Meßzylinder gemessen. So ließ sich die Ausflußgeschwindigkeit genau und sicher bestimmen ohne die Bedenken, denen die oben geschilderte indirekte Methode immerhin noch ausgesetzt ist. Es ergab sich, daß die mit dem oben beschriebenen großen Schwimmer bei sehr sorgfältigem Messen erhaltenen Werte mit den sichereren aus der Ausflußmenge bestimmten in hinreichender Übereinstimmung waren.

So ergab sich in dem folgenden Versuch die Ausflußmenge zu

280 cm³
273 „
275 „
270 „
275 „

im Mittel also zu 274,6 cm³. Da die Spaltbreite 0,40 cm und die Wasserhöhe im Spalt 6,5 cm betrug, so ergibt sich

$$U = \frac{274{,}6}{15 \cdot 6{,}5 \cdot 0{,}40} = 7{,}04 \text{ cm/sec.}$$

---

1) Für die liebenswürdige Überlassung des Chronographen spreche ich Hrn. Prof. Dr. Eggert auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aus.

2) A. v. Brunn, Schriften der Naturforsch. Ges. zu Danzig, N. F. 12. 4. Heft. 1910.

Die Messung nach der indirekten Methode mit dem Schwimmer ergab in diesem Fall 7,26 cm/sec; es soll jedoch hier mit dem sichereren ersten Werte gerechnet werden. In der Regel waren die nach der indirekten Methode mit Hilfe eines Schwimmers bestimmten Werte zu klein.

Zunächst wurde nun die Konstanz des Produktes $N \cdot f$ bei verschiedenen Schneidenabständen f geprüft; die Pendelungsfrequenz N wurde wie oben aus der Zeit für 20 Pendelungen bestimmt. So ergab sich die folgende Tabelle.

Tabelle 1.

f	N	$N \cdot f$	$\frac{N \cdot f}{U}$
1,35 cm	1,92	2,6	0,37
1,50 „	1,82	2,7	0,39
1,90 „	1,40	2,66	0,38

Das Produkt $N \cdot f$ ist also in der Tat gut konstant. Es ist das vor allem ein sicheres Kriterium dafür, daß keine Eigenschwingung des Wassers im Bassin störend eingewirkt hat, eine Störung, auf die schon E. Schmidtke in dem zuerst von ihm benutzten Gefäße gestoßen war, die ich aber auch in dem in den späteren Versuchen von Schmidtke und hier benutzten großem Bassin gelegentlich wiederfand, wenn gerade die Ausströmungsgeschwindigkeit U unglücklich gewählt war. In solchem Falle war die Pendelungsfrequenz weitgehend unabhängig vom Schneidenabstand; man erkennt diesen Zustand leicht daran, daß dann in dem ganzen Bassin die Wassermasse in deutlicher Schwingung, wenn auch nur mit kleiner Amplitude begriffen ist, was man an den auf der Oberfläche schwimmenden Konglomeraten von Aluminiumpulver leicht konstatiert. Diese Resonanz entspricht also ganz der Resonanzwirkung der Pfeifenrohre, deren Wirkung schon von R. Wachsmuth (a. a. O.) eingehend auseinandergesetzt ist.

Die Wirbelgeschwindigkeit u wurde hier gemessen, indem mit dem Chronographen die Zeit bestimmt wurde, in der die Wirbel den Weg von 1 cm zurücklegten; die Wirbel waren bei

Verwendung des kurzen Keiles nicht gut auf längeren Strecken zu beobachten. Die Messungen waren infolgedessen recht schwierig und anstrengend. Es wurden so für die Zeiten, die ein Wirbel zum Durchlaufen einer Strecke gebrauchte, folgende Werte erhalten:

0,36	0,42	0,32
0,32	0,36	0,34
0,24	0,30	0,32
0,26	0,36	0,36
0,34	0,32	0,29
0,42	0,30	0,32
0,42	0,40	0,32
0,30		

Das Mittel aus diesen Zahlen ist 0,336, folglich wird

$$u = \frac{1}{0{,}336} = 2{,}94 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} .$$

Dieser Wert stimmt mit dem Mittelwert 2,65 aus den obigen Werten für $N \cdot f$ in Anbetracht der Schwierigkeit der Bestimmung von u hinreichend überein.

Der natürliche Wirbelabstand bei frei ausströmender Lamelle ohne gegenüberstehende Schneide, der ja gleich dem 4,9fachen der Spaltbreite (0,19 cm) ist, wäre also hier gleich 0,93 cm; die resonanzartige Wirkung der Stauung an der Schneide hat also den Wirbelabstand bis auf 1,9 cm, also auf mehr als das Doppelte vergrößert. Bei einer geringeren weiteren Vergrößerung des Schneidenabstandes tritt deshalb der Oktavensprung und damit die Verringerung des Wirbelabstandes auf die Hälfte ein; nach dem unten angegebenen Versuch ist dies bei einem Schneidenabstand von 2,4 cm bereits eingetreten. Dadurch wird der erzwungene Wirbelabstand, der dann 1,2 cm beträgt, dem natürlichen Wirbelabstand von 0,93 cm in der Tat stark genähert, der „Zwang" wird also durch den Oktavensprung stark herabgesetzt.

Durch Vergrößerung des Schneidenabstandes wurde nun das zweite Schwingungsintervall erhalten, in dem, wie oben auseinandergesetzt, der Wirbelabstand gleich dem halben Schneidenabstand ist. Es ist dies also der Zustand nach dem ersten Oktavensprung oder der Verdoppelung der Pendelungsfrequenz. Hier ergaben sich folgende Werte:

Tabelle 2.

f	N	$N \cdot f$	$\frac{N \cdot f}{U}$
2,4 cm	2,40	5,76	0,82

Der Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot \frac{N \cdot f}{U}$ hat also den Wert 0,41, stimmt also mit den für das erste Intervall gefundenen Werten für Nf/U gut überein.

Für dies Intervall muß nach dem obigen

$$N = \frac{u}{\frac{f}{2}} \quad \text{oder} \quad u = \frac{1}{2} N \cdot f$$

sein.

Für u ergab sich als Mittel aus 12 Einzelmessungen der Wert 3,02, der mit $\frac{1}{2} Nf = 2{,}88$ hinreichend übereinstimmt. Das Verhältnis u/U ist also in der Tat im zweiten Intervall dasselbe wie im ersten.

Der hier wie in den Schmidtkeschen Messungen benutzte Spalt unterscheidet sich von den in den akustischen Versuchen von Göller und Rieth benutzten dadurch, daß hier dünne Spaltwände unter einem Winkel von 70° aufeinander treffen, während dort ein mehrere Zentimeter tiefer Spalt aus parallelen Wänden benutzt wurde. Um zu sehen, ob hierdurch vielleicht eine Veränderung der Konstante $N \cdot f/U$ bedingt sein könnte, setzte ich in den bisherigen Spalt einen ebenfalls aus $^1/_2$ mm dickem Blech bestehenden, 3,9 cm langen und 0,3 cm breiten Spalt ein, so daß nun der Spalt die Form der Fig. 4 besaß.

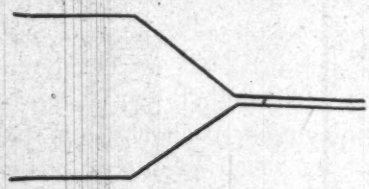


Fig. 4.

Bei dem hiermit angestellten Versuche ergab sich als Mittel für die in 15 Sekunden ausgeflossene Wassermenge 270 cm³; daraus berechnet sich, da die Wasserhöhe in dem 0,3 cm breiten Spalte 6,55 cm betrug, die Ausströmungsgeschwindigkeit zu

$$U = \frac{270}{15 \cdot 6{,}55 \cdot 0{,}30} = 9{,}23 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} .$$

Die bei dieser Strömungsgeschwindigkeit bei zwei verschiedenen Schneidenabständen f erhaltenen Werte für N, $N \cdot f$ und $N \cdot f / U$ im ersten Pendelungsintervall sind in der folgenden Tab. 3 wiedergegeben.

Tabelle 3.

f	N	$N \cdot f$	$\frac{N \cdot f}{U}$
1,60 cm	2,30	3,68	0,40
1,85 „	1,90	3,52	0,38

Also auch hier ergibt sich für den Ausdruck $N \cdot f / U$ wieder nahezu der Wert 0,40, die Form der Austrittsöffnung der Lamelle hat also offenbar recht wenig Einfluß auf den Wert dieser Konstanten. Der früher von Schmidtke an Flüssigkeitslamellen gefundene Wert 0,50 ist jedenfalls zu groß, die Abweichung dürfte in der sehr schwierigen und nicht sehr zuverlässigen indirekten Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit U mit Hilfe suspendierter Aluminiumteilchen begründet sein. Hiernach wäre auch wohl für die akustisch bestimmten Werte des Ausdrucks $N \cdot f / U$ anzunehmen, daß der von Göller gefundene Wert 0,42 richtiger ist, als der später von Rieth gefundene Werth 0,50.

Die von Göller sowohl wie von Rieth gefundene geringe Zunahme des Ausdrucks $N \cdot f / U \cdot i$, worin für i jeweils die Zahl des betreffenden Intervalls einzusetzen ist, dürfte wohl in den höheren Intervallen nach Rieth durch die Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit infolge des Energieverlustes durch Reibung zu erklären sein.

Die hier gegebene Wirbeltheorie der Schneidentöne wird also durch die Versuche durchaus bestätigt.

Über den Zusammenhang der Schneidentöne mit den Pfeifentönen läßt sich kurz noch folgendes sagen: Durch ein angesetztes Resonanzrohr werden die Schneidentöne zu Pfeifentönen. Bei ihnen regelt, wie das R. Wachsmuth (a. a. O.) eingehend und klar dargelegt hat, die Eigenfrequenz des Resonanzrohres in weiten Grenzen die Frequenz des Schneidentones. Der Vorgang der Schwingungserregung in einer Pfeife entspricht also einem doppelt gekoppelten Systeme, bei dem zunächst die

Frequenz der Spalttöne durch den Schneidenabstand bzw. die Maulweite, die Frequenz der Schneidentöne wiederum durch den Einfluß des Pfeifenrohres resonanzartig beeinflußt wird. Beiden Resonanzvorgängen sind Grenzen gezogen, außerhalb deren das Mitschwingen versagt. Zu einem maximalen Mitschwingen bzw. Ansprechen der Pfeife müssen also Spaltbreite, Maulweite und Resonanzrohr aufeinander abgestimmt sein. Immer aber ist zu berücksichtigen, daß wegen der starken Dämpfung weder der erste, noch der zweite resonanzartige Schwingungsvorgang eine genaue Abstimmung erfordert, daß vielmehr die zulässigen Grenzen, innerhalb deren noch ein Mitschwingen stattfindet, sehr weite sind.

Der Vorgang der Schwingungserregung in Pfeifen kann hiernach wohl im wesentlichen als aufgeklärt betrachtet werden.

Danzig-Langfuhr, Physik. Institut d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 5. Januar 1920.)

2. *Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese*[1]; von *A. Rubinowicz.*

(I. Mitteilung.)

Einleitung.

F. Ehrenhaft[2]) hat in einer mit großem experimentellen Geschick durchgeführten Untersuchung gezeigt, daß kleine Kügelchen, mit einem Radius von der Größenordnung 10^{-5} cm, einseitig mit stark konzentriertem Lichte bestrahlt, je nach ihrer materiellen Beschaffenheit sich entweder dem Lichte zu oder vom Lichte weg bewegen. Die hier wirksamen Kräfte bezeichnet Ehrenhaft als „positiv" bzw. „negativ" photophoretische Kräfte. Aus den bisherigen Untersuchungen von Ehrenhaft und I. Parankiewicz[3]) scheint hervorzugehen, daß diese photophoretischen Kräfte vom Drucke, sowie von der chemischen Beschaffenheit des das Kügelchen umgebenden Gases völlig unabhängig sind. Ehrenhaft zieht daraus den Schluß, daß es sich bei der Photophorese daher um Kräfte handle, die allein der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie entspringen und nicht etwa, wie die Radiometerkräfte, durch das umgebende Gas mitbedingt werden. Da ein

1) *Anm. bei der Korrektur* (20. Februar 1920). Durch ein bedauerliches Versehen, auf das mich Frl. Dr. Norst freundlichst aufmerksam machte, habe ich in dem ursprünglich an die Redaktion eingeschickten Manuskripte den hier mitgeteilten Rechnungen gerade die entgegengesetzte Einfallsrichtung des Lichtes zugrunde gelegt, als es Debye in seiner hier benutzten Arbeit tut. Dies hat auf unsere Rechnungen keinerlei weiteren Einfluß, als daß in dem Ausdruck für die Radiometerkraft das Vorzeichen geändert werden mußte. Dadurch sah ich mich auch veranlaßt, einen Teil der Diskussion der vorliegenden ersten Mitteilung durch die Ausführungen in der anschließend folgenden Mitteilung zu ersetzen. Die in dieser ersten Mitteilung bei der Korrektur sonst geänderten Stellen sind zwischen zwei Sterne *...* gesetzt.

2) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 56. S. 81. 1918.

3) I. Parankiewicz, Wien. Ak. Ber. IIa, 127. S. 1445, 1918.

„negativer" Lichtdruck nicht bekannt ist, würde die Ehrenhaftsche Auffassung, besonders bei der Deutung der negativen Photophorese, das Vorhandensein neuer, bisher unbekannter Naturkräfte postulieren, die die Einheitlichkeit unseres heutigen, recht harmonischen Weltbildes zerstören und daher mit gutem Grunde als äußerst unwillkommene Eindringlinge gelten müßten. So ist also das Bestreben wohl begreiflich, die Ehrenhaftschen Versuche ohne Annahme neuer Kräfte zu deuten.

Für eine derartige Erklärung wird man vor allem die Lichtdruck- und Radiometerkräfte in Betracht zu ziehen haben. Während nun der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material nach den Untersuchungen von Debye[1]) berechnet werden kann, sind die auf ein Kügelchen ausgeübten Radiometerkräfte noch nicht einmal abgeschätzt worden. Die vorliegende Arbeit hat daher zum Ziele, diese Radiometerkräfte exakt zu berechnen, um dadurch die Grundlage für die Entscheidung des Photophoreseproblems zu schaffen.

Da die direkte numerische Auswertung unseres strengen Ausdruckes für die Radiometerkraft sehr langwierige Zahlenrechnungen erfordert, begnügen wir uns hier zunächst damit, für eine erste Orientierung mit Näherungsformeln zu arbeiten; und zwar wollen wir in der vorliegenden ersten Mitteilung Näherungsformeln aufstellen für den Fall eines gegenüber der Wellenlänge des einfallenden Lichtes kleinen und in der anschließend folgenden Mitteilung für den Fall eines großen Radius. Dabei beschränken wir uns in der zweiten Mitteilung auf sehr schwach absorbierende Substanzen. Unsere Rechnungen ergeben nun, daß für (gegenüber der Wellenlänge) kleine Kugeln die Radiometerkraft im Sinne einer positiv —, für große, schwach absorbierende, im Sinne einer negativ photophoretischen Kraft wirkt. Unter diesen Umständen ist es verständlich, daß die numerische Berechnung der Radiometerkraft im Falle der Ehrenhaftschen Versuchsbedingungen auf große Schwierigkeiten stößt. Denn Ehrenhaft benutzt bei seinen Versuchen das kontinuierliche Spektrum einer Bogenlampe und Teilchen von der Größenordnung der Wellenlänge des verwendeten Lichtes. Die von ihm beobachteten Kräfte sind also (abgesehen vom Lichtdruck) als

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 57. 1909.

Resultat der Superposition positiver und negativer (für große und kleine Wellenlängen) Radiometerkräfte anzusehen. Bei der Berechnung müßte man daher schrittweise vorgehend in einem großen Gebiet des Spektrums unsere exakte Formel auswerten, da die Näherungsformeln nur in dem Grenzfalle sehr großer und sehr kleiner Wellenlängen Giltigkeit haben.

Für einen exakten Vergleich der Theorie mit der Erfahrung wäre es daher notwendig, Versuche mit monochromatischem oder wenigstens annähernd monochromatischem Lichte anzustellen, um so die exakte numerische Auswertung unserer Formeln praktisch durchführbar zu machen. Selbstverständlich müßten für die zur Prüfung der Theorie angestellten Versuche alle in unseren Formeln auftretenden Daten bekannt sein.*

Der Berechnung der Radiometerwirkung, die eine einseitig bestrahlte, in einem Gas befindliche Kugel erleidet, liegt naturgemäß folgender Gedankengang zugrunde. Die von der Kugel absorbierte Lichtenergie erwärmt sie, so daß ihre verschiedenen Teile verschiedene Temperatur besitzen. Durch Betrachtung der Impulsänderung, die die auf das Kügelchen auftreffenden Gasmoleküle erleiden, kann man dann den Druck des Gases auf das getroffene Oberflächenelement in seiner Abhängigkeit von dessen Temperatur berechnen. Damit ist das Radiometerproblem auf ein Wärmeleitungsproblem zurückgeführt, nämlich auf die Berechnung der Temperaturverteilung auf der Oberfläche der Kugel. Dieses Wärmeleitungsproblem ist nun einerseits durch die Wärmeleitungsgleichung, andererseits durch eine Randbedingung bestimmt, die nur besagt, in welcher Weise die Wärme durch die auftreffenden Moleküle von der Kugeloberfläche in das Gas wegtransportiert wird.

Unsere Arbeit zerfällt dem Wesen der Sache nach in zwei Teile: In dem ersten weit kürzeren, werden im wesentlichen nach Arbeiten von Knudsen[1]) die Formeln angeführt, die das gaskinetische Problem lösen, d. h. die Abhängigkeit des Radiometerdruckes von der Temperatur des Oberflächenelementes bestimmen und den theoretischen Wert für die äußere Wärmeleitfähigkeit angeben, die ihrerseits die Rand-

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. **32.** S. 809. 1910 und **34.** S. 593. 1911.

bedingung unseres Wärmeleitungsproblems festlegt. Der zweite Teil enthält die Lösung des Wärmeleitungsproblems und den Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung soweit dies hier eben schon durchführbar ist.

I. Gaskinetische Betrachtungen.

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst ein in einem Gase eingebettetes, materielles Kügelchen, auf dessen Oberfläche eine Temperaturverschiedenheit herrscht und fragen uns nach der Kraft, die es unter dem Einfluß seiner Umgebung erfährt. Diese Radiometerkraft ist gegeben durch:

$$K = \int P \cos \vartheta' \, df ,$$

wo ϑ' den Winkel bedeutet, den die dem einfallenden Lichte entgegengesetzte Richtung mit dem Radiusvektor (vom Kugelmittelpunkt aus) nach dem Flächenelement df einschließt und P der Radiometerdruck des Gases auf df ist. Bezeichnen wir ferner mit φ' den Winkel, den die Ebene durch die Richtung des einfallenden Lichtes und den Radiusvektor mit einer festen, durch die Richtung des einfallenden Lichtes gelegten Ebene bildet und schließlich mit r' den Radiusvektor (die Punkte der Kugeloberfläche seien durch $r' = a$ gegeben), so haben wir ein System von Polarkoordinaten r', φ', ϑ', in dem sich das Flächenelement df ausdrückt durch:

$$df = a^2 \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi' .$$

Zur Berechnung der Kraft K ist es also notwendig, den Radiometerdruck P, den das umgebende Gas auf unser Kügelchen ausübt, in seiner Abhängigkeit von den Koordinaten der Oberfläche φ' und ϑ' anzugeben.

Dabei genügt das Vorzeichen von K der Ehrenhaftschen Terminologie; es entspricht nämlich dem positiven Vorzeichen von K eine Kraft, die das Teilchen in der Richtung der forteilenden Lichtwelle treibt, also eine positiv photophoretische Kraft, während wir es bei negativem Zeichen von K mit lichtnegativer Photophorese zu tun haben. Wir wollen aber im folgenden durchwegs, um den Ursprung der von uns zu rechnenden Kraft K zu betonen, die Kraft K als Radiometerwirkung bezeichnen.

Für den Radiometerdruck P erhält man nun mit Hilfe gaskinetischer Überlegungen in erster Näherung den Wert[1]):

$$P = \frac{\gamma}{4} \frac{R\delta}{M} \cdot \tau,$$

wo R die auf ein Mol bezogene Gaskonstante, δ die Dichte des Gases, M dessen Molekulargewicht und τ den Temperaturüberschuß des Oberflächenelementes gegenüber der Temperatur des umgebenden Gases bedeutet. γ ist der Akkommodationskoeffizient, ein Zahlenfaktor, der im wesentlichen besagt, inwieweit das Molekül, das an einem Körper reflektiert wird, dessen Temperatur bei der Reflexion annimmt und der selbstverständlich von der Natur des Gases und der die Moleküle reflektierenden Oberfläche abhängt. γ ist stets kleiner als 1 und erreicht diesen Wert nur an „vollkommen rauhen" Oberflächen. Für blankes Platin in H_2 hat γ z. B. den Wert 0,358; in O_2 den Wert 0,885, für stark platiniertes Platin in H_2 ist $\gamma = 0{,}712$, in O_2 hat es den Wert 0,956, für Glas in H_2 0,26 usw.

Es ist zu bemerken, daß der oben angegebene Ausdruck für P nur dann verwendet werden darf, wenn die Dimensionen der Kugel klein sind gegenüber der freien Weglänge des Gases. Alle folgenden Überlegungen gelten daher nur unter dieser Annahme.

Setzen wir unseren Wert für P in den Ausdruck für die Radiometerkraft K ein, so erhalten wir endlich

$$(1) \quad \begin{cases} K = \frac{1}{4} \gamma \frac{\delta R}{M} \int \tau \cos \vartheta' \, df \\ \qquad = \frac{1}{4} \gamma \frac{\delta R}{M} a^2 \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \tau \cos \vartheta' \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'. \end{cases}$$

Nun wollen wir noch die Randbedingung für das im folgenden zu behandelnde Wärmeleitungsproblem angeben. Sie folgt einfach aus der Tatsache, daß die, von den an dem Flächenelement df reflektierten Molekülen weggeführte Wärme-

1) M. Knudsen, a. a. O. Wir benützen den von M. v. Smoluchowski (Ann. d. Phys. 35. S. 983. 1911, Formel 20, S. 1002) angegebenen Ausdruck für P, indem wir gleichzeitig dem Umstande Rechnung tragen, daß τ eine kleine Größe ist.

menge gleich sein muß derjenigen, die durch dieses Flächenelement hindurchdringt. Die erstere nun ist nach Knudsen gleich

$$Q = \frac{\frac{c_p}{c_v} + 1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} \gamma \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{R^3}{M^3}} \sqrt{T}\, \delta\, \tau\, df,$$

wenn c_p und c_v die beiden spezifischen Wärmen des Gases und T seine Temperatur bezeichnen. Die durch das Flächenelement hindurchströmende Wärmemenge hingegen ist

$$- w \frac{\partial \tau}{\partial \nu} df,$$

wenn w den Wärmeleitungskoeffizienten bedeutet. Die Gleichsetzung der beiden letzten Ausdrücke liefert dann die gesuchte Randbedingung:

$$h\tau + w \frac{\partial \tau}{\partial \nu} = 0, \tag{2}$$

wo h, der äußere Wärmeleitungskoeffizient, gegeben ist durch

$$h = \frac{\frac{c_p}{c_v} + 1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} \gamma \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{R^3}{M^3}} \sqrt{T}\, \delta. \tag{3}$$

Zahlenmäßig erhalten wir für den Fall, daß das Gas sich bei der Temperatur $T = 273$ und unter dem Drucke $p = 10^6$ dyn befindet, nach Knudsen für h in H_2 den Wert $h = \gamma \cdot 10{,}968 \cdot 4{,}188 \cdot 10^7 = \bar{\gamma} \cdot 4{,}593 \cdot 10^8 \frac{\text{erg}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}$, in O_2 den Wert $h = \gamma \cdot 2{,}803 \cdot 4{,}188 \cdot 10^7 = \gamma \cdot 1{,}174 \cdot 10^8 \frac{\text{erg}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}$.

Wenn wir uns im vorangehenden auch vollständig auf den Standpunkt von Knudsen gestellt haben, wollen wir uns doch nicht verhehlen, daß er nicht in jeder Hinsicht befriedigend ist. Jedenfalls steht es aber fest, daß die Knudsenschen Angaben sicherlich die richtige Größenordnung geben und dies genügt vorläufig vollständig für unsere Zwecke.

II. Betrachtung über die Temperaturverteilung in der Kugel.

§ 1. Formulierung der Wärmeleitungsaufgabe.

Nach den im ersten Teile entwickelten Überlegungen ist die auf ein Kügelchen wirkende Radiometerkraft K durch die Temperaturverteilung τ an der Oberfläche des Kügelchens gegeben und es erwächst uns daher die Aufgabe, diese Funktion τ zu bestimmen. Zunächst muß τ der Differentialgleichung

$$s \cdot d \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = w \Delta \tau + \sigma \mathfrak{E}^2 \tag{4}$$

genügen, worin s die spezifische Wärme, d die Dichte, w die Wärmeleitfähigkeit, σ die elektrische Leitfähigkeit und $\mathfrak{E}$ den Vektor der elektrischen Feldstärke in irgendeinem Punkte im Innern des Kügelchens bedeutet. Der letzte Term in unserer Gleichung bezeichnet dabei die Wärmemenge (Joulesche Wärme), die dem betreffenden Punkte unserer Kugel von der sie durcheilenden Lichtwelle zugeführt wird. Da $\mathfrak{E}$ eine bekannte Funktion ist, so wird durch die Gleichung (4) im Verein mit der Randbedingung (2) der Verlauf von τ innerhalb der Kugel vollständig bestimmt. Die Funktion τ hängt also ganz wesentlich von der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ ab. Wir wollen daher zunächst im folgenden § 2 den bekannten Ausdruck für $\mathfrak{E}$ anführen. Im § 3 wird dann, um den Gang der späteren Überlegungen nicht zu unterbrechen, eine Greensche Funktion angegeben. Unsere eigentlichen Erwägungen zur Lösung der Gleichung (4) entwickeln wir schließlich in § 4.

§ 2. Das elektrische Feld innerhalb der Kugel.

Wir wollen hier den Ausdruck für die elektrische Feldstärke innerhalb der durchstrahlten Kugel in der mathematisch sehr eleganten Form wiedergeben, die von P. Debye[1]) herrührt.

Denken wir uns ein System von Polarkoordinaten r, φ, ϑ bestimmt, das genau ebenso gelegen ist, wie das im ersten Teil angegebene System r', φ', ϑ'; bezeichnen wir ferner die Komponenten von $\mathfrak{E}$ nach diesen Koordinaten mit E_r, E_φ, E_ϑ und setzen wir endlich

$$E_r = \Re\,(R \cdot e^{i\omega t}), \quad E_\varphi = \Re\,(F \cdot e^{i\omega t}), \quad E_\vartheta = \Re\,(T \cdot e^{i\omega t}) \tag{5}$$

(ω ist dabei die Anzahl der Lichtschwingungen in 2π sec),

1) P. Debye, Ann. d. Phys. **30**. S. 57. 1909.

so bestimmt sich nach Debye R, F und T aus zwei Potentialen Π_1^i und Π_2^i in nachstehender Weise:

$$(6)\quad \begin{cases} R = \dfrac{\partial^2 r\Pi_1^i}{\partial r^2} + K_i^2 r\Pi_1^i, \\ F = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial^2 r\Pi_1^i}{\partial r\,\partial\varphi} + k_2^i\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\Pi_2^i}{\partial\vartheta}, \\ T = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 r\Pi_1^i}{\partial r\,\partial\vartheta} - k_2^i\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial r\Pi_2^i}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Bezüglich der hier auftretenden Konstanten ist dabei folgendes zu merken. Wir bezeichnen mit:

$$(7)\quad K^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu\sigma\omega}{c^2},\quad k_1 = \frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c},\quad k_2 = \frac{i\mu\omega}{c},$$

worin ε die Dielektrizitätskonstante, μ die Permeabilität, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet und $i = \sqrt{-1}$ ist. $\mathfrak{E}, \varepsilon, \mu$ und σ werden dabei in rationellen Heavisideschen Einheiten gemessen. Fügen wir nun einer der in (7) eingeführten Größen den Index i oder a bei (z. B. K_i, k_1^i, k_1^a usw.), so soll damit angezeigt werden, daß die auftretende Konstante für das Medium innerhalb bzw. außerhalb der Kugel zu nehmen ist.

Die in (6) auftretenden Potentialfunktionen Π_1^i und Π_2^i sind nun durch die folgenden Reihen gegeben:

$$(8)\quad \begin{cases} r\Pi_1^i = \dfrac{\cos\varphi}{K_i^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n^1\psi_n(K_i r)P_n^1(\cos\vartheta), \\ r\Pi_2^i = -\dfrac{\sin\varphi}{K_i^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2\psi_n(K_i r)P_n^1(\cos\vartheta), \end{cases}$$

worin B_n^1 und B_n^2 später noch anzugebende Konstante sind und die Funktionen ψ_n und P_n^1 in folgender Weise definiert werden. ψ_n ist eine Lösung der Differentialgleichung:

$$(9)\quad \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right)\psi_n(x) = 0,$$

die sich im Punkte $x = 0$ regulär verhält und durch nachstehenden Ausdruck bestimmt wird:

$$(10)\quad \begin{cases} \psi_n(x) = \left(\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1\cdot 3\ldots(2n+1)} \\ \qquad\qquad \left[1 - \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{1!\,\dfrac{2n+3}{2}} + \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^4}{2!\,\dfrac{2n+3}{2}\cdot\dfrac{2n+5}{2}} - \ldots\right]. \end{cases}$$

$J_{n+1/2}$ ist dabei die im Punkte $x=0$ reguläre Besselsche Funktion J_ν mit dem Index $\nu = n + \frac{1}{2}$.

Für die numerische Berechnung der Funktionen ψ_n und ihrer Ableitungen sind dabei folgende Rekursionsformeln von besonderem Vorteil:

$$(11)\quad \begin{cases} (2n+1)\dfrac{d\psi_n(x)}{dx} = (n+1)\psi_{n-1}(x) - n\psi_{n+1}(x), \\ (2n+1)\dfrac{\psi_n(x)}{x} = \psi_{n-1}(x) + \psi_{n+1}(x). \end{cases}$$

Eine zweite, noch in diesem Paragraph zu verwendende Lösung der Gleichung (9), für die ebenfalls die Zusammenhangsformeln (11) gelten, wird durch die Funktion:

$$(12)\quad \begin{cases} \zeta_n(x) = \left(\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1/2} H^{*}_{n+1/2}(x) = e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} e^{-ix} \\ \left[1 - \dfrac{i}{2x}\dfrac{n(n+1)}{1!} - \dfrac{1}{(2x)^2}\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2!} + \cdots\right] \end{cases}$$

gegeben, wo $H^{*}_{n+1/2}(x)$ die Hankelsche Funktion zweiter Art mit dem Index $n + \frac{1}{2}$ ist, die mit der früher angeschriebenen Besselschen Funktion durch die Relation zusammenhängt:

$$H^{*}_\nu(x) = -\frac{i}{\sin \nu\pi}\left(e^{i\nu\pi} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)\right).$$

Die in (8) auftretende Funktion $P_n^1(\cos\vartheta)$ ist die erste zugeordnete Kugelfunktion der gewöhnlichen zonalen Kugelfunktion $P_n(\cos\vartheta)$ und wird bestimmt durch die Gleichung

$$(13)\quad P_n^1(\cos\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta) = \sin\vartheta \frac{d}{d\cos\vartheta} P_n \cos\vartheta.$$

Die im folgenden gelegentlich gebrauchte νte zugeordnete Kugelfunktion $P_n^\nu(\cos\vartheta)$ der ersten Kugelfunktion definieren wir, in Verallgemeinerung der Gleichung (13) mit F. Neumann durch die Gleichung[1]):

$$P_n^\nu(\cos\vartheta) = \sin^\nu\vartheta \frac{d^\nu}{d(\cos\vartheta)^\nu} P_n(\cos\vartheta).$$

Um die Einheitlichkeit der Schreibweise zu wahren, werden wir auch schreiben:

$$P_n(\cos\vartheta) = P_n^0(\cos\vartheta).$$

---

1) Wangerin, Enzyklopädie d. math. Wissensch. II. A. 10. S. 711.

Die in (8) auftretenden Konstanten B_n^1 und B_n^2 sind durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(14)\quad \begin{cases} B_n^1 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\,\dfrac{k_1^a\zeta_n(K_a a)K_a\psi_n'(K_a a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_1^a\psi_n(K_a a)}{k_1^a\zeta_n(K_a a)K_i\psi_n'(K_i a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_1^i\psi_n(K_i a)}, \\ B_n^2 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\,\dfrac{k_2^a\zeta_n(K_a a)K_a\psi_n'(K_a a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_2^a\psi_n(K_a a)}{k_2^a\zeta_n(K_a a)K_i\psi_n'(K_i a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_2^i\psi_n(K_i a)}; \end{cases}$$

Dabei ist z. B. unter $\zeta_n'(K_a r)$ zu verstehen $\dfrac{d}{d(K_a r)}\zeta_n(K_a r)$.

Aus den Formeln (6) und (8) ergeben sich endlich die nachstehenden Ausdrücke für R, F und T:

$$(15)\quad \begin{cases} R = \dfrac{\cos\varphi}{K_a^2}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)B_n^1\,\dfrac{\psi_n(K_i r)}{r^2}\,P_n^1(\cos\vartheta), \\ F = -\dfrac{\sin\varphi}{K_a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[K_i B_n^1\,\dfrac{\psi_n'(K_i r)}{r}\,\dfrac{P_n^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \\ \qquad\qquad + k_2^i B_n^2\,\dfrac{\psi_n(K_i r)}{r}\,\dfrac{d}{d\vartheta}P_n^1(\cos\vartheta)\Big], \\ T = \dfrac{\cos\varphi}{K_a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[K_i B_n^1\,\dfrac{\psi_n'(K_i r)}{r}\,\dfrac{d}{d\vartheta}P_n^1(\cos\vartheta) \\ \qquad\qquad + k_2^i B_n^2\,\dfrac{\psi_n(K_i r)}{r}\,\dfrac{P_n^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\Big]. \end{cases}$$

Der Ausdruck für R ist hier mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (9) schon gleich vereinfacht angeschrieben.

§ 8. Die Greensche Funktion für die Kugel.

Um den Fluß der im folgenden Paragraph beginnenden Ausführungen nicht zu unterbrechen, wollen wir jetzt den Ausdruck für eine später zu verwendende Greensche Funktion angeben. In den weiteren Überlegungen wird uns nämlich folgende Aufgabe entgegentreten. Es ist eine Funktion u zu bestimmen, die innerhalb unserer Kugel mit dem Radius a der Differentialgleichung

$$\Delta u + f(r, \varphi, \vartheta) = 0$$

genügt und an der Begrenzung der Kugel die Randbedingung

$$hu + w\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

erfüllt. Die Lösung unseres Problems wird nun erhalten durch das über das Innere der Kugel erstreckte Integral:

$$(16)\quad \begin{cases} u(r', \varphi', \vartheta') = \frac{1}{4\pi} \int G(r', \varphi', \vartheta'; r, \varphi, \vartheta) \cdot f(r, \varphi, \vartheta)\, d\tau, \\ \text{wo} \qquad d\tau = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr \end{cases}$$

ein Raumelement und G eine Funktion mit folgenden Eigenschaften bedeutet:

(A.) G ist mit Ausnahme eines Punktes $Q(r, \varphi, \vartheta)$ im Innern unserer Kugel überall endlich und stetig. Im Punkte Q wird G wie $1/\varrho$ unendlich, wenn ϱ den Abstand eines variablen Punktes P mit den Koordinaten r', φ', ϑ' von dem festen Punkte Q bedeutet. G läßt sich somit in der Form $G = \frac{1}{\varrho} + U$ darstellen, wo U eine im Innern der Kugel überall reguläre Funktion ist.

(B.) G genügt der Differentialgleichung $\Delta G = 0$, woraus unmittelbar das Bestehen der Gleichung $\Delta U = 0$ folgt.

(C.) G erfüllt an der Begrenzung der Kugel die Randbedingung

$$\left[h G + w \frac{\partial G}{\partial r'}\right]_{r'=a} = 0.$$

Dabei sei wie früher a der Radius unserer Kugel.

Eine solche Funktion G läßt sich nun einfach angeben. Bezeichnen wir zunächst mit γ den Winkel zwischen r' und r, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = (r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\gamma)^{-1/2} = \frac{1}{r'} \left(1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2 \frac{r}{r'} \cos\gamma\right)^{-1/2}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^\nu}{r'^{\nu+1}} P_\nu(\cos\gamma),$$

wenn $P_\nu(\cos\gamma)$ die gewöhnliche zonale Kugelfunktion νter Ordnung bedeutet und wir den Fall $r' > r$ ins Auge fassen. Da U nach (B.) der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügt, nach (A.) im Innern der Kugel überall endlich sein soll, so kann U mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse als eine Reihenentwicklung von der Form

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r'^\nu P_\nu(\cos\gamma)$$

angesetzt werden. Es ist somit

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{r^\nu}{r'^{\nu+1}} + a_\nu r'^\nu\right] P_\nu(\cos\gamma)$$

und

$$\frac{\partial G}{\partial r'} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[-(\nu+1)\frac{r^\nu}{r'^{\nu+2}} + \nu a_\nu r'^{\nu-1}\right] P_\nu(\cos\gamma).$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_ν ist nun die Randbedingung (C.) zu verwenden, deren Erfülltsein das identische Bestehen der Relation

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[h\left(\frac{r^\nu}{a^{\nu+1}} + a_\nu a^\nu\right) + w\left(-(\nu+1)\frac{r^\nu}{a^{\nu+2}} + \nu a_\nu a^{\nu-1}\right)\right] P_\nu(\cos\gamma) = 0$$

fordert.

Daraus ergibt sich der Koeffizient a_ν zu:

$$a_\nu = \frac{r^\nu}{a^{2\nu+1}} \cdot \frac{w(\nu+1) - ha}{w\nu + ha}.$$

Es ist daher für $r' > r$:

$$(17)\quad \begin{cases} G(r', \varphi', \vartheta';\ r, \varphi, \vartheta) \\ \quad = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r'^{\nu+1}} + \frac{w(\nu+1) - ha}{w\nu + ha} \cdot \frac{r^\nu}{a^{2\nu+1}}\right] r^\nu \cdot P_\nu(\cos\gamma). \end{cases}$$

Wir müssen noch angeben, wie der Ausdruck für G lautet, wenn wir uns die Punkte P und Q durch die räumlichen Polarkoordinaten r', φ', ϑ' bzw. r, φ, ϑ festgelegt denken. In diesem Falle ist

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Es wird daher[1])

$$(18)\quad P_\nu(\cos\gamma) = \sum_{\mu=0}^{n} \varepsilon_\mu \frac{2(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!} P_\nu^\mu(\cos\vartheta) P_\nu^\mu(\cos\vartheta') \cos\mu(\varphi - \varphi'),$$

wobei $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ und für $\mu \neq 0$ $\varepsilon_\mu = 1$ ist.

Um somit G als Funktion von r, φ, ϑ und r', φ', ϑ' auszudrücken, ist in (17) $P_\nu(\cos\gamma)$ einfach durch diesen letzteren Ausdruck (18) zu ersetzen.

§ 4. Reduktion des Wärmeleitungsproblems.

Es bietet keine Schwierigkeit, die Lösung des in § 1 formulierten Wärmeleitungsproblems in Form einer Reihenentwicklung anzuschreiben. Wir wollen uns aber vor Augen halten, daß unser eigentliches Ziel die Berechnung der radiometrischen

1) Vgl. Enzyklopädie d. math. Wiss., a. a. O. S. 713.

Kraft K (1) ist und es daher genügt, den Ausdruck für τ nur so weit anzugeben, als dies die Berechnung des Ausdrucks für K erfordert.

Wir gehen dabei in zwei Stufen vor. Zunächst behalten wir nur jene Glieder in der Darstellung von τ, die in dieser erforderlichen Weise von der Zeit abhängen, und aus diesen Gliedern wählen wir sodann jene aus, die zum Integral für die Radiometerkraft K einen nicht verschwindenden Anteil liefern. Um diese Auswahl der Glieder in der Darstellung von τ zu treffen, wollen wir den in der Wärmeleitungsgleichung (4) auftretenden Ausdruck für $\sigma \mathfrak{E}^2$ betrachten. Zunächst denken wir uns (15) in der Form geschrieben:

$$(19)\quad \begin{cases} R = (A + iA')\cos\varphi; \qquad F = (B + iB')\sin\varphi; \\ T = (C + iC')\cos\varphi. \end{cases}$$

A, A', B, B', C, C' sind dabei reelle Funktionen von r und ϑ.

Nun ist nach (5)

$$E_r = (A\cos\omega t - A'\sin\omega t)\cos\varphi,$$
$$E_\varphi = (B\cos\omega t - B'\sin\omega t)\sin\varphi,$$
$$E_\vartheta = (C\cos\omega t - C'\sin\omega t)\cos\varphi.$$

Mithin wird

$$\sigma\mathfrak{E}^2 = \sigma(E_r^2 + E_\varphi^2 + E_\vartheta^2) = \sigma[(A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi + C^2\cos^2\varphi)\cos^2\omega t + (A'^2\cos^2\varphi + B'^2\sin^2\varphi + C'^2\cos^2\varphi)\sin^2\omega t - 2(AA'\cos^2\varphi + BB'\sin^2\varphi + CC'\cos^2\varphi)\cos\omega t\sin\omega t] = \frac{\sigma}{2}\cdot[(A^2 + A'^2)\cos^2\varphi + (B^2 + B'^2)\sin^2\varphi + (C^2 + C'^2)\cos^2\varphi] + \frac{\sigma}{2}\cdot[(A^2 - A'^2)\cos^2\varphi + (B^2 - B'^2)\sin^2\varphi + (C^2 - C'^2)\cos^2\varphi]\cos 2\omega t - \sigma(AA'\cos^2\varphi + BB'\sin^2\varphi + CC'\cos^2\varphi)\sin 2\omega t.$$

Denken wir uns nun diesen Ausdruck für $\sigma\mathfrak{E}^2$ in unsere Wärmeleitungsgleichung (4) eingesetzt, so sehen wir ohne weiteres ein, daß sich die Lösung τ von (4), die dem stationären Zustande entspricht, in 2 Teile spaltet: in einen Teil $\bar{\tau}$, der

von der Zeit nicht abhängt und in einen Teil $\bar{\tau}$, der sich periodisch mit der Zeit ändert. (Die Periode beträgt $1/2\omega$.) Setzen wir nun $\tau = \bar{\tau} + \bar{\bar{\tau}}$ in den Ausdruck (1) für die Radiometerkraft ein, so erkennen wir, daß auch sie sich dann in 2 Terme gliedert, von denen der eine $\bar{K}$ von der Zeit unabhängig, der andere $\bar{\bar{K}}$ dagegen periodisch mit der Zeit ist. Es ist nun klar, daß es für uns genügt, die Kraft $\bar{K}$ allein zu betrachten. Nehmen wir nämlich an, daß unser Teilchen sich in einem Gase unter dem Einfluß der Kraft $K = \bar{K} + \bar{\bar{K}}$ bewegt, so ist der Widerstand, den das Teilchen bei seiner Bewegung erleidet, proportional seiner Geschwindigkeit und eine einfache Diskussion der Bewegungsgleichung zeigt, daß die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens bei einer stationären Bewegung durch die Kraft $\bar{K}$ allein bestimmt wird. Es genügt demnach für unsere Zwecke, die Wärmeleitungsgleichung (4) nur für den Fall zu lösen, wo für $\sigma \mathfrak{E}^2$ der Ausdruck gesetzt ist:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{2}\left[(A^2+A'^2)\cos^2\varphi+(B^2+B'^2)\sin^2\varphi+(C+C'^2)\cos^2\varphi\right]\\ =\frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2+|B+iB'|^2+|C+iC'|^2\right]\\ +\frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2-|B+iB'|^2\right.\\ \left.+|C+iC'|^2\right]\cos 2\varphi\,.\end{aligned}$$

Die aufzulösende Gleichung hat also die Gestalt:

$$\begin{aligned}s\cdot d\cdot\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial t}=w\Delta\bar{\tau}+\frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2+|B+iB'|^2\right.\\ \left.+|C+iC'|^2\right]+\frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2\right.\\ \left.-|B+iB'|^2+|C+iC'|^2\right]\cos 2\varphi\,,\end{aligned}$$

was mit Rücksicht darauf, daß $\bar{\tau}$ von der Zeit nicht abhängt, sich zu

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}w\Delta\bar{\tau}+\frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2+|B+iB'|^2+|C+iC'|^2\right]\\ +\frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2-|B+iB'|^2\right.\\ \left.+|C+iC'|^2\right]\cos 2\varphi=0\end{aligned}\right.$$

vereinfacht. Dabei unterliegt $\bar{\tau}$ derselben Randbedingung wie τ, d. h.

$$h\bar{\tau} + w\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial r} = 0. \tag{21}$$

Dieses Randwertproblem (20) und (21) haben wir aber schon in § 3 gelöst, so daß wir die dort angegebene Lösung (16) einfach übertragen können und finden:

$$\bar{\tau}(r',\varphi',\vartheta') = \frac{1}{4\pi}\int G(r',\varphi',\vartheta';\, r,\varphi,\vartheta)\frac{1}{w}\cdot\frac{\sigma}{4}\{[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2] + [|A+iA'|^2 - |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2]\cos 2\varphi\}\cdot r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr.$$

Um unserem Plane entsprechend, in $\bar{\tau}$ nur jene Glieder zu berücksichtigen, die zum Ausdruck für die Kraft (1) nicht verschwindende Beiträge liefern, wollen wir zunächst $\bar{\tau}$ in seiner Abhängigkeit von φ' betrachten. Die Einsetzung des Wertes (17) für G zeigt dabei, daß sich $\bar{\tau}$ in 2 Ausdrücke τ^* und τ^{**} spaltet, von denen der erstere von φ' überhaupt nicht abhängt, während der zweite, wie leicht zu erkennen ist, die Gestalt hat:

$$\tau^{**}(r',\varphi',\vartheta') = M(r',\vartheta')\cos 2\varphi'$$

und daher bei der für K angezeigten Integration nach φ' verschwindet.

Es reduziert sich also unsere Aufgabe jetzt auf die Berechnung von τ^* allein, das nur für $r' = a$ zu nehmen ist, weil uns ja nur die Temperaturverteilung an der Oberfläche der Kugel interessiert. Bei Ersetzung von G durch den Ausdruck (17) und (18) und nach Ausführung der Integration nach φ erhält τ^* die Form:

$$\tau^*(a,\vartheta') = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\sigma}{4w}2\pi\int_{r=0}^{a}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{a^{\nu+1}} + \frac{w(\nu+1)-ha}{w\nu+ha}\cdot\frac{a^\nu}{a^{2\nu+1}}\right] r^\nu\cdot P_\nu(\cos\vartheta')\,P_\nu(\cos\vartheta)\cdot[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2]\,r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, dr.$$

Dabei ist zu beachten, daß nur die Glieder für $\mu = 0$ in der Darstellung von $P_\nu(\cos\gamma)$ einen Beitrag zum Integral liefern.

Gemäß unserer Absicht, nur Glieder beizubehalten, die am Ausdrucke für die Radiometerkraft K einen nicht verschwindenden Anteil haben, denken wir uns τ durch τ^* im

Ausdruck für die Kraft K ersetzt und die Integration nach ϑ' durchgeführt. Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß $\cos\vartheta' = P_1(\cos\vartheta')$ und im Hinblick auf die bekannten Orthogonalitäts- und Normierungseigenschaften der Kugelfunktionen

$$\int_{\vartheta'=0}^{\pi} P_1(\cos\vartheta')\,P_\nu(\cos\vartheta')\sin\vartheta'\,d\vartheta' = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \nu \neq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{wenn } \nu = 1 \end{cases}$$

folgt nun, daß nur jenes Glied aus τ^* beizubehalten ist. wir bezeichnen es etwa mit $\tau_1^*(a\ \vartheta')$, wo $\nu = 1$ ist. Es ist also

$$\tau_1^*(a,\vartheta') = \frac{\sigma}{8w}\int_{r=0}^{a}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{2w-ha}{w+ha}\cdot\frac{a}{a^3}\right] r\cos\vartheta'\cos\vartheta\,[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2]\,r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,dr\,.$$

Die angezeigte Integration nach ϑ läßt sich nun leicht durchführen; nur müssen wir zu diesem Zwecke den Ausdruck $[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2]$ näher ins Auge fassen. Beachten wir, daß $|A+iA'|^2 = (A+iA')\,\overline{(A+iA')}$, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Definition (19) der Größen A, A', B, B', C, C' und mit Hilfe der Ausdrücke (15) für R, F und T:

$$(22)\quad \begin{cases} & |A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2 \\ \text{I} & = \frac{1}{K_i^2\bar{K}_i^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{n(n+1)m(m+1)B_n^{\,1}B_m^{\,1}\frac{\psi_n(K_i r)\psi_m(\bar{K}_i r)}{r^4} \\ & \qquad P_n^{\,1}(\cos\vartheta)\,P_m^{\,1}(\cos\vartheta) \\ \text{II} & + K_i\bar{K}_i B_n^{\,1}B_m^{\,1}\frac{\psi_n'(K_i r)\psi_m'(\bar{K}_i r)}{r^2}\cdot\frac{P_n^{\,1}(\cos\vartheta)\,P_m^{\,1}(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} \\ \text{III} & + k_3^{\,i}k_3^{\,i}B_n^{\,2}B_m^{\,2}\frac{\psi_n(K_i r)\psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2}\cdot\frac{d}{d\vartheta}P_n^{\,1}(\cos\vartheta)\,\frac{d}{d\vartheta}P_m^{\,1}(\cos\vartheta) \\ \text{IV} & + K_i k_3^{\,i}B_n^{\,1}B_m^{\,2}\frac{\psi_n'(K_i r)\psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2}\cdot\frac{P_n^{\,1}(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\cdot\frac{d}{d\vartheta}P_m^{\,1}(\cos\vartheta) \\ \text{V} & + \bar{K}_i k_3^{\,i}B_n^{\,1}B_m^{\,2}\frac{\psi_n'(\bar{K}_i r)\psi_m(K_i r)}{r^2}\cdot\frac{P_n^{\,1}(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\cdot\frac{d}{d\vartheta}P_m^{\,1}(\cos\vartheta) \\ \text{VI} & + K_i\bar{K}_i B_n^{\,1}B_m^{\,1}\frac{\psi_n'(K_i r)\psi_m'(\bar{K}_i r)}{r^2}\cdot\frac{d}{d\vartheta}P_n^{\,1}(\cos\vartheta)\cdot\frac{d}{d\vartheta}P_m^{\,1}(\cos\vartheta) \\ \text{VII} & + k_3^{\,i}k_3^{\,i}B_n^{\,2}B_m^{\,2}\frac{\psi_n(K_i r)\psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2}\cdot\frac{P_n^{\,1}(\cos\vartheta)\,P_m^{\,1}(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} \\ \text{VIII} & + K_i k_3^{\,i}B_n^{\,1}B_m^{\,2}\frac{\psi_n'(K_i r)\psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2}\cdot\frac{d}{d\vartheta}P_n^{\,1}(\cos\vartheta)\cdot\frac{P_m^{\,1}(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \\ \text{IX} & + \bar{K}_i k_3^{\,i}B_n^{\,1}B_m^{\,2}\frac{\psi_n'(\bar{K}_i r)\psi_m(K_i r)}{r^2}\cdot\frac{d}{d\vartheta}P_n^{\,1}(\cos\vartheta)\cdot\frac{P_m^{\,1}(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\Big\}. \end{cases}$$

Unter Benützung der von Debye[1]) angegebenen Relationen

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_m^1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{P_n^1}{\sin\vartheta}+\frac{dP_m^1}{d\vartheta}\cdot\frac{dP_n^1}{d\vartheta}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots m \neq n-1 \text{ oder } m \neq n+1, \\ 2\dfrac{(n-1)^2 n (n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} \ldots m = n-1, \\ 2\dfrac{n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \ldots m = n+1, \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_m^1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{dP_n^1}{d\vartheta}+\frac{dP_m^1}{d\vartheta}\cdot\frac{P_n^1}{\sin\vartheta}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\begin{cases} 0 \ldots\ldots m \neq n, \\ 2\dfrac{n(n+1)}{2n+1} \ldots m = n, \end{cases}$$

$$\int_0^\pi P_m^1 P_n^1 \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots m \neq n-1 \text{ oder } m \neq n+1, \\ 2\dfrac{(n-1)n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \ldots m = n-1, \\ 2\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \ldots m = n+1 \end{cases}$$

berechnet sich daher jetzt $\tau_1^*(a,\vartheta')$ zu:

$$(23)\quad \begin{cases} \tau_1^*(a,\vartheta') = \dfrac{\sigma}{8w}\left[\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{2w-ha}{w+ha}\cdot\dfrac{a}{a^3}\right]\cdot\dfrac{i}{K_a^3\cdot\bar{K}_a^3}\cdot\cos\vartheta' \\ \text{1 u. 2}\begin{cases} \cdot\displaystyle\int_{r=0}^{a} dr \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(n+1)^3 n^3 (n-1)^3}{(2n-1)(2n+1)} B_n^1 B_{n-1}^1 \frac{\psi_n(K_i r)\,\psi_{n-1}(\bar{K}_i r)}{r}\right. \\ \quad\left. + \dfrac{2(n+1)^3 n^3 (n+2)^3}{(2n+1)(2n+3)} B^1 B_{n+1}^1 \dfrac{\psi_n(K_i r)\,\psi_{n+1}(\bar{K}_i r)}{r}\right. \end{cases} \\ \text{3 u. 4}\begin{cases} + \dfrac{2(n-1)^3 n (n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} B_n^1 B_{n-1}^1 K_i \bar{K}_i r\,\psi_n'(K_i r)\,\psi_{n-1}'(\bar{K}_i r) \\ \quad + \dfrac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} B_n^1 B_{n+1}^1 K_i \bar{K}_i r\,\psi_n'(K_i r)\,\psi_{n+1}'(\bar{K}_i r) \end{cases} \end{cases}$$

1) P. Debye, a. a. O. S. 95 und Diss. München 1908, S. 47.

$$
(23)\quad
\begin{cases}
5\text{ u. }6\begin{cases} + \dfrac{2(n-1)^2 n(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 B_{n-1}^2 r\, \psi_n(K_i r)\, \psi_{n-1}(\bar{K}_i r) \\ + \dfrac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 B_{n+1}^2 r\, \psi_n(K_i r)\, \psi_{n+1}(\bar{K}_i r) \end{cases} \\
7\text{ u. }8\begin{cases} + \dfrac{2n(n+1)}{2n+1} k_2^{\,i} K_i B_n^1 B_n^2 r\, \psi_n'(K_i r)\, \psi_n(\bar{K}_i r) \\ + 2\dfrac{n(n+1)}{2n+1} k_2^{\,i} \bar{K}_i B_n^1 B_n^2 r\, \psi_n'(\bar{K}_i r)\, \psi_n(K_i r) \Big] . \end{cases}
\end{cases}
$$

Dabei entstehen die Glieder 1 und 2 in (23) aus dem Term I unserer Relation (22), die Ausdrücke 3 und 4 aus II und VI, die Terme 5 und 6 aus III und VII und schließlich 7 aus IV und VIII und 8 aus V und IX.

Wenn wir in den Ausdrücken 1, 3 und 5 der Relation (23) den Summationsindex n durch $(n+1)$ ersetzen, erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
\tau_1^*(a,\vartheta') = \frac{\sigma}{8} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{3}{w+ha} \cdot \frac{1}{K_n^2 \bar{K}_n^2} \cdot \cos\vartheta' \\
\cdot \int_{r=0}^{a} dr \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{2n^2(n+1)^2(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \Big(B_n^1 B_{n+1}^1 \frac{\psi_n(\bar{K}_i r)\, \psi_{n+1}(K_i r)}{r} \\
+ B_n^1 B_{n+1}^1 \frac{\psi_n(K_i r)\, \psi_{n+1}(\bar{K}_i r)}{r} \Big) \\
+ \frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \{ B_n^1 B_{n+1}^1 K_i \bar{K}_i r\, \psi_n'(\bar{K}_i r)\, \psi_{n+1}'(K_i r) \\
+ B_n^1 B_{n+1}^1 K_i \bar{K}_i r\, \psi_n'(K_i r)\, \psi_{n+1}'(\bar{K}_i r) \\
+ k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 B_{n+1}^2 r\, \psi_n(\bar{K}_i r)\, \psi_{n+1}(K_i r) \\
+ k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 B_{n+1}^2 r\, \psi_n(K_i r)\, \psi_{n+1}(\bar{K}_i r) \} \\
+ \frac{2n(n+1)}{2n+1} \{ k_2^{\,i} K_i B_n^1 B_n^2 r\, \psi_n'(K_i r)\, \psi_n(\bar{K}_i r) \\
+ k_2^{\,i} \bar{K}_i B_n^1 B_n^2 r\, \psi_n'(\bar{K}_i r)\, \psi_n(K_i r) \} \Big] .
\end{aligned}
$$

Die Einsetzung dieses Wertes für $\tau_1^*(a, \vartheta')$ in die Relation (1) für K ergibt endlich den definitiven Ausdruck:

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
K = \frac{\pi}{8}\frac{\partial R}{M}\cdot\frac{1}{K_a^2\bar{K}_a^2}\cdot\frac{\sigma}{w+h\sigma}\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\Big[&\frac{2n^2(n+1)^2(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}\\
&\cdot\{B_n^1 B_{n+1}^1 J_n^1(\bar{K}_i,K_i)+B_n^1 B_{n+1}^1 J_n^1(K_i,\bar{K}_i)\}\\
&+\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}\{B_n^1 B_{n+1}^1 K_i\bar{K}_i J_n^2(\bar{K}_i,K_i)\\
&+B_n^1 B_{n+1}^1 \bar{K}_i K_i J_n^2(K_i,\bar{K}_i)+k_2'^i k_2'^i B_n^2 B_{n+1}^2 J_n^3(\bar{K}_i,K_i)\\
&+\bar{k}_2'^i k_2'^i B_n^2 B_{n+1}^2 J_n^3(K_i,\bar{K}_i)\}\\
&+\frac{2n(n+1)}{2n+1}\{\bar{k}_2'^i K_i B_n^1 B_n^2 J_n^4(\bar{K}_i,K_i)\\
&+k_2'^i\bar{K}_i B_n^1 B_n^2 J_n^4(K_i,\bar{K}_i)\}\Big],
\end{aligned}
\right.
$$

wobei wir hierin folgende abkürzende Bezeichnungen benützt haben:

$$J_n^1(\alpha,\beta)=\int_{r=0}^{a}\frac{\psi_n(\alpha r)\psi_{n+1}(\beta r)}{r}dr;\quad J_n^2(\alpha,\beta)=\int_{r=0}^{a}r\psi_n'(\alpha r)\psi'_{n+1}(\beta r)dr;$$

$$J_n^3(\alpha,\beta)=\int_{r=0}^{a}r\psi_n(\alpha r)\psi_{n+1}(\beta r)dr;\quad J_n^4(\alpha,\beta)=\int_{r=0}^{a}r\psi_n'(\alpha r)\psi_n(\beta r)dr.$$

Für diese Integrale lassen sich (siehe die II. Mitteilung) Rekursionsformeln angeben.

§ 5. Vergleich mit der Erfahrung.

Wir wollen nun an die Frage herantreten, inwieweit mit Hilfe des Lichtdruckes und der von uns berechneten Radiometerkraft K die von Ehrenhaft beobachtete photophoretische Kraft, ohne Annahme neuer Naturkräfte erklärt werden kann. Vor allem ist zu bemerken, daß der Lichtdruck stets in Richtung der einfallenden Lichtwelle wirkt, und daher nur für die Erklärung der positiven Photophorese herangezogen werden kann. Die Radiometerkraft K dagegen, kann sowohl „lichtpositiv" als auch „lichtnegativ" wirken, da ihr Vorzeichen durch die in (24) auftretende Summe bedingt ist. Für die positiv photophoretischen Stoffe kommt demnach der Lichtdruck *und* die Radiometerwirkung, für die negativ photophoretischen die Radiometerwirkung allein in Betracht. Tatsächlich sind in jedem Falle zwar beide Kräfte wirksam; da sie aber meist praktisch von verschiedener Größenordnung sind, ist nur die jeweils überwiegende zu berücksichtigen.

Um nun die Entscheidung in unserer eingangs dieses Paragraphen gestellten Frage zu fällen, überlegen wir uns zunächst, wie K (ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen) durch den Druck, die Temperatur und die Beschaffenheit des umgebenden Gases bestimmt wird. Diese Abhängigkeit wird in unserer Formel (24) durch den Faktor $\frac{\delta R}{M} \cdot \frac{\gamma}{w + h a}$ bedingt und es sind hier vor allem zwei Grenzfälle von Wichtigkeit. Ist, erstens, $w > h a$, so darf $h a$ gegenüber w vernachlässigt werden und mit Rücksicht darauf, daß nach der Zustandsgleichung $\frac{R}{M} \delta = \frac{p}{T}$, wird die Radiometerkraft K proportional sein dem Druck, umgekehrt proportional der Temperatur des umgebenden Gases und, bis auf den Akkommodationskoeffizienten γ, unabhängig von seiner chemischen Natur.

Ist dagegen, zweitens, $w < h a$, so daß nun w gegenüber $h a$ wegzulassen ist, so ist mit Rücksicht auf den Ausdruck (8) für h die Radiometerwirkung K nur von der Temperatur, dem Molekulargewicht und dem Akkommodationskoeffizienten des umgebenden Gases abhängig, dagegen vom Druck vollständig unabhängig. Was insbesondere die Abhängigkeit vom Molekulargewicht betrifft, so müßte K im vorliegenden Falle bis auf eine durch den Faktor $\left(\frac{c_p}{c_v} + 1\right) \Big/ \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)$ bedingte Korrektur (vgl. die Kritik darüber bei Smoluchowski a.a.O.) proportional $\sqrt{M}$ sein. — Betrachten wir nun die erfahrungsmäßig gegebenen Wärmeleitfähigkeiten w, so haben sie bei den für den vorliegenden Zweck in Betracht kommenden Substanzen, für die Metalle etwa die Größenordnung 1,01 bis 0,019 g cal/grad cm sec (Silber und Wismut) für die dielektrischen Stoffe etwa die Größenordnung $4{,}70 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec (Schwefel).[1]) Um w in C.G.S.-Einheiten umzurechnen, sind die obigen Zahlen noch mit $4{,}188 \cdot 10^7$ zu multiplizieren, so daß sich für w-Werte von der Größenordnung $4{,}23 \cdot 10^7$ bis $7{,}95 \cdot 10^5$ bzw. $1{,}97 \cdot 10^4$ erg/grad cm sec ergeben.

Nehmen wir nun an, daß wir es mit einem Kügelchen von der Größenordnung $a = 10^{-5}$ cm zu tun haben, wie dies ja bei den Versuchen von Ehrenhaft öfters der Fall ist, so berechnet sich $h a$ zu $\gamma \cdot 4{,}593 \cdot 10^3$ bis $\gamma \cdot 1{,}174 \cdot 10^3$ erg/grad cm sec.

1) A. Eucken, Ann. d. Phys. 34. S. 185. 1911.

Wir ersehen daraus, daß bei den Metallen entschieden $w > h\,a$ ist, daß also hier die Radiometerkraft K proportional dem Druck des umgebenden Gases sein muß. Leider ist für diese Klasse von Stoffen, die Abhängigkeit der photophoretischen Kräfte vom Drucke, mit Ausnahme des Silbers, nicht untersucht; daß sich bei diesem aber eine Druckunabhängigkeit zeigt, nimmt uns nicht weiter wunder, da wir allen Grund haben anzunehmen, daß hier die beobachtete photophoretische Kraft im wesentlichen mit dem Lichtdruck identisch ist.

Schwieriger liegen die Verhältnisse bei den dielektrischen Stoffen. Von Ehrenhaft wurde festgestellt, daß die bei Zimmertemperatur stabile Modifikation von Selen „lichtnegativ" ist. Nach dem Obigen müßte demnach die hier maßgebende Kraft die Radiometerkraft sein. Da nach den Versuchen von I. Parankiewicz die photophoretische Kraft hier vom Druck unabhängig zu sein scheint, müßte da nach unseren Überlegungen $w < h\,a$ sein, was auf extrem kleines Wärmeleitvermögen des Selens deuten würde. Leider ist aber seine Wärmeleitfähigkeit nicht bekannt, so daß dieses Beispiel vorläufig nicht zur Entscheidung der Frage herangezogen werden kann, ob die hier beobachtete negativ photophoretische Kraft etwa mit unserer Radiometerkraft K identisch ist. Die von I. Parankiewicz behauptete Gleichheit der negativ photophoretischen Kräfte in den 3 Gasen, Argon, Stickstoff und Wasserstoff ist mit den Ergebnissen unserer Theorie nicht recht in Einklang zu bringen. Es müßte ja im Falle $w < h\,a$ die Kraft K proportional $\sqrt{M}$ sein $\left[\text{bis auf den unsicheren Faktor } \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_v} + 1\right)\Big/\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_v} - 1\right)\right]$ und die Radiometerkräfte müßten sich in diesen Gasen verhalten, wie $\sqrt{40} : \sqrt{28} : \sqrt{2} = 4{,}47 : 3{,}74 : 1$. Worin die Ursachen dieser Diskrepanz zwischen Theorie und Erfahrung liegen, soll erst geprüft werden, wenn die experimentellen Tatsachen auf einer breiteren und sichereren Basis fundiert sind.

Die Erklärung, die Ehrenhaft für das Auftreten von lichtpositiven Selenteilchen gibt, daß es sich nämlich hier um eine metallische Selenmodifikation handelt, erscheint dagegen auch von unserem Standpunkt als ziemlich plausibel; wir müssen ja berücksichtigen, daß Selen in dieser Modifikation andere Materialkonstanten hat, die leicht ein Auftreten posi-

tiver Radiometerkräfte oder ein Überwiegen des Lichtdruckes zur Folge haben könnten.

Beim lichtnegativen Schwefel, wo die photophoretische Kraft nach den Beobachtungen gleichfalls druckunabhängig und demnach $w < ha$ sein soll, ist im Gegensatze dazu nach den empirisch gegebenen Daten $w > ha$. Dazu ist jedoch zu bemerken, daß die oben nach Eucken angegebene Wärmeleitfähigkeit für amorphen Schwefel in Wirklichkeit einen kleineren Wert haben dürfte. Denn Eucken erhält ja für Schwefel, den er als „siedend in die Form gegossen, großenteils amorph (plastisch)" bezeichnet, für w den Wert $4{,}70 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec, für Schwefel „rhombisch, kristallinisch" dagegen den größeren Wert $w = 7{,}00 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec, so daß also anzunehmen ist, daß die Wärmeleitfähigkeit des amorphen Schwefels allein noch kleiner ist als $4{,}70 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec. Ob aber auch die Größenordnung des wahren Wertes von w für amorphen Schwefel hinreicht, um die Druckunabhängigkeit der photophoretischen Kraft beim Schwefel zu sichern, ist jedoch nicht abzusehen.

Ferner ist es auch nicht ganz sicher, in welchem Zustande und in welcher Modifikation sich der Schwefel in den Ehrenhaftschen Partikelchen befindet. Hätte man es z. B. mit unterkühltem Schwefel zu tun, so wäre man bezüglich der Wärmeleitfähigkeit vollständig im unklaren. Schließlich ist auch noch ins Auge zu fassen, daß wenn die Ehrenhaftsche Größenbestimmung zu kleine Werte für den Teilchenradius a liefert, ha größer und damit die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung sowohl bei Se als auch bei S eine günstigere wird.

Um die Rolle, die die Radiometerkraft K bei den Ehrenhaftschen Versuchen spielt, eindeutig festzulegen, ist es nun erforderlich, in jedem einzelnen Falle den Zahlenwert dieser Kraft K zu berechnen. Dabei wird uns selbstverständlich vor allem interessieren, ob die negativ photophoretischen Kräfte im wesentlichen durch unsere Radiometerkraft erklärt werden können. Bedauerlicherweise sind jedoch bei den beiden Stoffen, Schwefel und Selen, bei denen quantitative Messungen über die negative Photophorese vorliegen, nicht alle physikalischen Konstanten bekannt. So liegen beim Se überhaupt keine Angaben über die Wärmeleitfähigkeit, beim Schwefel keine Daten

über den Absorptionskoeffizienten vor. *Bei Se wäre es überdies noch notwendig, den Brechungs- und Absorptionskoeffizienten auch im Ultraroten zu kennen, da wie aus der Einleitung hervorgeht, bei gegebenem Teilchenradius die Radiometerkraft für jede Wellenlänge im Spektrum zu berechnen ist.* Bekannt sind dagegen alle erforderlichen Daten zur Berechnung von K bei den von Ehrenhaft untersuchten lichtnegativen Metallen, Wismut und Blei. Für sie aber wird gerade eben von Ehrenhaft weder die Größe der photophoretischen Kraft noch der Teilchenradius angegeben. Der Vergleich von Theorie und Erfahrung kann somit erst dann ganz streng durchgeführt werden, wenn die entsprechenden photophoretischen Messungen vorliegen. Es genügt also zum Zwecke der Orientierung, wenn wir zunächst K nur in erster Näherung berechnen; *und zwar wollen wir hier noch im folgenden die Näherungsformeln für kleine, in der zweiten Mitteilung für große Teichenradien angeben.*

Bei den numerischen Rechnungen ist zunächst zu berücksichtigen, daß im Außenraum $\mu = \varepsilon = 1$ und $\sigma = 0$ zu setzen ist, während im Innenraum der Kugel $\mu = 1$ ist. Bezeichnen wir mit

$$N = \nu(1 - ik) = \sqrt{\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}} \tag{25}$$

den komplexen Brechungsexponenten (ν sei der gewöhnliche Brechungsexponent, k der Absorptionsindex) so haben wir:

$$\begin{cases} k_1^a = k_2^a = i\frac{\omega}{c}; \quad K_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \\ k_1^i = i\frac{\omega}{c}N^2; \quad k_2^i = i\frac{\omega}{c}; \quad K_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2}N^2. \end{cases} \tag{26}$$

Beachtet man in den Ausdrücken (14) für B_n^1 und B_n^2 diese Relationen, so nehmen die Koeffizienten die Gestalt an:

$$\begin{cases} B_n^1 = i^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\zeta_n(\varrho)\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(\varrho)}{\zeta_n(\varrho)\psi_n'(N\varrho) - N\zeta_n'(\varrho)\psi_n(N\varrho)}, \\ B_n^2 = i^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{\zeta_n(\varrho)\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(\varrho)}{N\zeta_n(\varrho)\psi_n'(N\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(N\varrho)}, \end{cases} \tag{27}$$

wobei $\varrho = a K_a = a\frac{\omega}{c}$ gesetzt ist.

Mit Rücksicht auf die Reihenentwicklungen (10) und (12) erhalten wir daher in erster Näherung (für $\varrho \ll 1$):

$$B_1^{\,1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{N^3} \cdot \frac{1}{2+N^3}; \quad B_1^{\,3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{N^3}; \quad B_2^{\,1} = i\frac{25}{6} \cdot \frac{1}{N^3} \cdot \frac{1}{3+2N^3};$$

$$B_2^{\,2} = i\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{N^3};$$

$$J_1^{\,1}(\alpha,\beta) = \frac{1}{45} \cdot \alpha^2\beta^3 \cdot \frac{a^5}{5}; \quad J_1^{\,2}(\alpha,\beta) = \frac{2}{15}\alpha\beta^2 \cdot \frac{a^5}{5};$$

$$J_1^{\,3}(\alpha,\beta) = \frac{1}{45}\alpha^3\beta^3\frac{a^7}{7}; \quad J_1^{\,4}(\alpha,\beta) = \frac{2}{9}\alpha\beta^3\frac{a^5}{5}.$$

Somit ergibt sich für K mit der gleichen Genauigkeit:

$$K = \frac{p}{T} \cdot \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{c \cdot k\nu^2}{w+ha} \cdot \gamma \cdot a^5 \left\{ \left[\frac{i}{2+\bar{N}^3} \cdot \frac{1}{3+2N^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{i}{2+\bar{N}^3} \right] + \text{konjug. kompl. Größen} \right\}.$$

Da nun wegen (25)

$$\frac{1}{3+2N^3} = \frac{3+2\nu^3(1-k^2)+4\nu^3ki}{L} \quad \text{und} \quad \frac{i}{2+\bar{N}^3} = \frac{2\nu^3k+i[2+\nu^3(1-k^2)]}{M},$$

wo
$$L = [3+2\nu^3(1-k^2)]^2 + 16\nu^6k^2,$$
$$M = [2+\nu^3(1-k^2)]^2 + 4\nu^6k^2,$$

so gilt somit für $\varrho \ll 1$:

$$(28) \quad K = \frac{p}{T} \cdot \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \cdot c \cdot a^5 \cdot \frac{(k\nu^2)^2}{M} \cdot \frac{1}{w+ha} \cdot \gamma \cdot \left[0{,}2 - \frac{1}{L}\right].$$

Dabei ist im Ausdrucke (24) für K nach (25) σ durch $\frac{4\pi c}{\lambda}\nu^2 k$ ersetzt. (λ bedeutet hier die Wellenlänge). Dieses σ rührt nämlich aus dem Ausdrück $\sigma\mathfrak{E}^2$ für die Joulesche Wärme her und man überzeugt sich einfach, daß hier nicht nur im Geltungsbereich der Maxwellschen Theorie, sondern auch bei Vorhandensein von Leitungs- und Dispersionselektronen σ durch $\frac{4\pi c}{\lambda}\nu^2 k$ gegeben wird.

Unser Ausdruck für K gilt für den Fall, daß die Amplitude der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ der einfallenden Lichtwelle den Betrag 1 hat. Hat diese Amplitude den Wert A, so ist der Ausdruck für K noch mit A^2 zu multiplizieren. Nun wird die räumliche Energiedichte eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum gegeben durch:

$$W = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2).$$

Handelt es sich nun um eine ebene elektromagnetische Welle, so ist $\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{H}^2$ und setzt man:

$$\mathfrak{E} = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + c\,t) ,$$

so ist der zeitliche Mittelwert von W:

$$\bar{W} = \frac{A^2}{2} .$$

Enthält also die einfallende Welle pro cm³ die Energie $\bar{W}$, so ist die von ihr ausgeübte Radiometerkraft $\mathfrak{R}$ gegeben durch:

$$\mathfrak{R} = A^2 K = 2 \bar{W} K . \tag{29}$$

Die Diskussion dieser Näherungsformel erfolgt gemeinsam mit der auf große ϱ Werte bezüglichen in der anschließend folgenden Mitteilung II.

19. November 1919.

(Eingegangen 1. Dezember 1919.)

3. *Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese;* von *A. Rubinowicz.*

(II. Mitteilung.)

In der vorangehenden Mitteilung[1]) haben wir den Ausdruck für die Radiometerkraft auf ein einseitig bestrahltes Kügelchen abgeleitet; wir haben dort gesehen, daß für kleine ϱ-Werte[2]) die Radiometerkraft R das Teilchen in der Richtung des einfallenden Lichtes zu bewegen sucht, daß mithin in diesem Falle keine durch Radiometerkräfte verursachte *negative* Photophorese möglich ist. In der vorliegenden Mitteilung II wollen wir nun zeigen, daß für große ϱ-Werte ($\varrho \gg 1$) für sehr schwach absorbierende Substanzen, deren reeller Brechungsindex $\nu > 1$ ist, eine *negative Radiometerkraft* zu erwarten ist. Als sehr schwach absorbierend bezeichnen wir dabei für unsere Zwecke solche Substanzen, bei denen bei der Berechnung der Radiometerkraft die Verteilung des elektromagnetischen Feldes im Inneren der Kugel mit vollständiger Vernachlässigung der Absorption ermittelt und bei der Berechnung der an einer Stelle der Kugel entwickelten Jouleschen Wärme einfach die bei der obigen Vernachlässigung errechnete Feldstärke benützt werden kann. Da die stark negativ photophoretischen Stoffe *Se*, *S*, *J* relativ schwach absorbieren, so glaube ich, sprechen die Resultate der vorliegenden Mitteilung entschieden für die Zurückführbarkeit der negativen Photophorese auf Radiometerkräfte. Eine weitere Stütze dieser Anschauung hoffe ich in einer dritten Mitteilung beizubringen, einerseits durch Aufstellung einer Näherungsformel für große ϱ-Werte bei voller Berücksichtigung der Absorption, andererseits durch exakte numerische Auswertung von I (24).

1) Wird im folgenden als I zitiert.

2) Wir verwenden hier die gleichen Bezeichnungen wie in der Mitteilung I.

Selbstverständlich gilt unsere jetzige Näherungsformel ebenso wie I (24) nur für den Fall, daß a klein ist gegenüber der freien Weglänge des unsere Kugel umgebenden Gases.

Bevor wir unsere Rechnungen durchführen, wollen wir durch eine anschauliche Betrachtung uns plausibel machen, daß unser Ergebnis schon von vornherein zu erwarten ist. Im Falle $\varrho > 1$, wo der Radius der Kugel gegenüber der Wellenlänge des einfallenden Lichtes groß ist, ist der Strahlengang in erster Näherung nach der geometrischen Optik zu berechnen und die auf diesem Wege für die Radiometerkraft erhaltene Näherungsformel muß im wesentlichen mit der jetzt abzuleitenden übereinstimmen. Aus dem geometrischen Strahlengang in einer Kugel können wir aber folgendes entnehmen. Der Brennpunkt F unserer Kugel ist im Abstand $\frac{a}{\nu - 1}$ vom Mittelpunkt O gelegen.[1]) Ist also $1 < \nu < 2$, so kommt der Brennpunkt außerhalb der Kugel zu liegen. Im Falle $\nu > 2$ befindet er sich aber innerhalb der Kugel.

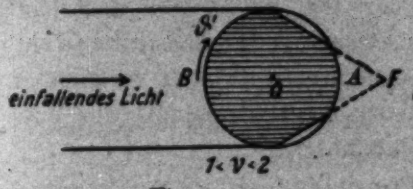


Fig. 1.

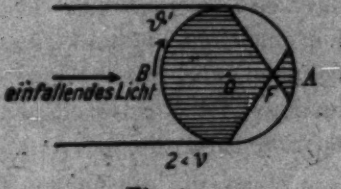


Fig. 2.

Da wir nun voraussetzen, daß die Absorption innerhalb der Kugel sehr klein ist, so ist aus den beiden Fig. 1 und 2 ohne weiteres zu entnehmen, daß die Konzentration der elektromagnetischen Energie in der Nähe des an der Rückseite gelegenen Punktes A größer ist, als in der Nähe des an der Vorderseite liegenden Punktes B. Wir werden daraus schließen, daß der Temperaturüberschuß τ in der Nachbarschaft von A größer ist als in der von B. Nun wird nach I (1) die auf unsere Kugel wirkende Radiometerkraft gegeben durch:

$$K = {}^1/_4\, \gamma \frac{\delta R}{M} \int \tau \cos \vartheta' \, df,$$

wobei der Winkel ϑ' vom Punkte B aus gezählt wird.

1) Im allgemeinen für den Fall, daß nur die Brechung an der Vorderseite der Kugel berücksichtigt wird.

Nach unserer Überlegung über die Temperaturverteilung τ auf der Oberfläche der Kugel ist daher für K ein negativer Wert zu erwarten, was nach den Festsetzungen in I einer Radiometerkraft entspricht, die im Sinne einer negativ photophoretischen Kraft wirkt. Dabei ist es selbstverständlich von Wichtigkeit, zu bemerken, daß nach der obigen Formel für K es gar nicht darauf ankommt, ob etwa der Mittelwert de Temperatur auf der Kugelhälfte bei A größer ist als der bei B; wegen des im Integranden auftretenden $\cos\vartheta'$ reicht z. B. ein hinlänglich steiles Maximum bei A (d. h. für $\vartheta' = \pi$) hin, um K negativ zu machen.

Auch die Tatsache, daß die Radiometerkraft in unserem Falle (wenigstens für so große Radien a, daß $ha > w$ ist) der dritten Potenz von a proportional wird, ist wohl unschwer zu verstehen. Nach der soeben angeführten Relation I (1) ist ja die Radiometerkraft proportional $a^2 \iint \tau \cos\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'$ und τ ist a proportional. Dies letztere folgt aus der Tatsache, daß τ einerseits proportional ist der von der Kugel absorbierten Wärmemenge, die bei kleiner Absorption mit dem durchstrahlten Volumen, also wie a^3 wächst, andererseits aber verkehrt proportional ist der Oberfläche der Kugel durch die die Wärme abströmt und die wie a^2 zunimmt.

Wenn wir die obigen Plausibilitätsbetrachtungen hier ein wenig über den Rahmen des in dieser Mitteilung Bewiesenen fortführen, so wird es uns auch noch begreiflich, daß bei den Beobachtungen von Ehrenhaft die negativ photophoretische Kraft mit dem Teilchenradius zunächst zu einem Maximum wächst, um dann wieder abzunehmen. Unsere obigen Überlegungen gelten doch nur so lange, als wir annehmen können, daß die Strahlung die Kugel im wesentlichen ungeschwächt durchsetzt. Wird aber bei einer bestimmten Substanz der Teilchenradius a bereits so groß angenommen, daß diese Voraussetzung nicht mehr zutrifft, wird vielmehr schon der überwiegende Teil der Strahlungsenergie in der ersten, dem Punkte B nahe stehenden Kugelhälfte absorbiert, dann wird die Temperatur der Kugelfläche bei B größer als bei A werden, und die Radiometerkraft muß dann im Sinne einer positiv photophoretischen Kraft wirken.

Bevor wir an die Ableitung der angekündigten Näherungsformeln gehen, wollen wir zunächst in § 1 zur Ergänzung der Mitteilung I, die in dem Ausdruck I (24) für die Radiometerkraft auftretenden Integrale $J_n^1 \ldots J_n^4$ in geschlossener Form auswerten, da wir sie im folgenden ohnehin brauchen werden.

§ 1. Berechnung der Integrale J_n^s für ein absorbierendes Medium.

Da wir bei der Diskussion der Formel für die Radiometerkraft I (24) alle darin auftretenden Größen k und K durch den komplexen Brechungsindex N mit Hilfe der Relation I (26) ausdrücken müssen, empfiehlt es sich, schon jetzt N einzuführen. Um schleppende Bezeichnungen zu vermeiden, wollen wir ferner statt $J_n^1(\bar{K}_l, K_l)$ auch $J_n^1(\bar{N}, N)$ schreiben und analoge Bezeichnungen für die übrigen Integrale J_n^s verwenden. Die Berechnung der Integrale J_n^s gelingt mit Hilfe der aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannten Relation[1])

$$(1)\quad \int_0^1 \psi_n(\alpha x)\,\psi_n(\beta x)\,dx = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha\,\psi_n(\beta)\,\psi_{n+1}(\alpha) - \beta\,\psi_n(\alpha)\,\psi_{n+1}(\beta)\}.$$

Führen wir nun hier durch $x = \frac{r}{a}$ eine neue Integrationsveränderliche r ein und setzen ferner $\alpha = N\varrho$ und $\beta = \bar{N}\varrho$, so erhalten wir den Ausdruck für ein Integral, das wir im folgenden auch kurz mit $J_n^0(N, \bar{N})$ bezeichnen wollen:

$$(2)\quad \begin{aligned} J_n^0(N,\bar{N}) &= \int_0^a \psi_n\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)dr \\ &= \frac{a}{\varrho}\,\frac{1}{N^2-\bar{N}^2}\{N\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1}(N\varrho) - \bar{N}\psi_n(N\varrho)\psi_{n+1}(\bar{N}\varrho)\}. \end{aligned}$$

Da nun nach I (11):

$$\frac{a}{N\varrho}(2n+1)\,\psi_n\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) = r\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) + r\psi_{n-1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

so ergibt sich zunächst für

$$J_n^3(\bar{N}, N) = \int_0^a r\,\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)dr$$

1) Vgl. die Definition der Funktion ψ_n in I (10) und etwa die Relation (21b) S. 69 in Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig 1908.

die Rekursionsformel

$$(3)\qquad J_n^{3}(\bar{N},N) = -J_{n-1}^{3}(N,\bar{N}) + \frac{a}{N\varrho}(2n+1)J_n^{0}(N,\bar{N}),$$

wo $J_n^{0}(N,\bar{N})$ nach (2) durch die Funktionen ψ_n ausdrückbar ist.

Um $J_n^{3}(\bar{N},N)$ für alle Werte n zu berechnen, ist somit nur noch die Kenntnis etwa des Ausdruckes für $J_0^{3}(\bar{N},N)$ notwendig, der leicht direkt angegeben werden kann. Es ist nämlich:[1])

$$\psi_0(x) = \sin x, \qquad \psi_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x,$$

und somit ergibt sich

$$J_0^{3}(\bar{N},N) = \int_0^a r \sin\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\cdot\left[\frac{a}{r\,N\varrho}\sin\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) - \cos\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)\right]dr$$

$$= \frac{a^2}{2\varrho^2}\left[\sin\varrho(\bar{N}-N)\,\frac{\bar{N}-2N}{N(\bar{N}-N)^2} - \sin\varrho(\bar{N}+N)\,\frac{\bar{N}+2N}{N(\bar{N}+N)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\varrho\cos\varrho(\bar{N}+N)}{\bar{N}+N} + \frac{\varrho\cos\varrho(\bar{N}-N)}{\bar{N}-N}\right].$$

Um das Integral $J_n^{4}(N,\bar{N})$ auszuwerten, muß man nur die Relation (2) partiell nach N differenzieren und erhält so:

$$(4)\qquad \begin{cases} J_n^{4}(N,\bar{N}) = \displaystyle\int_0^a r\,\psi_n'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)dr \\ \quad = -\dfrac{2N}{N^2-\bar{N}^2}\dfrac{a}{\varrho}J_n^{0}(N,\bar{N}) + \dfrac{a^2}{\varrho^2}\dfrac{1}{N^2-\bar{N}^2}\{\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1}(N\varrho) \\ \quad + N\varrho\,\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1}'(N\varrho) - \bar{N}\varrho\,\psi_n'(N\varrho)\psi_{n+1}(\bar{N}\varrho)\}. \end{cases}$$

Für die Integrale

$$J_n^{1}(\bar{N},N) = \int_0^a \frac{1}{r}\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)dr,$$

$$J_n^{2}(\bar{N},N) = \int_0^a r\,\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)dr$$

lassen sich einzeln keine geschlossenen Ausdrücke in den ψ_n angeben. Sie können aber leicht in der Kombination, in der

1) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 57. 1909. Formel (12), (13), (14).

sie in I (24) auftreten, in geschlossener Form ausgewertet werden. Zunächst gilt:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d}{dr}\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) = \frac{\bar{N}\varrho}{a}\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) \\ \qquad + \frac{N\varrho}{a}\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right). \end{cases}$$

Multiplizieren wir die leicht aus I (11) folgende Relation:

$$\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right) = (n+1)\frac{\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)}{r\frac{\bar{N}\varrho}{a}} - \psi_{n+1}\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)$$

einmal mit

$$(n+1)\frac{\bar{N}\varrho}{a}\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

das andre Mal mit

$$\frac{\bar{N}\varrho}{a}\cdot\frac{N\varrho}{a}\,r\,\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

so erhalten wir, wenn wir die sich ergebenden Terme entsprechend ordnen:

$$(n+1)^2\frac{1}{r}\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) = (n+1)\frac{\bar{N}\varrho}{a}\psi_{n+1}\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) + (n+1)\frac{\bar{N}\varrho}{a}\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

$$\frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}r\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) = -\frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}r\psi_{n+1}\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) + (n+1)\frac{N\varrho}{a}\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right).$$

Addieren wir schließlich diese beiden Beziehungen, so ergibt sich mit Rücksicht auf (5) und die Tatsache, daß $\psi_n(0) = 0$ ist, für die in I (24) auftretende Kombination der beiden Integrale J_n^1 und J_n^2 endlich der Ausdruck:

$$(6)\quad \begin{cases} (n+1)^2 J_n^1(\bar{N},N) + \frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}J_n^2(\bar{N},N) = (n+1)\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1}(N\varrho) \\ \qquad + (n+1)\frac{\bar{N}\varrho}{a}J_{n+1}^0(N,\bar{N}) - \frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}J_{n+1}^1(N,\bar{N}). \end{cases}$$

§ 2. Berechnung des Integrals J_n^0 für ein schwach absorbierendes Medium.

Die in dem vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Formeln setzen uns instand, die in dem Ausdruck I (24) für die Radiometerkraft auftretenden Integrale für den Fall zu berechnen, daß der komplexe Brechungsexponent $N = \nu(1 - ik)$ wirklich einen komplexen Wert hat. Haben wir es aber mit einem nicht absorbierenden Körper zu tun, wo $k = 0$ und daher $N = \bar{N} = \nu$ ist, so erscheinen einzelne von den in § 1 abgeleiteten Ausdrücken in der unbestimmten Form 0/0. Es ist daher notwendig, hier anzugeben, durch welche Relationen unsere obigen Formeln in dem jetzigen Falle zu ersetzen sind. Wir werden sie dabei gleich in eine für das Weitere bequeme Form bringen. Zunächst erhält man durch Grenzübergang in (2) oder mit Hilfe der zu (1) analogen Relation in der Theorie der Besselschen Funktionen für den Fall $\varkappa = \beta$[1]) für $J_n^0(\nu)$

$$(2') \quad J_n^0(\nu) = \int_0^a \left[\psi_n\left(r\frac{\nu\varrho}{a}\right)\right]^2 dr = \frac{a}{2}\left[\psi_n^2(\nu\varrho) - \psi_{n-1}(\nu\varrho)\psi_{n+1}(\nu\varrho)\right].$$

Dabei schreiben wir in abkürzender Bezeichnung $J_n^0(\nu)$ statt $J_n^0(\nu,\nu)$. Aus (2') ergibt sich sofort durch Differentiation nach ν unter Zuhilfenahme der leicht aus I (11) zu folgernden Relationen:

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_n'(x) = (n+1)\dfrac{\psi_n(x)}{x} - \psi_{n+1}(x), \\ \psi_n'(x) = \psi_{n-1}(x) - n\dfrac{\psi_n(x)}{x} \end{cases}$$

für $J_n^1(\nu)$ der Ausdruck:

$$(4') \quad J_n^1(\nu) = \frac{a^2}{4\nu\varrho}\left[\psi_n^2(\nu\varrho) + \psi_{n+1}(\nu\varrho)\psi_{n-1}(\nu\varrho)\right],$$

der auch durch Grenzübergang aus (4) mit Hilfe von (7) und I (11) zu erhalten ist.

Die auch in unserem jetzigen Falle gültige Relation (6) gibt nun mit Rücksicht auf (2'), (4') und I (11) die Beziehung:

$$(6') \quad \begin{cases} (n+1)^2 J_n^1(\nu) + \dfrac{\nu^2\varrho^2}{a^2} J_n^3(\nu) \\ \quad = \left[(n+1) - \dfrac{(2n+3)^2}{4}\right]\psi_n(\nu\varrho)\psi_{n+1}(\nu\varrho) \\ \quad + \dfrac{2n+3}{4}\nu\varrho\,\psi_n^2(\nu\varrho) + \dfrac{2n+1}{4}\nu\varrho\,\psi_{n+1}^2(\nu\varrho). \end{cases}$$

1) Vgl. P. Schafheitlin, a. a. O. S. 69.

Schließlich gilt jetzt auch die Rekursionsformel (2):

$$J_n^2(\nu) = -J_{n-1}^2(\nu) + \frac{n}{\nu\varrho}(2n+1)J_n^2(\nu)$$

aus der offenbar

$$(3') \quad (-1)^{n+1}J_n^2(\nu) = -J_0^2(\nu) + \frac{n}{\nu\varrho}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}(2s+1)J_s^2(\nu)$$

folgt.

$J_0^2(\nu)$ ergibt sich dabei hier ebenso wie oben durch direkte Integration zu

$$J_0^2(\nu) = \frac{a^3}{2\nu^3\varrho^3}\left[\nu\varrho + \frac{\nu\varrho}{2}\cos 2\nu\varrho - \frac{3}{4}\sin 2\nu\varrho\right].$$

§ 3. Näherungsformeln für ψ_n und ζ_n.

Es handelt sich nun darum, für den in I(24) unter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck einen für große ϱ-Werte gültigen Näherungswert anzugeben. Dies bietet uns keine Schwierigkeit, da wir hier den gleichen Weg gehen können, den Debye[1]) im analogen Falle bei der Berechnung des Lichtdruckes eingeschlagen hat. Wir stellen hier zunächst die im folgenden zu gebrauchenden Näherungswerte für die Funktionen ψ_n und ζ_n zusammen.[2]) Im folgenden § 4 werden wir dann mit ihrer Hilfe genäherte Ausdrücke für die Koeffizienten B_n^1 und B_n^2 und die Integrale $J_n^2(\nu)$ herstellen und schließlich im § 5 den Näherungswert für die Radiometerkraft K angeben.

Ist zunächst $n + {}^1/_2 < \varrho$, so gilt für große ϱ-Werte:

$$(8) \quad \begin{cases} \zeta_n(\varrho) = \dfrac{e^{-i(\varrho f_0 - \pi/4)}}{(\sin\tau_0)^{1/2}}; & \psi_n(\varrho) = \dfrac{\cos(\varrho f_0 - \pi/4)}{(\sin\tau_0)^{1/2}}; \\ \zeta_n'(\varrho) = (\sin\tau_0)^{1/2}e^{-i(\varrho f_0 + \pi/4)}; & \psi_n'(\varrho) = (\sin\tau_0)^{1/2}\cos(\varrho f_0 + \pi/4), \end{cases}$$

wobei τ_0 ein reeller im Intervall $0 < \tau_0 < \frac{\pi}{2}$ gelegener Winkel ist, der gegeben wird durch

$$(9) \quad \cos\tau_0 = \frac{n + {}^1/_2}{\varrho}$$

und der Ausdruck f_0 bestimmt wird durch

$$(10) \quad f_0 = \sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0.$$

τ_0 und f_0 sind somit sowohl vom Index n als auch vom Argument ϱ abhängig.

1) P. Debye, a. a. O. S. 1192.
2) P. Debye, a. a. O.; ferner Math. Ann. 67, S. 535, 1909.

Im folgenden werden wir öfter vor die Aufgabe gestellt, die oben eingeführten Funktionen für den Index $(n+1)$ bis auf kleine Größen durch τ_0-Werte darzustellen, wie sie dem Index n entsprechen. Bezeichnen wir[1]) das zu $(n+1)$ gehörige τ_0 mit τ_0', so ist

$$\cos\tau_0' = \frac{n+{}^3/_4}{\varrho} \tag{9'}$$

und das entsprechende f_0 wird gegeben durch

$$f_0' = \sin\tau_0' - \tau_0'\cos\tau_0'. \tag{10'}$$

Setzen wir nun

$$\tau_0' = \tau_0 + \Delta\tau_0, \tag{11}$$

so ergibt sich aus (9') durch Entwicklung von $\cos\tau_0'$ nach Potenzen von $\Delta\tau_0$

$$\cos\tau_0' = \cos\tau_0 - \sin\tau_0\,\Delta\tau_0 = \frac{n+{}^3/_4}{\varrho},$$

woraus mit Benützung von (9)

$$-\sin\tau_0\,\Delta\tau_0 = \frac{1}{\varrho} \tag{12}$$

folgt. Aus dieser Beziehung ergibt sich schließlich durch Entwicklung nach Potenzen von $\Delta\tau_0$

$$f_0' = f_0 + \tau_0\sin\tau_0\,\Delta\tau_0 = f_0 - \frac{\tau_0}{\varrho}. \tag{13}$$

Die beiden Gleichungen (11) und (13) lassen uns sofort erkennen, in welcher Weise die Funktionen (8) für den Indexwert $(n+1)$ durch τ_0-Werte ausdrückbar sind, die dem Index n entsprechen. Bei diesem Übergang kann wohl nach (11) in $\sin\tau_0$ das τ_0 einfach beibehalten werden, nach (13) muß man aber $f_0\varrho$ durch $f_0\varrho - \tau_0$ ersetzen, weil ja hier τ_0 und $f_0\varrho$ von gleicher Größenordnung sind. So ist z. B.

$$\psi_{n+1}(\varrho) = \frac{\cos(\varrho f_0 - \pi/4 - \tau_0)}{(\sin\tau_0)^{1/2}} \tag{14}$$

und analog erhalten wir für den Indexwert $(n-1)$:

$$\psi_{n-1}(\varrho) = \frac{\cos(\varrho f_0 - \pi/4 + \tau_0)}{(\sin\tau_0)^{1/2}}. \tag{15}$$

1) P. Debye, a. a. O. S. 122.

Für den Fall $n + 1/2 > \varrho$ gilt für große ϱ-Werte

$$(16)\quad \begin{cases} \zeta_n(\varrho) = i\dfrac{e^{-i\varrho f_0}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}; & \psi_n(\varrho) = \dfrac{e^{i\varrho f_0}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}; \\ \zeta_n'(\varrho) = -i(i\sin\tau_0)^{1/2}e^{-i\varrho f_0}; & \psi_n'(\varrho) = (i\sin\tau_0)^{1/2}e^{i\varrho f_0}, \end{cases}$$

wobei jetzt τ_0 die negative imaginäre Wurzel der Gleichung (9) ist und f_0 wieder durch (10) gegeben wird. Beim Übergang von n zu $(n+1)$ sind τ_0' und f_0' wieder durch (11) und (13) festgelegt, so daß man z. B. erhält:

$$(17)\qquad \psi_{n+1}(\varrho) = \frac{e^{i(\varrho f_0 - \tau_0)}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}.$$

Ebenso gilt:

$$(18)\qquad \psi_{n-1}(\varrho) = \frac{e^{i(\varrho f_0 + \tau_0)}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}.$$

Es mag hier noch bemerkt werden, daß im jetzigen Falle $i\sin\tau_0$ reell und positiv, if_0 jedoch reell und negativ ist.

§ 4. Näherungsformeln für B_n^1, B_n^2 und die Integrale J_n^4.

Bevor wir an den eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen herantreten, wollen wir zeigen, daß die in der Darstellung I (27) für die Koeffizienten B_n^1 und B_n^2 gegebenen Ausdrücke sich noch weiter vereinfachen lassen. Die bekannte von Lommel hergeleitete Relation[1])

$$\frac{\pi x}{2}\left(H_n^{(2)}(x)J_{n-1}(x) - H_{n-1}^{(2)}(x)J_n(x)\right) = i$$

lautet nämlich nach I (10) und I (12) in ψ_n und ζ_n ausgedrückt:

$$\zeta_n(x)\psi_{n-1}(x) - \zeta_{n-1}(x)\psi_n(x) = i.$$

Mit Hilfe der auch für ζ_n gültigen Relation I (11) erhalten wir somit für den in B_n^1 und B_n^2 auftretenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\zeta_n(\varrho)\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(\varrho) &= \frac{1}{2n+1}\{\zeta_n[(n+1)\psi_{n-1} - n\psi_{n+1}] \\ &\quad -\psi_n[(n+1)\zeta_{n-1} - n\zeta_{n+1}]\} = \frac{1}{2n+1}\{(n+1)[\zeta_n\psi_{n-1} - \zeta_{n-1}\psi_n] \\ &\quad + n[\zeta_{n+1}\psi_n - \zeta_n\psi_{n+1}]\} = \frac{(n+1)i + ni}{2n+1} = i.\end{aligned}$$

---

1) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln usw. S. 165. Leipzig 1909.

Es gilt somit allgemein:

$$(19)\quad \begin{cases} B_n^{\,1} = i^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \dfrac{1}{N} \dfrac{1}{\zeta_n(\varrho)\psi_n'(N\varrho) - N\zeta_n'(\varrho)\psi_n(N\varrho)}, \\ B_n^{\,2} = i^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \dfrac{1}{N\zeta_n(\varrho)\psi_n'(N\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(N\varrho)}. \end{cases}$$

In diesem Paragraphen wollen wir nun für die Koeffizienten $B_n^{\,1}$ und $B_n^{\,2}$ sowie für die Integrale $J_n'(\nu)$ Näherungsformeln angeben und gleichzeitig die erhaltenen Ausdrücke in eine dem Folgenden angepaßte Form bringen. Da in $B_n^{\,1}$, $B_n^{\,2}$ und den $J_n'(\nu)$ die Funktionen ψ_n und ζ_n nicht nur mit dem Argument ϱ, sondern auch mit $\nu\varrho$ auftreten, wollen wir jetzt durch die Relation

$$(20)\quad \cos\tau_1 = \frac{n+1/2}{\nu\varrho}$$

einen Winkel τ_1 definieren, wobei sein Vorzeichen durch die gleichen Festsetzungen wie bei τ_0 festgelegt sein soll. Ferner sei analog wie früher:

$$(21)\quad f_1 = \sin\tau_1 - \tau_1\cos\tau_1$$

und τ_1' und f_1' seien die zu dem Indexwerte $(n+1)$ gehörigen Werte von τ_1 und f_1. Zwischen τ_0 und τ_1 besteht nach (9) und (20) die Relation

$$(22)\quad \cos\tau_0 = \nu\cos\tau_1 \quad \textit{(Brechungsgesetz)}.$$

Im folgenden wird stets $\nu > 1$ vorausgesetzt.

Wir wollen nun die genäherten Ausdrücke für $B_n^{\,1}$ und $B_n^{\,2}$ angeben. Wie aus (19) ersichtlich ist, enthalten die hier vorkommenden Funktionen ζ_n und ψ_n als Argument sowohl ϱ als auch $\nu\varrho$. Da aber die Näherungsformeln für ζ_n und ψ_n, je nachdem diese Funktionen von ϱ oder $\nu\varrho$ abhängen, für verschiedene n-Werte von der einen in § 8 angegebenen Form in die andere übergehen, so müssen wir hier die folgenden 3 Fälle unterscheiden:

1. $n + 1/2 < \varrho < \nu\varrho$,
2. $\varrho < n + 1/2 < \nu\varrho$,
3. $\varrho < \nu\varrho < n + 1/2$.

Befinden wir uns zunächst im Falle 1., so ist nach (8):

$$\zeta_n(\varrho)\,\psi_n'(\nu\varrho) = \left(\frac{\sin\tau_1}{\sin\tau_0}\right)^{1/2} e^{-i(\varrho f_0 - \pi/4)}\,\frac{1}{2}\left\{e^{+i(\nu\varrho f_1+\pi/4)}\right.$$

$$\left. + e^{-i(\nu\varrho f_1+\pi/4)}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\tau_1}{\sin\tau_0}\right)^{1/2} e^{-i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}\left(1+e^{-2i\nu\varrho f_1}\right)$$

und analog gilt:

$$\zeta_n'(\varrho)\,\psi_n(\nu\varrho) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\tau_0}{\sin\tau_1}\right)^{1/2} e^{-i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}\left(1-e^{-2i\nu\varrho f_1}\right).$$

Berücksichtigen wir nun, daß im Hinblick auf (22):

$$\sin\tau_0 + \nu\sin\tau_1 = \frac{\sin(\tau_1+\tau_0)}{\cos\tau_1} \quad \text{und}$$

$$\nu\sin\tau_0 + \sin\tau_1 = \frac{\sin(\tau_0+\tau_1)\cos(\tau_0-\tau_1)}{\cos\tau_1}$$

und bezeichnen wir mit Debye (*Reflexionskoeffizienten*):

$$(23)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{\nu\sin\tau_0 - \sin\tau_1}{\nu\sin\tau_0 + \sin\tau_1} = \dfrac{\operatorname{tg}(\tau_0-\tau_1)}{\operatorname{tg}(\tau_0+\tau_1)}; \\ r_2 = \dfrac{\sin\tau_0 - \nu\sin\tau_1}{\sin\tau_0 + \nu\sin\tau_1} = \dfrac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\sin(\tau_0+\tau_1)}, \end{cases}$$

so ergibt sich schließlich:

$$(24)\qquad \begin{cases} B_n^1 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{\nu}\,\dfrac{2(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_0+\tau_1)\cos(\tau_0-\tau_1)}\cdot\dfrac{e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}}{1+ir_1e^{-2i\nu\varrho f_1}}, \\ B_n^2 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{2(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_1+\tau_0)}\cdot\dfrac{e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}}{1+ir_2e^{-2i\nu\varrho f_1}}. \end{cases}$$

Da im Falle 2. die Ausdrücke $\zeta_n(\varrho)$ und $\zeta_n'(\varrho)$ formell in der gleichen Weise geschrieben werden können, wie im Falle 1. und da für $\psi_n(\nu\varrho)$ und $\psi_n'(\nu\varrho)$ in beiden Fällen die gleiche Darstellung gilt, so erstreckt sich die Gültigkeit von (24) auch auf den Fall 2.

Im Falle 3. erhält man dagegen:

$$(24')\qquad \begin{cases} B_n^1 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{\nu}\,\dfrac{(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_0+\tau_1)\cos(\tau_0-\tau_1)}\,e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}; \\ B_n^2 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\,\dfrac{(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_0+\tau_1)}\cdot e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}. \end{cases}$$

Bei der Darstellung der Integrale J_n' durch Näherungsformeln ist zu beachten, daß alle in ihnen auftretenden Funk-

tionen ψ_n nur vom Argument $\nu\varrho$ abhängen. Es sind daher hier nur 2 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{a)}\quad n + {}^1/_2 < \nu\varrho\,,$$
$$\text{b)}\quad \nu\varrho < n + {}^1/_2\,.$$

Zunächst erhalten wir aus (6'), (4'), (8), (14), (15), wenn wir uns auf die höchste Potenz von ϱ beschränken und demgemäß nach (20) n durch $\nu\varrho\cos\tau_1$ ausdrücken, im Falle a):

$$(25)\quad \begin{cases} (n+1)^2 J_n^{\,1}(\nu) + \left(\dfrac{\nu\varrho}{a}\right)^2 J_n^{\,2}(\nu) = \dfrac{(\nu\varrho)^2}{2}\cos\tau_1\sin\tau_1 = \dfrac{(\nu\varrho)^2}{4}\sin 2\tau_1\,, \\ J_n^{\,4}(\nu) = \dfrac{a^2}{4\nu\varrho}\cdot\dfrac{1}{\sin\tau_1}\left\{2\cos^2(\nu\varrho f_1 - \pi/4) - \sin^2\tau_1\right\} \\ = \dfrac{a^2}{8\nu\varrho}\dfrac{1}{\sin\tau_1}\left\{e^{2i(\nu\varrho f_1 - \pi/4)} + e^{-2i(\nu\varrho f_1 - \pi/4)} + 2\cos^2\tau_1\right\}. \end{cases}$$

Im Falle b) ergibt sich dagegen mit Zuhilfenahme von (16), (17) und (18):

$$(25')\quad \begin{cases} (n+1)^2 J_n^{\,1}(\nu) + \left(\dfrac{\nu\varrho}{a}\right)^2 J_n^{\,2}(\nu) = \nu\varrho\,\dfrac{\cos\tau_1}{i\sin\tau_1}\,e^{2i\nu\varrho f_1 - i\tau_1}\,, \\ J_n^{\,4}(\nu) = \dfrac{a^2}{2\nu\varrho}\,\dfrac{e^{2i\nu\varrho f_1}}{i\sin\tau_1}\,. \end{cases}$$

Etwas vorsichtiger muß man bei der Berechnung von $J_n^{\,3}(\nu)$ verfahren. Zunächst werde der Fall a) betrachtet. Für das in der Darstellung (3') für $J_n^{\,3}(\nu)$ auftretende $J_s^{\,0}$ findet man nach (2'), (8), (14), (15):

$$J_s^{\,0}(\nu) = \frac{a}{2}\sin\tau_1\,.$$

Da mit Rücksicht auf (20) $2s+1 = 2\nu\varrho\cos\tau_1$ gesetzt werden kann, so ergibt sich:

$$(-1)^{n+1} J_n^{\,3}(\nu) = -J_0^{\,3}(\nu) + \frac{a^2}{\nu\varrho}\nu\varrho\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\cos\tau_1\sin\tau_1$$
$$= -J_0^{\,3}(\nu) + \frac{a^2}{2}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\sin 2\tau_1\,.$$

Fassen wir nun hier in der Summe zwei aufeinanderfolgende Glieder ins Auge, etwa ein zu dem ungeraden Index s und ein zu dem geraden $(s+1)$ gehöriges, so liefern diese zu unserer Summe den Beitrag:

$$\sin 2\tau_1 - \sin 2\tau_1' = \sin 2\tau_1 - \sin 2(\tau_1 + \Delta\tau_1) = -\cos 2\tau_1 . 2\,\Delta\tau_1.$$

Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden: n eine gerade Zahl und n eine ungerade Zahl. Im ersten Falle lassen sich alle in der Summe auftretenden Glieder paarweise zusammenfassen, im zweiten Falle aber bleibt dabei eines, etwa das letzte, übrig. Bezeichnen wir nun mit η_n eine Zahl, die für ein gerades n gleich 0 und für ein ungerades n gleich 1 ist, so haben wir demnach:

$$(-1)^{n+1} J_n^{\,3}(\nu) = -J_0^{\,3}(\nu) - \frac{a^3}{2} \sum_{s=1}^{n}{}' \cos 2\tau_1 \, 2\,\Delta\tau_1 + \eta_n \frac{a^3}{2} \sin 2\tau_1^{(n)} .$$

Dabei soll $\tau_1^{(n)}$ das zum Index n gehörige τ_1 bezeichnen. Der Strich beim Summenzeichen deutet an, daß die Summe nunmehr bloß über alle ungeraden s ($s \leqq n$) zu erstrecken ist. Approximieren wir nun die Summe durch ein Integral, so wird, da mit Rücksicht auf (20) $s = 1$ ungefähr $\tau_1 = \pi/2$ entspricht:

$$\sum_{s=1}^{n}{}' \cos 2\tau_1 \, 2\,\Delta\tau_1 = \int_{\pi/2}^{\tau_1^{(n)}} \cos 2\tau_1 \, d\tau_1 = \tfrac{1}{2} \sin 2\tau_1 \Big|_{\pi/2}^{\tau_1^{(n)}} = \tfrac{1}{2} \sin 2\tau_1^{(n)}.$$

Es wird daher, wenn wir jetzt den Index n bei $\tau_1^{(n)}$ wieder weglassen:

$$J_n^{\,3}(\nu) = (-1)^n J_0^{\,3}(\nu) + \frac{a^3}{4} \sin 2\tau_1 . \tag{26}$$

Für den Fall $n + \frac{1}{2} > \nu\varrho$ ist $J_n^{\,3}(\nu)$ jetzt einfach zu erledigen. Vor allem ist nach (2′), (16), (17), (18)

$$J_s^{\,0}(\nu) = 0 . \tag{27}$$

Da nun für den durch die Ungleichung $\bar{n} + \frac{1}{2} < \nu\varrho < \bar{n} + \frac{3}{2}$ bestimmten Index $\bar{n}$ wegen $\tau_1^{\bar{n}} = 0$ (vgl. (20)) nach (26) die Relation $J_{\bar{n}}^{\,3}(\nu) = (-1)^{\bar{n}} J_0^{\,3}(\nu)$ besteht, so gilt wegen (3′) und (27) jetzt allgemein

$$J_s^{\,3}(\nu) = (-1)^n J_0^{\,3}(\nu) . \tag{26′}$$

Für $J_0^{\,3}(\nu)$ gilt dabei in den obigen Formeln der in § 2 angegebene Ausdruck.

§ 5. Näherungsformel für die Radiometerkraft.

Die im Ausdruck I (24) für die Radiometerkraft K auftretende unendliche Summe denken wir uns in vier Reihen $T_1 \ldots T_4$ gespalten und zwar so, daß die Reihe T_s nur Glieder mit den Integralen $J_n^{\,s}(\nu)$ enthält. Jedes Glied einer Reihe T_s

würde dann noch eine Summe zweier konjugiert komplexer Ausdrücke sein. Wir erhalten das gleiche Endresultat, wenn wir statt dessen das erste Glied doppelt nehmen und die Verabredung treffen, daß dann im Schlußresultat nur der Realteil beizubehalten ist. Mit Hilfe der Formeln des letzten Paragraphen sind nun leicht genäherte Ausdrücke für die T_s anzugeben. Um dies durchzuführen, denken wir uns jede der unendlichen Summen T_s in zwei Teile gespalten. In eine endliche Summe T_s', die die Glieder mit dem Index $n = 1$ bis $n = n^*$ umfaßt, wo n^* durch $n^* + \frac{1}{2} < \varrho < n^* + \frac{3}{2}$ bestimmt ist, und in eine unendliche Summe T_s'', die die sämtlichen übrigen Glieder von $n = n^* + 1$ angefangen, enthält. Zunächst befassen wir uns mit der Summe $(T_1 + T_2)$, die mit Rücksicht auf I (24) und I (26) die Gestalt hat:

$$T_1 + T_2 = T_1' + T_2' + T_1'' + T_2''$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3(n+1)(n+2)^3}{(2n+1)(2n+3)} B_n^1 B_{n+1}^1 \left\{ (n+1)^2 J_n^1(v) + \frac{v^2\varrho^2}{n^2} J_n^2(v) \right\}.$$

Bei der Berechnung von $T_1' + T_2'$ ist $n + \frac{1}{2} < \varrho$ und es sind daher die Näherungsformeln (24) und (25) zu verwenden. Es wird

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1' + T_2' = 2 \sum_{n=1}^{n^*} i \, & \frac{2n^3(n+1)(n+2)^3}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)}{n(n+1)^3(n+2)} \\ & \cdot \frac{1}{v^3} \cdot \frac{4 \sin \tau_0 \sin \tau_1 \cos^3 \tau_1}{\sin^3(\tau_0+\tau_1)\cos^3(\tau_0-\tau_1)} \cdot \frac{e^{-i(\varrho f_0 - v\varrho f_1)} e^{i(\varrho f_0' - v\varrho f_1')}}{(1 - i r_1 e^{2iv\varrho f_1})(1 + i r_1 e^{-2iv\varrho f_1'})} \\ & \cdot \frac{v^3\varrho^3}{4} \sin 2\tau_1 . \end{aligned} \right.$$

f_0' und f_1' sind dabei durch (10') und (21) gegeben. Bei der Bildung von B_n^1 und B_n^2 ist zu beachten, daß f_0 und f_1 in dem jetzigen Falle reell sind. Berücksichtigen wir (13) und die Tatsache, daß für f_1' eine analoge Relation gilt, so wird

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{-i(\varrho f_0 - v\varrho f_1)} \cdot e^{i(\varrho f_0' - v\varrho f_1')}}{(1 - i r_1 e^{2iv\varrho f_1})(1 + i r_1 e^{-2iv\varrho f_1'})} \\ & = \frac{e^{-i(\tau_0 - \tau_1)}}{(1 - i r_1 e^{2iv\varrho f_1})(1 + i r_1 e^{-2i(v\varrho f_1 - \tau_1)})} \\ & = e^{-i(\tau_0 - \tau_1)} \sum_{p=0}^{\infty} (i r_1 e^{2iv\varrho f_1})^p \sum_{q=0}^{\infty} (-i r_1 e^{-2iv\varrho f_1})^q e^{2i\tau_1 q} . \end{aligned} \right.$$

Die Reihenentwicklungen sind hier wegen $|r_1| < 1$ zulässig. Wir denken uns nun die beiden Reihen ausmultipliziert und nach positiven und negativen Potenzen von $e^{2i\nu\varrho f_1}$ geordnet. Es haben dann die Glieder 0ter Ordnung in dieser Entwicklung den Wert:

$$e^{-i(\tau_0-\tau_1)}\sum_{p=0}^{\infty}(i r_1 e^{2i\nu\varrho f_1})^p(-i r_1 e^{-2i\nu\varrho f_1})^p e^{2i\tau_1 p}$$
$$= e^{-i(\tau_0-\tau_1)}\sum_{p=0}^{\infty}(r_1^2 e^{2i\tau_1})^p = \frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_1^2 e^{2i\tau_1}}.$$

Setzen wir nun unsere nach $e^{2i\nu\varrho f_1}$ fortschreitende Reihenentwicklung in den Ausdruck (28) für $T_1' + T_2'$ ein, so liefern bei der Summation nach n alle Glieder, die nicht mit der 0ten Potenz von $e^{2i\nu\varrho f_1}$ multipliziert sind, keinen merklichen Beitrag zu $T_1' + T_2'$. Die Funktion $(e^{2i\nu\varrho f_1})^n$ ändert sich nämlich beim Übergang von einem n zum nächstfolgenden wegen (13) schon um einen beträchtlichen Betrag. Da der Koeffizient von $(e^{2i\nu\varrho f})^n$ sich dabei nur wenig ändert, so resultiert für diese Glieder im Ganzen in erster Näherung bei der Summation die Null.[1]) Ersetzen wir nun noch in (28) n nach (9) durch $\varrho\cos\tau_0$ und multiplizieren den ganzen Ausdruck mit $(-\varrho\sin\tau_0\,\Delta\tau_0 = 1)$ (12), so erhalten wir demnach:

$$T_1' + T_2' = -8i\varrho^4\sum_{n=1}^{n^*}\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^2\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_1^2 e^{2i\tau_1}}\Delta\tau_0.$$

Formen wir die von $n=1$ bis $n=n^*$ laufende Summe in ein nach (9) zwischen den Grenzen $\pi/2$ und 0 zu erstreckendes Integral um, so wird schließlich:

$$(30)\quad T_1' + T_2' = 8i\varrho^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^2\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_1^2 e^{2i\tau_1}}d\tau_0.$$

Bei der Berechnung von $T_1'' + T_2''$ sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem α) $\varrho < n+{}^1/_2 < \nu\varrho$ oder β) $\varrho < \nu\varrho < n+{}^1/_2$ ist. Im Falle α) gilt für die Koeffizienten B_n^1 und B_n^2 die Darstellung (24) und für das Integral $J_n^4(\nu)$ die Formel (25). Bei der Bildung von B_n^1 ist nun zu beachten, daß jetzt if_1 einen komplexen, if_0 aber einen reellen und zwar negativen

1) P. Debye, a. a. O., S. 127.

Wert hat und mithin $if_0 = \overline{if_0}$ ist. Man sieht ohne weiteres, daß jetzt B_n^1 und $\bar{B}_n^1$ mit wachsendem ϱ wie eine e-Potenz verschwinden. Diese Glieder kommen somit nicht in Betracht. Im Falle β) gilt für B_n^1 und $J_n^4(\nu)$ die Formel (24') und (25'); if_0 und if_1 sind hier beide reell und zwar negativ. Wie eine leichte Überlegung zeigt, verschwinden auch die dem jetzigen Falle entsprechenden Glieder in $T_1'' + T_2''$ mit wachsendem ϱ wie eine e-Potenz und wir können somit im ganzen

$$T_1'' + T_2'' = 0$$

setzen.

Bei der Berechnung von

$$T_3 = 2\frac{\varrho^3}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2 J_n^3(\nu)$$

setzen wir im Hinblick auf den Ausdruck (26) und (26') für $J_n^3(\nu)$

$$T_3 = T_{3a} + T_{3b},$$

wo

$$T_{3a} = 2\frac{\varrho^3}{a^3}J_0^3(\nu)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2,$$

$$T_{3b} = \frac{\varrho^3}{2}\sum_{n=1}^{n=n^{**}}\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2 \sin 2\tau_1.$$

n^{**} ist hier mit Rücksicht darauf, daß $J_n^3(\nu)$ nach (26') für $n + {}^1/_2 > \varrho\nu$ durch $J_n^3(\nu) = (-1)^n J_0^3(\nu)$ gegeben ist, durch die Relation $n^{**} + {}^1/_2 < \nu\varrho < n^{**} + {}^3/_2$ bestimmt. Zerlegen wir T_{3b} in $T_{3b}' + T_{3b}''$, so ergibt uns zunächst das gleiche Verfahren, das zur Berechnung von $T_1' + T_2'$ gedient hat, für

$$T_{3b}' = \frac{\varrho^3}{2}\sum_{n=1}^{n^*}\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2 \sin 2\tau_1 \quad (n^* + {}^1/_2 < \varrho < n^* + {}^3/_2)$$

den Ausdruck

$$(31)\quad T_{3b}' = 8i\varrho^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^2\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)}\cdot\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_2^2e^{2i\tau_1}}d\tau_0.$$

T_{3b}'' und T_{3a} sind bei dem von uns angestrebten Grade der Genauigkeit Null zu setzen. Es ergibt sich ja das Ver-

schwinden von T_{2a}'' auf dem gleichen Wege wie bei $T_1'' + T_2''$ und eine leichte Abschätzung von T_{2b} zeigt, daß es günstigsten Falles einen ϱ^3 proportionalen Beitrag liefern könnte und mithin für uns nicht in Betracht kommt. Wir müssen uns noch mit der Abschätzung von

$$T_4 = T_4' + T_4'' = -2i\frac{\varrho^2}{a^2}\nu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{2n+1}B_n^1 B_n^2 J_n^4(\nu)$$

befassen. Wir können leicht einsehen, daß wir es Null setzen dürfen. T_4' ist nämlich proportional ϱ^0 und überdies rein imaginär (wir bemerken nebenbei, daß bei einer eventuellen Berechnung von T_4' mit Rücksicht darauf, daß nach (25) in $J_n^4(\nu)$ auch Glieder mit $e^{2i\nu\varepsilon_1}$ und $e^{-2i\nu\varepsilon_1}$ vorkommen, in der Entwicklung des Zählers von $B_n^1 B_n^2$ auch diese beide Faktoren enthaltenden Glieder zu berücksichtigen sind) und T_4'' verschwindet wieder nach (24′) und (25′) exponentiell.

Nach dem Obigen liefern somit im ganzen nur die beiden Ausdrücke $T_1' + T_2'$ (30) und T_{2b}' (31) einen nicht verschwindenden Beitrag zu T. Es wird somit:

$$T = 8i\varrho^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3\tau_0\cos\tau_0\sin^3\tau_1\cos^3\tau_1}{\sin^3(\tau_0+\tau_1)}e^{-i(\tau_0-\tau_1)}$$
$$\left\{\frac{1}{\cos^3(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{1}{1-r_1^2e^{2i\tau_1}}+\frac{1}{1-r_2^2e^{2i\tau_1}}\right\}d\tau_0.$$

Um nun zu zeigen, daß unter unseren Voraussetzungen unsere Radiometerkraft im Sinne einer negativ photophoretischen Kraft wirkt, müssen wir jetzt noch nachweisen, daß T stets einen negativen Realteil besitzt.

Zunächst ist

$$\Re\left[ie^{-i(\tau_0-\tau_1)}\frac{1}{\cos^3(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{1}{1-r_1^2e^{2i\tau_1}}\right]$$
$$=\frac{\Re i\left[e^{-i(\tau_0-\tau_1)}-r_1^2e^{-i(\tau_0+\tau_1)}\right]}{\cos^3(\tau_0-\tau_1)(1+r_1^4-2r_1^2\cos 2\tau_1)}=\frac{\sin(\tau_0-\tau_1)-r_1^2\sin(\tau_0+\tau_1)}{\cos^3(\tau_0-\tau_1)(1+r_1^4-2r_1^2\cos 2\tau_1)}$$

Für den Zähler dieses Ausdruckes erhält man dabei mit Hilfe von (23)

$$\sin(\tau_0-\tau_1)-r_2^2\sin(\tau_0+\tau_1)=\frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\Big[\cos^2(\tau_0-\tau_1)-\frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\sin(\tau_0+\tau_1)}\cos^2(\tau_0+\tau_1)\Big]$$

$$=\frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}[1-r_2\sin(\tau_0-\tau_1)\sin(\tau_0+\tau_1)-r_2+\sin(\tau_0-\tau_1)\sin(\tau_0+\tau_1)]$$

$$=\frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}(1-r_2)[1+\sin(\tau_0-\tau_1)\sin(\tau_0+\tau_1)].$$

Ebenso ergibt sich

$$\Re\left[i\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_2^2e^{2i\tau_1}}\right]=\frac{\sin(\tau_0-\tau_1)-r_2^2\sin(\tau_0+\tau_1)}{1+r_2^4-2r_2^2\cos 2\tau_1},$$

wobei nach (23)

$$\sin(\tau_0-\tau_1)-r_2^2\sin(\tau_0+\tau_1)=\sin(\tau_0-\tau_1)(1-r_2).$$

Wir erhalten somit für T im Ganzen jetzt den Ausdruck

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned}T=8\varrho^4\int_0^{\pi/2}&\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^2\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)}\sin(\tau_0-\tau_1)(1-r_2)\\&\Big\{\frac{1+\sin(\tau_0-\tau_1)\sin(\tau_0+\tau_1)}{\cos^4(\tau_0-\tau_1)(1+r_1^4-2r_1^2\cos 2\tau_1)}+\frac{1}{1+r_2^4-2r_2^2\cos 2\tau_1}\Big\}d\tau_0.\end{aligned}\right.$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß T ein negatives Vorzeichen hat. Da wir $\nu>1$ voraussetzen, so ist wegen des Brechungsgesetzes (22) $\cos\tau_0=\nu\cos\tau_1$ und in dem für uns in Betracht kommenden Bereiche $(0,\pi/2)$ ist daher $\tau_0<\tau_1$ und mithin $\sin(\tau_0-\tau_1)<0$, während alle übrigen Terme in (32) positiv sind ($|r_2|<1$!).

Bezeichnen wir nun das in (32) auftretende Integral mit S, setzen also $T=8\varrho^4S$, so ergibt sich jetzt aus I (24) für K im Hinblick auf I (25) und I (26) der Ausdruck:

$$(33)\qquad K=\frac{p}{T}\cdot\frac{4\pi^2}{\lambda}c\nu^2h\frac{1}{w+h\alpha}a^4\gamma S\qquad(\varrho>1).$$

Das Integral S hat dabei ein negatives Zeichen. Leider läßt sich S nur numerisch oder graphisch auswerten.

Die nun erwiesene Tatsache, daß für den Fall einer Kugel, die im Sinne der Einleitung als schwach absorbierend zu bezeichnen ist, für große ϱ-Werte stets eine negative Radiometerkraft auftritt, spricht nun entschieden dafür, daß die negative Photophorese als Radiometereffekt aufzufassen ist.

Ehrenhaft untersucht nämlich die photophoretischen Kräfte des Lichtes einer Bogenlampe, deren Spektrum infolge der Absorption der Lichtstrahlen in den Glasteilen und der Wasserkammer der Apparatur sich über einen Wellenlängenbereich $4 \cdot 10^{-5}$ bis $12 \cdot 10^{-5}$ cm erstreckt. Das Energiemaximum seiner Bogenlampenstrahlung schätzt Ehrenhaft mit Lummer bei einer Wellenlänge von $7 \cdot 10^{-5}$ cm.

Frl. Parankiewicz hat die negativ photophoretischen Kräfte an *Se*-Teilchen mit einem Radius von der Größe 0,7 bis $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ cm und an *S*-Teilchen mit einem Radius von der Größe 1 bis $4 \cdot 10^{-5}$ cm messend verfolgen können. Für jedes der experimentell untersuchten Teilchen kommen somit je nach dem Spektralbereiche $\varrho \left(= \frac{2\pi a}{\lambda} \right)$-Werte $\gtrless 1$ in Betracht. Auf Grund einer der beiden Näherungsformeln allein ist somit hier keine Entscheidung möglich und die von Ehrenhaft gemessenen photophoretischen Kräfte wären nach unserer Auffassung als die Resultierende positiver und negativer Radiometerkräfte zu deuten. Eine Entscheidung ließe sich nur durch langwierige Zahlenrechnungen mittels der exakten Formel erbringen, was aber wegen der bereits betonten Unkenntnis eines Teiles der Materialkonstanten von *Se* und *S* zurzeit nicht vollständig durchführbar ist.

Auf Grund unserer beiden Näherungsformeln können wir aber die folgenden unsere Auffassung stützenden Argumente beibringen. Vor allem kann *Se* und besonders mit vollstem Rechte *S* für die hier in Betracht kommende Größenordnung der Kügelchen als schwach absorbierend bezeichnet werden und es gilt daher, da es sich hier ohnehin nur um eine Schätzung handelt, die Näherungsformel (33) für *K*. Bei *Se* ist ja der komplexe Brechungsexponent $N = \nu(1 - i k) = 2{,}790 - i \cdot 0{,}450$ (bei der Wellenlänge $\lambda = 6{,}68 \cdot 10^{-5}$ cm).[1]) Bei *S* dürfte der imaginäre Teil von *N* und damit die Absorption sicher noch viel kleiner sein. Sodann ist es plausibel, daß bei *S* und *Se* die negativen Radiometerkräfte überwiegen werden und daher unsere Theorie die Beobachtungen von Ehrenhaft tatsächlich wiederspiegelt. Die positiven Radiometerkräfte werden

1) W. Meier, Ann. d. Phys. 31. S. 1017. 1910.

ja nur durch eine ultrarote Wärmestrahlung bedingt, die eine 10 cm dicke Wasserschicht passiert hat und nach den Messungen von Aschkinass[1]) dringt durch eine solche für längere Wellen als $9{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm weniger als $^1/_{10}$ der Intensität der einfallenden Wärmestrahlung hindurch. Die Intensität der bei den Ehrenhaftschen Versuchen wirksamen ultraroten Strahlung ist demnach nicht zu überschätzen. Andererseits erkennt man aber durch Vergleich unserer beiden Näherungsformeln, daß, gleiche Intensität der einfallenden Strahlung vorausgesetzt, die Radiometerkraft für große ϱ-Werte (kleine Wellenlängen) die für kleine ϱ-Werte (große Wellenlängen) überwiegt. Aus I (28) und (33) folgt ja

$$\frac{K_{gr}}{K_{kl}} = \frac{[k\nu^3 \varrho\, S]_{gr}}{\left[\varrho^3 \frac{(k\nu^3)^3}{M}\left(0{,}2 - \frac{1}{L}\right)\right]_{kl}},$$

wobei die Indizes $_{gr}$ und $_{kl}$ andeuten, daß die entsprechenden Größen für große bzw. kleine ϱ-Werte zu nehmen sind. Da $k\nu^3$ mit der Wellenlänge nicht sehr stark variiert, ϱ die Größenordnung 1 hat und schließlich $1/L$ gegenüber 0,2 zu vernachlässigen ist, so ist unser Quotient von der Größenordnung $\left(\frac{M \cdot S}{0{,}2\, k\nu^3}\right)_{kl}$, der z. B. für Se den Wert $392 \cdot S$ hat. Wenn auch S schätzungsweise kleiner als 1 ist, so ist doch das Produkt $392 \cdot S$ jedenfalls noch als groß zu bezeichnen.

Es mag auch noch betont werden, daß unsere Näherungsformeln Radiometerkräfte geben, die in der Größenordnung tatsächlich den Ehrenhaftschen Photophoresekräften entsprechen. Schätzen wir etwa die nicht gemessene Wärmeleitfähigkeit von Se als ungefähr gleich der von S ($4{,}7 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec) und setzen wir die räumliche Energiedichte der Strahlung W mit Ehrenhaft zu 0,279 erg/cm^3, so ergibt sich aus I (29) und (33) $\Re = 2 \cdot 10^{-7} \gamma \cdot S$. Dabei ist $a = 10^{-5}$ cm, $\lambda = 7 \cdot 10^{-5}$ cm, $N = 2{,}79 - i \cdot 0{,}45$, $p = 10^6$ dyn und $T = 300°$ angenommen und sowohl γ als auch S sind hier beide kleiner als 1. Nach den Versuchen von Frl. Parankiewicz werden bei Se Kräfte von der Größenordnung 10^{-10} dyn beobachtet, was nach den unserer Rechnung zugrunde liegenden Annahmen eine Über-

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. 55. S. 401. 1895.

einstimmung der Größenordnung bedeutet. Es ist ja nämlich von vornherein zu erwarten, daß unsere Schätzung für $\mathfrak{A}$ einen zu großen Wert gibt. Zunächst nehmen wir doch an, daß die ganze Strahlungsenergie allein nur im Sinne einer negativen Radiometerkraft wirkt, während sie doch auch positive Radiometerkräfte erzeugt und die beobachtete Kraft nur die Resultierende der beiden ist. Sodann ist sicher die Absorption von *Se* nicht zu vernachlässigen, was nach unseren Überlegungen in der Einleitung eine Verkleinerung der negativen Radiometerkraft zur Folge haben muß. Schließlich wenden wir hier die Näherungsformel (33) in einem Bereich $\varrho = 1$ an, wo sie, wenn selbst alle Bedingungen für ihre Anwendbarkeit gesichert wären, zu große Werte ergeben wird. Die negative Kraft (33) ergibt sich ja nur für $\varrho > 1$ und muß für $\varrho < 1$ in die positive Kraft I (28) übergehen. In Wirklichkeit geht also K mit kleiner werdendem ϱ schneller zur Null (um dann positiv zu werden) als es (33) anzeigt.

Auch sei noch erwähnt, daß die von Ehrenhaft beobachteten photophoretischen Kräfte alle größer zu schätzen wären, falls Ehrenhaft den Teilchenradius zu klein annehmen sollte, wie das mehrfach behauptet wird. Bemerkenswert ist noch, daß die negative photophoretische Kraft bei den weniger absorbierenden *S*-Teilchen auch noch für größere Radien (nach Ehrenhaft bis $a = 1$ bis $2 \cdot 10^{-4}$ cm) beobachtbar bleibt, als bei *Se*. Nach der Einleitung ist für große Kugeln stets ein positiver Effekt zu erwarten und es geht aus den dortigen Überlegungen auch klar hervor, daß diese Umkehr des Effektes, den Ehrenhaft nur bis zum Nullwerden verfolgt, erst bei um so größerem Teilchenradius zu erwarten ist, je weniger die Teilchen absorbieren.

Wien, 22. Februar 1920.

(Eingegangen 27. Februar 1920.)

4. *Zur experimentellen Entscheidung der Frage der Radioaktivität aller Elemente;* von *G. Hoffmann.*

Ein Weg zur experimentellen Entscheidung der Frage der Radioaktivität aller Elemente ist die Untersuchung geringster Ionisationen. Da die Möglichkeit, auf elektrometrischem Wege kleinste Elektrizitätsmengen nachzuweisen, durch das von mir vor mehreren Jahren konstruierte Elektrometer erheblich erweitert ist, so lag es nahe, durch die Angaben dieses Instrumentes auf dem Wege zur Herstellung und Untersuchung möglichst kleiner Ionisationen sich führen zu lassen. Beobachtungen in dieser Richtung über die Ionisierungen in geschlossenen Gefäßen sind in einer früheren Arbeit[1]) zusammengestellt worden. Sie zeigten, daß eine Beimengung der bekannten radioaktiven Elemente in einer Konzentration von der Größenordnung 10^{-12} zu den anderen Elementen genügt, um die beobachteten Erscheinungen im allgemeinen zu erklären; eine spezielle Diskussion wurde damals zurückgestellt, weil es notwendig erschien, zunächst durch weitere Messungen die Resultate zu festigen und die elektrometrische Anordnung auf die Exaktheit der Messung kleinster Elektrizitätsmengen zu prüfen. Die Fortführung der Untersuchung[2]) hat ergeben, daß auch die Versuchsanordnung von 1915 volles Vertrauen verdient.

1. Während eine Reinigung eines geschlossenen Gefäßes von den kurzlebigen radioaktiven Substanzen durch Ausheingerung möglich ist, müssen die langlebigen Produkte auf chemischem Wege beseitigt werden. Arbeiten in dieser Richtung konnten nur die Geringfügigkeit einer eventuell vorhandenen Restaktivität, die nicht von den bekannten Radioelementen her-

1) G. Hoffmann, Elster-Geitel-Festschrift, S. 435. 1915.
2) G. Hoffmann, Ann. d. Phys. 52. S. 665. 1917.

rührt, dartun; eine Entscheidung schien unmöglich.[1]) Die Tatsache jedoch, daß jedes α-Teilchen emittierende Radioelement eine charakteristische Reichweite der Strahlung besitzt, kann zur Feststellung der Herkunft des α-Teilchens führen, falls die elektrometrische Anordnung empfindlich genug ist, um die Ionenmenge, die das einzelne α-Teilchen auf seinem Fluge erzeugt — weiterhin abgekürzt als „Stoßgröße" bezeichnet —, zu messen. Diese Methode zum Nachweis der Herkunft jeder α-Aktivität ist jedoch erschwert, weil die einzelne Stoßgröße dadurch verkürzt werden kann, daß das Teilchen vor Durchfliegung der Reichweite auf eine Wand des Gefäßes aufprallt und daß die emittierende Substanz im Wandmaterial eingebettet sein und deswegen von vornherein mit verkürzter Reichweite emittieren kann. *Durch statistische Verwertung zahlreicher Stoßgrößenbeobachtungen wird diese Schwierigkeit behoben.* Denn die wahrscheinliche Stoßgrößenverteilung ist berechenbar, falls das Gefäß, in dem sich die Ionisationen abspielen, geometrisch einfache Form hat und falls über die Art und Lagerung der emittierenden Materie — dem Gasinhalt beigemengt, als Oberflächenbelag, oder dem Wandmaterial beigemengt — bestimmte Annahmen gemacht werden.

2. Das Elektrometer, das die Grundlage der Untersuchung bildet, ist in dieser Zeitschrift[2]) ausführlich beschrieben. Es ist auf Bruchteile eines Millimeters Gasdruck evakuiert, so daß im Innern keine Ladungen auf den isolierten zentralen Teil übergehen können. Der Oberteil des Elektrometers ist so geformt, daß darauf unmittelbar das Ionisationsgefäß aufgesetzt werden kann, bestehend aus einem Außenstück, das durch eine Hochspannungsbatterie auf eine konstante Spannung gebracht werden kann, und einer zentralen Auffangeelektrode. Die unter dem Einfluß von Ladungsänderungen stattfindende Bewegung des Elektrometersystems wird durch einen Lichtzeiger auf einer sich gleichmäßig drehenden Trommel markiert, die mit photographischem Papier bespannt ist. Bei einer

1) Vgl. die Literaturzusammenstellung in Meyer-Schweidler, Radioaktivität, S. 482. 1916.

2) G. Hoffmann, Ann. d. Phys. 12. S. 1196. 1913; 52. S. 668. 1917; Phys. Zschr. 18. S. 480 u. 1029. 1918.

Instrumentempfindlichkeit von etwa 5000 Ionen pro Millimeter markiert sich jeder Ionisationsvorgang, der durch ein α-Teilchen innerhalb des Gefäßes bewirkt wird (ca. 150000 Ionen) mit einer stoßweisen gut meßbaren Bewegung des Lichtzeigers. Im Elektrometerkopf befindet sich eine Influenzierungsvorrichtung, vermittelst der im elektrostatischen Maß bekannte Ladungsmengen influenziert werden können. Auf diese Weise ist es möglich, jederzeit die Empfindlichkeit des Instrumentes festzustellen und die beobachteten Stoßgrößen in Ionenzahlen umzurechnen. Wegen der Einzelheiten dieser Anordnung und der übrigen Schaltvorrichtungen muß auf die früheren Arbeiten verwiesen werden.

3. Für die Berechnung der Stoßgrößenverteilung ergeben sich einfache Verhältnisse bei kugelförmiger Begrenzung des Ionisationsraumes, weil dann jeder Punkt als Ausgangsort der Strahlung hinsichtlich der Begrenzung der Strahlung durch die übrige Wandung gleichberechtigt ist. Daher diente auch eine aus einem großen Stück Vollmessing ausgedrehte Hohlkugel von 7,72 cm innerem Durchmesser schon für einen Teil der 1915 publizierten Messungen (vgl. Fig. 1; *A* Ionisationsgefäß, an Spannung; *B* Träger des Bernsteinisolators, vom Gefäß durch Gummiplatte isoliert, an Erde; *C* Elektrometeroberteil, evakuiert, mit zentralem Quecksilberkontakt). Durch statistische Verarbeitung von 810 gemessenen Stößen wurde eine Stoßgrößenverteilungskurve gewonnen; der damals nur graphisch mitgeteilten Kurve liegen die in nachstehender Tabelle veröffentlichten Zahlen zugrunde.

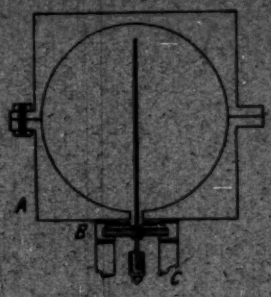


Fig. 1.

In dieser Tabelle steht unter I die mittlere Stoßgröße in mm, unter II die ihr entsprechende Ionenzahl, dividiert durch 10^4 — es war 1 mm = 5200 Ionen —, unter III die Zahl der zu dieser Gruppe gehörigen gemessenen Stöße. Diese Zahlenreihe weist noch sehr erhebliche Schwankungen auf. Es ist daher unter IV noch eine Zahlenreihe aufgeführt, die aus III dadurch gewonnen ist, daß 4mal nacheinander Mittelwerte gebildet sind; unter IV ist also der Mittelwert m_k der Gruppe k

Tabelle.

I Stoßgröße in mm	II Stoßgröße in Ionenzahlen $\times 10^{-4}$	III Zahl der Stöße	IV Mittelwert
1	0,52	5	
2	1,04	24	
3	1,56	23	23,63
4	2,08	27	26,62
5	2,60	32	27,12
6	3,12	20	26,50
7	3,64	31	26,68
8	4,16	25	28,12
9	4,68	29	30,43
10	5,20	40	31,43
11	5,72	22	30,12
12	6,24	34	29,24
13	6,76	25	30,56
14	7,28	36	32,75
15	7,80	37	33,43
16	8,32	26	34,43
17	8,84	40	38,00
18	9,36	51	38,62
19	9,88	23	34,25
20	10,40	34	31,19
21	10,92	30	30,49
22	11,44	32	28,31
23	11,96	21	22,31
24	12,48	15	17,12
25	13,00	18	14,87
26	13,52	16	14,62
27	14,04	15	13,62
28	14,56	11	11,63
29	15,08	9	10,20
30	15,60	12	8,68
31	16,12	4	6,37
32	16,64	4	4,75
33	17,16	5	4,37
34	17,68	4	4,31
35	18,20	4	4,25
36	18,72	5	4,37
37	19,24	3	4,68
38	19,76	8	4,56
39	20,28	1	3,75
40	20,80	4	3,12
41	21,32	3	2,68
42	21,84	2	
43	22,36	0	

zugeordnet, der sich aus den Stoßzahlen der benachbarten Gruppen berechnet durch

$$m_k = \frac{1}{16}\left(s_{k-2} + 4s_{k-1} + 6s_k + 4s_{k+1} + s_{k+2}\right).$$

Die den Zahlenreihen III und IV entsprechenden Linien sind in der Fig. 2 gezeichnet, außerdem ist hier noch eine punktierte Linie als stetige Verteilungskurve eingefügt.

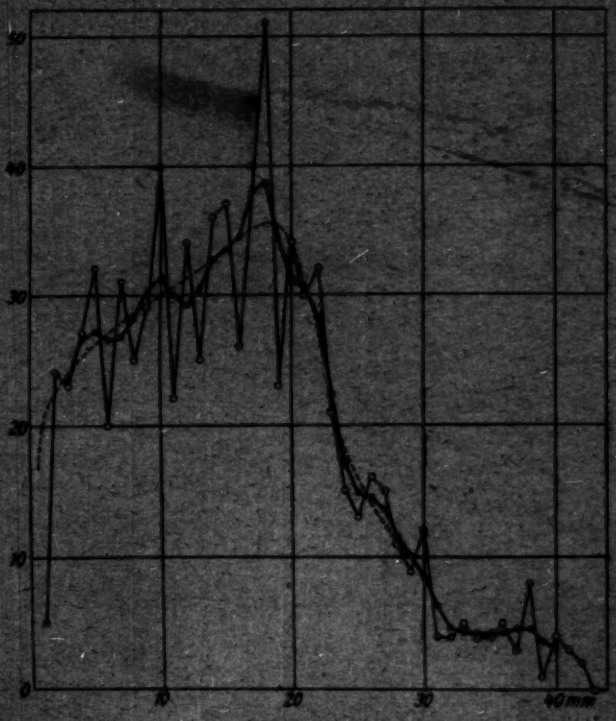


Fig. 2.

Für die Ionisationen ergaben sich folgende Werte: Durchschnittliche Zahl der Stöße = 52 in der Stunde, durchschnittliche Größe = 15,7 mm = 81700 Ionen, Zahl der Stöße pro qcm Oberfläche und Stunde = 0,28. Gesamte α-Ionisation im Durchschnitt = 820 mm in der Stunde = 1190 Ionen in der Sekunde. Gleichförmige Bewegung (zwischen den Stößen) = 910 mm/Stunde = 1320 Ionen/Sek. Reproduktionen von Registrierkurven sind den Arbeiten 1915 und 1917 beigefügt.

4. Der Vergleich zwischen Theorie und Experiment ist in Fig. 3 durchgeführt. Die mit I bezeichnete theoretische Kurve entspricht der Annahme, daß von Radium und seinen Folgeprodukten Gleichgewichtsmengen in das Wandmaterial eingebettet sind. Dann sind die Zahlen der Teilchen, die von jedem Produkt pro ccm Wandmaterial in der Zeiteinheit austreten, einander gleich. Für jedes Produkt ist eine seiner Reichweite entsprechende Verteilungskurve nach dem in § 12

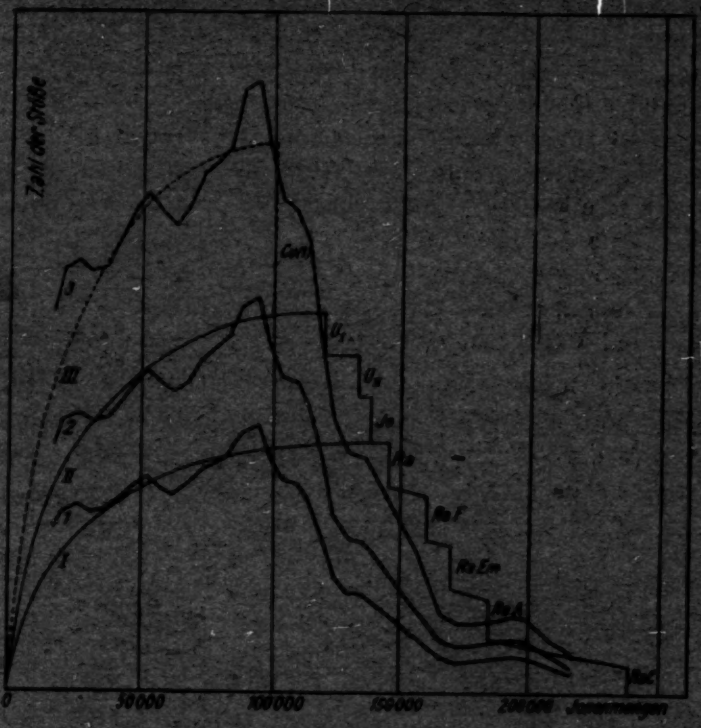


Fig. 3.

gegebenen Verfahren gezeichnet für den Fall, daß die Ionisation längs der Bahn nach der Geigerschen Formel erfolgt. An die durch Überlagerung der einzelnen Verteilungskurven entstandene Kurve I wird die durch Mittelwertsbildung aus den Messungen entstandene Kurve der Fig. 2 mit einem solchen Ordinatenmaßstab — dieser ist ja willkürlich — angelegt, daß die Kurven im oberen Teil sich möglichst nahe sind. Die Abweichung dieser Kurve 1 von I im rechten Teil würde

ergeben, daß beim Experiment die Zahl die erzeugten Ionen pro Stoß in sehr vielen Fällen weit unter dem maximalen Ionisationswert geblieben ist, daß also eine sehr ungenügende Sättigung vorhanden gewesen ist. Es müßten die abgeschiedenen Ionen im Durchschnitt etwa nur 70% der erzeugten gewesen sein. Dies ist nach den Angaben von Moulin bei einem Feld von etwa 20 Volt/cm, wie es in der Kugel während der Registrierungen geherrscht hat, ausgeschlossen. Es müssen also noch außerdem Stoffe vorhanden gewesen sein, die α-Strahlen mit kürzerer Reichweite aussenden. Wenn die Vorgänger des Radiums genommen werden bis herauf zum Uran I, ebenfalls in Gleichgewichtsmengen, so ergibt sich die Kurve II am Schluß mit I identisch. Die mit ihr kombinierte Kurve 2 gibt leidliche Kongruenz. Ihr würde eine Sättigung der Ionisation von etwa 80% entsprechen, ein Wert, der nach den Moulinschen Angaben möglich ist. Wenn eine Sättigung von etwa 90% angenommen wird, so resultiert die Kurve 3. Diese geht bei den kürzeren Stößen weit über die Uran-Radiumfamilie hinaus und würde auf eine neue Radioaktivität hinweisen.

5. Die Deutungsmöglichkeit dieser Abweichung der Kurve 3 von II durch die Annahme einer Aktivität des Messings selber oder des den Hauptbestandteil desselben bildenden Kupfers führt zur Aufstellung folgender Rechnung. Es bleibt ein Reststück der Kurve von einer maximalen Stoßlänge von etwa 100000 Ionen. Nach der Kurvenhöhe würden auf etwa 8 Stöße der Ra-Familie 5 Stöße der unbekannten Herkunft entfallen. Die Aktivität pro Flächeneinheit ist also nach den in § 3 mitgeteilten Zahlen gleich $\frac{5}{13} \cdot 0{,}28 = 0{,}108$ Stöße pro qcm und Stunde. Aus der maximalen Ionenzahl $Z = 100000$ ergibt sich nach der Geigerschen Formel $Z = 6{,}76 \cdot 10^4 \cdot R^{\frac{3}{2}}$ eine Reichweite von 1,80 cm in Luft von 0° und 760 mm.

Da das Bremsvermögen für Cu = 2,46 ist (nach W. H. Bragg, Durchgang der α, β, γ und Röntgenstrahlen durch Materie, S. 54), so würde die Reichweite einer Strahlung in einer Cu-Atmosphäre von gleicher Atomzahl wie Luft bei Normaldruck gleich $\frac{1{,}80}{2{,}46} = 0{,}73$ cm sein.

Die Gesamtzahl der sekundlich aus dem Quadratzentimeter

Metall austretenden Teilchen ist gleich $\frac{5}{18} \cdot \frac{0{,}28}{3600} = 3{,}10^{-5}$. Zwischen den austretenden und den in der Zeiteinheit von der Volumeneinheit ausgesandten Teilchen (N) besteht nach Schweidler[1]) die Beziehung $\frac{NR}{4} = 3{,}10^{-5}$. Die Zahl der Atome in der Volumeneinheit $N_0 = 2{,}71 \cdot 10^{19} \times 2$ angenommen, ergibt sich für das Verhältnis der in der Sekunde zerfallenden Atome zu den vorhandenen

$$\lambda_{Cu} = \frac{N}{N_0} = 3{,}04 \cdot 10^{-24}.$$

Dieser Wert mit dem Werte für Uran ($4{,}4 \cdot 10^{-18}$) verglichen, ergibt

$$\frac{\lambda_{Ur}}{\lambda_{Cu}} = 1{,}45 \cdot 10^{6}.$$

Die Aktivität des Kupfers ist also mindestens 1,5 Millionen Mal geringer wie die des Urans.

Eine Extrapolation nach der Geiger-Nuttallschen Beziehung zwischen Reichweite und Lebensdauer etwa mit den Konstanten der Uran-Radiumfamilie würde für die eben errechnete Zerfallsgeschwindigkeit eine Reichweite von 1,86 cm ergeben, eine Zahl, die der zu Beginn des Paragraphen angenommenen nahe kommt.

6. Als Resultat der näheren Diskussion der Stoßverteilungskurve der α-Aktivität in einem kugelförmigen Metallgefäß ergibt sich, daß es nicht angängig ist, die beobachteten α-Aktivitäten allein auf das Radium und seine Abkömmlinge zu schieben. *Es ist mit Sicherheit das Vorhandensein langlebiger Radioelemente mit kurzer Reichweite nachgewiesen.* Ob es ausreicht, allein auf die Mitglieder der Uranreihe zurückzugreifen, oder ob eine Aktivität des Metalles selbst vorliegt, ist experimentell noch nicht entschieden. Die Diskussion zeigt aber, daß weiter ausgedehnte Versuchsreihen zur Lösung dieser Frage führen müssen.[2]) Für eine α-Aktivität des Kupfers wurde eine obere Grenze ermittelt.

1) E. v. Schweidler, Phys. Ztschr. 14. S. 505 u. 728. 1913.

2) Die Ausdehnung der Versuche auf Hohlkugeln aus Metallen mit hohen Atomgewichten scheint besonders aussichtsreich. Ergab doch Platinfolie einen dreimal so hohen Wert der α-Aktivität pro qcm Oberfläche wie Messing (vgl. die früher zitierte Arbeit in der Elster-Geitel-Festschrift).

7. Mit ähnlichem Resultat wie für die Uranradiumfamilie läßt sich auch für die Thoriumfamilie die Stoßverteilungskurve aufstellen. Die Abweichungen zwischen experimenteller und theoretischer Kurve sind hier noch größer, so daß ein Hinzuziehen von Thoraktivität zur Erklärung der Unterschiede nicht beizutragen vermag.

Die Deutung der Verteilungskurve ist im vorangegangenen ausschließlich auf die Annahme gleichmäßig in der Wandung verteilter radioaktiver Substanzen gestützt worden. Wie die folgenden Betrachtungen zeigen, ist es allein auf dieser Grundlage möglich, in gewisser Übereinstimmung mit dem Experiment zu bleiben, weil nur so das Auftreten von zahlreichen verkürzten Stößen möglich ist. Die Ionisation etwa auf einen Emanationsgehalt der Luft zurückzuführen, ist deswegen unangebracht, weil in § 14 gezeigt wird, daß in luftdicht geschlossenen Gefäßen der Emanationsgehalt auf einen sehr geringen Betrag herabgeht.

Berechnung der Ionenmengenverteilung der α-Stöße innerhalb einer Kugel.

8. Nach den Kenntnissen über die Eigenschaften radioaktiver Substanzen sind verschiedene Arten der Verteilung der Ionenmengen bei α-Stößen innerhalb einer Kugel vorauszusehen. Von bestimmendem Einfluß ist:

1. die Anordnung der Substanz, die die Strahlung aussendet,
   a) als Emanation gleichmäßig innerhalb des Kugelvolumens,
   b) als aktiver Niederschlag in dünner Oberflächenschicht auf der Kugelwandung,
   c) als gleichmäßige Beimengung in der die Kugelwandung bildenden Materie.
2. die Reichweite der α-Strahlung der Substanz und ihr Verhältnis zum Durchmesser der Kugel.

Um Ionenmengenverteilungen zu berechnen sind alle diese Fälle zu sondern. Beobachtete Verteilungen können einem bestimmten Fall entsprechen, oder aber sind durch Superposition verschiedener Strahlungen zu deuten. Zur Berechnung sind ferner Annahmen nötig über die Verteilung der Ione

länge der Bahn des einzelnen α-Teilchens. Für eine erste Orientierung ist die Annahme gleichmäßiger Verteilung als einfachste Grundlage voranzustellen. Eine zweite Annäherung geht von der Geigerschen Formel für die Ionisation längs der Bahn aus. Drittens kann die empirische Ionisationskurve zugrunde gelegt werden.

9. *Ionenmengenverteilung bei Volumenionisierung.* Es ist zunächst die Verteilung der Stoßlängen zu berechnen. Die Zahl der Stöße, die vom ccm in der Sekunde ausgehen, sei gleich N. Da alle Stoßrichtungen gleich wahrscheinlich sind, so verlaufen innerhalb des Richtungskegels $d\omega$ die Zahl $\frac{d\omega}{4\pi} N$. Von den Stößen dieser ausgezeichneten Richtung sind auszusondern die Stöße, deren Länge zwischen L und $L + dL$ liegt. Wenn diese innerhalb der Kugel vom Radius r einerseits durch die Kugelwand begrenzt sein sollen, so müssen sie andererseits (vgl. Fig. 4) von einem Volumen ausgehen, das von zwei Kugelkalotten im Abstand dL begrenzt ist, und dessen Größe gleich ist

Fig. 4.

$$\pi a^2 \, dL. \tag{1}$$

Die Zahl der Stöße in der Sekunde innerhalb des Richtungskegels $d\omega$ und von der Länge L beträgt daher:

$$\begin{cases} N \frac{d\omega}{4\pi} \pi a^2 \, dL \\ = N \frac{d\omega}{4\pi} \pi \left(r^2 - \frac{L^2}{4} \right) dL, \end{cases} \tag{2}$$

und, da alle Richtungen wegen der kugelförmigen Begrenzung gleichberechtigt sind, für beliebige Richtungen:

$$dZ = f(L) \, dL = \pi N \left(r^2 - \frac{L^2}{4} \right) dL. \tag{3}$$

Auf diese Stoßgrößenverteilung gründet sich die Berechnung der Ionenmengenverteilung.

a) *Bei Annahme konstanter Ionisation längs der Bahn.* Die Gesamtzahl der Ionen eines Stoßes werde mit J bezeichnet, die Zahl der Ionen pro cm mit j. Dann ist

$$(4) \qquad \begin{cases} J = jL \\ dJ = j\,dL. \end{cases}$$

Die Zahl der Stöße, deren Ionenmenge zwischen J und $J + dJ$ liegt, ist dann gegeben durch:

$$(5) \qquad dZ = f(J)\,dJ = \pi N\left(r^2 - \frac{J^2}{4j^2}\right)\frac{dJ}{j}.$$

Dieser Ausdruck gibt die Verteilung, wenn die Reichweite größer ist als der Kugeldurchmesser, er wird Null für $J = 2rj$, dem Maximalwert der Ionisation, die bei Stößen in Richtung des Durchmessers von einer Wand zur andern auftritt. Ist jedoch die Reichweite R kleiner als $2r$, so gilt die vorstehende Betrachtung nur für Werte von L, die kleiner als R sind, die übrigen Stöße verlaufen ungehindert und erreichen alle die Ionenmenge $J_{max} = Rj$. Es berechnet sich dann die Zahl der gehinderten Stöße

$$(6) \qquad \frac{\pi N}{j}\int_0^{J_{max}}\left(r^2 - \frac{J^2}{4j^2}\right)dJ = \pi N R\left(r^2 - \frac{R^2}{12}\right)$$

und für die ganze Stoßverteilung ergibt sich

$$(7) \qquad \begin{cases} \text{Zahl der gehinderten Stöße } \frac{4}{3}\pi N\left(\frac{3}{4}Rr^2 - \frac{R^3}{16}\right), \\ \quad \text{„ „ vollkommenen „ } \frac{4}{3}\pi N\left(r^3 - \frac{3}{4}Rr^2 + \frac{R^3}{16}\right), \\ \text{Gesamtzahl aller Stöße } \frac{4}{3}\pi N r^3. \end{cases}$$

b) *Bei Voraussetzung des Geigerschen Gesetzes.* Bezeichnet x die Strecke, die das Teilchen noch bis zum Endpunkt der Bahn zurückzulegen hat, so ist nach Geiger die Ionisation, die auf dieser Reststrecke entsteht, gleich

$$(8) \qquad J = 6{,}74 \cdot 10^4 \cdot x^{3/2} = \left(\frac{x}{\delta}\right)^{3/2}; \quad \delta = \frac{1}{6{,}74^{2/3}} \cdot 10^{-8},$$

andererseits folgt aus dieser Formel, daß die Ionisation, die auf einer Strecke L entsteht — L gemessen von der Ursprungsstelle des α-Teilchens —, gegeben ist durch

$$(9) \qquad J = J_{max} - \left(\frac{R - L}{\delta}\right)^{3/2},$$

wo $J_{max} = \left(\frac{R}{\delta}\right)^{3/2}$ die Ionenzahl für einen ungehinderten Stoß bedeutet. Wird diese Beziehung zwischen J und L in die Gleichung (8) eingetragen, so ergibt sich für die Ionenverteilung

$$(10) \quad \left\{ dZ = f(J)\,dJ = \frac{3}{2}\pi N \delta (J_{max} - J)^{1/2} \left[r^2 - \frac{\delta^2}{4}(J_{max}^{1/2} - (J_{max} - J)^{1/2})^2 \right] dJ . \right.$$

10. *Ionenmengenverteilung bei Oberflächenschicht.* Es bezeichne N die Zahl der Teilchen, die vom qcm Oberfläche fortgeschleudert werden. Eine einfache Betrachtung der in den verschiedenen Richtungen zur Verfügung stehenden Längen ergibt als Resultat:

$$(11) \quad dZ = f(L)\,dL = \pi N r\,dL,$$

d. h. gleichmäßige Verteilung der Stoßlängen.

a) Gleichförmige Ionisation. Mit Benutzung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen:

$$(12) \quad dZ = f(J) \cdot dJ = \pi N r \frac{dJ}{j} .$$

Diese Gleichung, die besagt, daß die Verteilungskurve der Ionenmengen eine Parallele zur Abszissenachse ist, gilt jedoch nur, wenn die Reichweite größer ist als der Kugeldurchmesser, die Ionisationen also durch die zur Verfügung stehenden Stoßlängen begrenzt sind. Ist die Reichweite kleiner, so verläuft ein Bruchteil der Stöße ungehindert und diesen Stößen entsprechen Vollionisationen $J_0 = Rj$. Es ist dann:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Zahl der Vollstöße} & = \pi N r (2r - R) \\ \text{„ „ begrenzten Stöße} & = \pi N r R \\ \text{Gesamtzahl aller Stöße} & = 2\pi N r^2 . \end{array} \right.$$

b) Bei Ionisation nach der Geigerschen Formel. Der aus (8) sich ergebende Differentialausdruck in (11) eingesetzt ergibt:

$$(14) \quad dZ = f(J) \cdot dJ = \tfrac{1}{2}\pi N r \delta \cdot (J_0 - J)^{1/2} \cdot dJ .$$

11. *Ionenmengenverteilung bei gleichmäßiger Beimengung des radioaktiven Stoffes zum Wandmaterial.* Die Zahl der α-Teilchen, die in der Zeiteinheit in der Richtung ϑ, φ aus dem Flächenstück dq austreten, ist gleich dem Inhalt des schiefen Zylinders

von der Länge ϱ — wo ϱ die Reichweite der Strahlung innerhalb der Wandmaterie bedeutet — multipliziert mit der Zahl der im ccm in der Zeiteinheit emittierenden Atome (N) und multipliziert mit dem Bruchteil der Einheitskugel, der von dem Richtungskegel ($d\vartheta$, $d\varphi$) ausgeschnitten wird. Diese Zahl ist gleich

$$(15) \qquad dq \cdot \varrho \cdot \cos\vartheta \cdot N \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{4\pi}.$$

Alle Teilchen zusammengefaßt, die unter gleichem Winkel ϑ gegen die Normale zur Oberfläche fliegen, ergibt:

$$(16) \qquad \tfrac{1}{2}\, dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Nach ϑ summiert zwischen den Grenzen 0 und 90° ergibt sich die Gesamtzahl aller austretenden α-Teilchen zu

$$(17) \qquad \tfrac{1}{4}\varrho N\, dq.$$

Dieser Ansatz kann zur Berechnung der Strahlungsverhältnisse im Innern der betrachteten Kugel herangezogen werden, weil die Bedingung erfüllt ist, daß die Größe ϱ klein ist gegen den Kugelradius und kleiner wie die Wandstärke der Kugelwandung. Die Richtungsverteilung der Strahlung, die von jedem Oberflächenelement ausgeht, ist die oben angegebene und außerdem sind in jeder Richtung alle Reichweiten von 0 bis R, je nach der Tiefe, aus der die Strahlung kommt, gleichmäßig verteilt.

a) Berechnung der Ionenmengenverteilung unter Annahme gleichmäßiger Ionisierung längs der Bahn. Zunächst seien diejenigen Teilchen betrachtet, deren Austrittsreichweite die zwischen 0 und R gelegene Größe s hat und die in solchen Richtungen fliegen, daß sie innerhalb der Kugel die ganze Ionisationsbahn frei durchlaufen können. Sie bilden von der Gesamtzahl den Bruchteil

$$(18) \qquad \frac{ds}{R}.$$

Der von ihnen unter einer Richtung ϑ gegen die Normale fliegende Teil ist

$$(19) \qquad \tfrac{1}{2}\, dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, \frac{ds}{R}.$$

Die Gesamtheit aller frei endigenden Bahnen liegt innerhalb

eines Kegels, dessen Öffnungswinkel ϑ_0 an die Bedingung gebunden ist

$$\cos \vartheta_0 = \frac{s}{2r}. \tag{20}$$

Die Gesamtzahl ergibt sich also zu

$$\tfrac{1}{4} dq \cdot \varrho \cdot N \cdot (1 - \cos^2 \vartheta) \frac{ds}{R}. \tag{21}$$

Diese Teilchen haben alle eine zwischen s und $s + ds$ liegende Reichweite. Außerdem durchfliegen noch alle diejenigen Teilchen die Strecke s, die unter dem Winkel ϑ_0 ausgehen und eine Reichweite haben, die zwischen s und R liegt. Die Zahl dieser Teilchen ist:

$$\tfrac{1}{2} dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0 \, d\vartheta \frac{R - s}{R}, \tag{22}$$

oder, unter Benutzung der Beziehung (20),

$$\tfrac{1}{2} dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \frac{s \, ds}{4r^2} \frac{R - s}{R}. \tag{23}$$

Für die Gesamtzahl aller aus dem Flächenelement dq austretenden Teilchen, die die Strecke s frei durchfliegen, ergibt sich durch Addition beider Anteile

$$\frac{dq \cdot \varrho \cdot N \, ds}{16 r^2} \frac{}{R} (4r^2 + 2Rs - 3s^2). \tag{24}$$

Werden statt der Stoßlängen die Ionisationen als Variable eingeführt und an Stelle des Flächenelementes die Oberfläche der ganzen Kugel, so ergibt sich der Gesamteffekt:

$$dZ = \frac{r^2 \pi \varrho N}{J_0^2 J_{max}} (J_0^2 + 2 J_{max} J - 3 J^2) \, dJ. \tag{25}$$

Hierbei ist gesetzt:

$2rj = J_0$ die gesamte Ionenmenge, die bei einem Stoß entstehen würde, bei dem ein ganzer Durchmesser durchlaufen wird.

$Rj = J_{max}$ die Ionenmenge, die bei Durchlaufung der vollen Reichweite entsteht.

b) Berechnung der Ionenmengenverteilung unter Annahme der Ionisierung nach dem Geigerschen Gesetz. Es ist in diesem Falle nicht möglich, die Formel für die Berechnung explizit zu entwickeln, sondern die Kugel muß in Gebiete eingeteilt werden, innerhalb der die zur Verfügung stehende freie

Stoßlänge als konstant angenommen wird. Die gesamte Verteilung muß dann durch Überlagerung der Verteilungen der einzelnen Zonen ermittelt werden. Der Gang der Rechnung ist folgender:

Im Gebiet zur Verfügung stehende freie Stoßlänge gleich A.

Alle Teilchen, deren Reichweite zwischen s und $s + ds$ liegt, und die den Bruchteil ds/R bilden, fallen in das Ionisierungsintervall dJ, das mit ds in der Beziehung steht

1. falls s kleiner als A:

$$\begin{cases} J = 6{,}74 \cdot 10^4 \cdot s^{3/2} \\ dJ = 6{,}74 \cdot 10^4 \cdot \frac{3}{2} s^{1/2} ds. \end{cases} \tag{26}$$

2. falls s größer als A:

$$\begin{cases} J = 6{,}74 \cdot 10^4 [s^{3/2} - (s - A)^{3/2}] \\ dJ = 6{,}74 \cdot 10^4 \cdot \frac{3}{2} [s^{1/2} - (s - A)^{1/2}] ds. \end{cases} \tag{27}$$

Aus diesen Formeln ergibt sich für jeden s-Wert die erzielte Ionisation und die Zahl der Teilchen im Intervall. Für die praktische Durchführung der umständlichen numerischen Rechnung wurden für A Stufen angenommen von je 1 cm Höhenunterschied. Für jede Stufe ergibt sich ein bestimmter Kugelabschnitt, für den die wahrscheinliche Gesamtzahl der Stöße nach (16) zu berechnen ist. Die Anteile von 1. und 2. sind für gleiche Ionisationen zu summieren. Die erhaltenen Werte können zur Konstruktion einer stetigen Verteilungskurve benutzt werden. Auf Einzelheiten dieser Rechnung soll nicht eingegangen werden.

12. Die verschiedenen Verteilungen sind in Fig. 5 übersichtlich zusammengestellt. Hierbei ist angenommen, daß eine Kugel von 4 cm Radius und eine Reichweite der Substanz von 8 cm vorliegt. Die punktierten Kurven entsprechen der Annahme gleichmäßiger Ionisation, die ausgezogenen Kurven der Geigerschen Ionisation; die Zahlen entsprechen den drei Fällen: Volumstrahlung, Oberflächenstrahlung, Tiefenstrahlung.

Liegt jedoch eine Substanz vor, deren Reichweite kürzer ist als der Durchmesser der Kugel, so treten bei Volum- (Fall 1) und Oberflächenstrahlung (Fall 2) neben den durch die Gefäßdimensionen verkürzten Stößen auch vollkommene

Stöße auf in einer Anzahl, die sich nach den Formeln (7) und (13) berechnet. Zur Erläuterung der Verhältnisse diene die Fig. 6. Hier ist angenommen (Kurve I), daß in einer Kugel

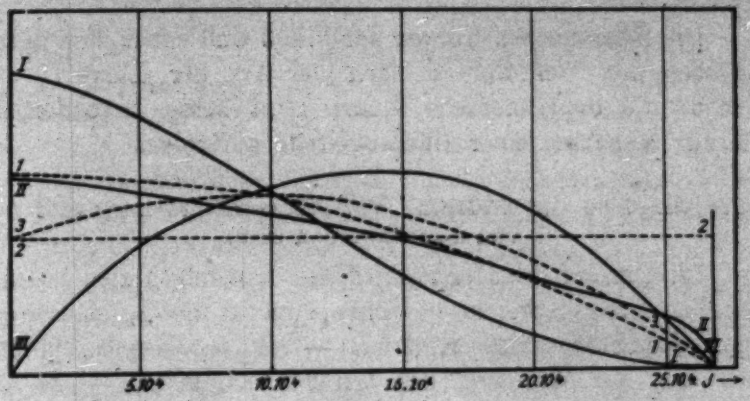


Fig. 5.

von 4 cm Radius Ra-Emanation enthalten ist, Reichweite 4,0 cm. Die nach Formel (10) gezeichnete Kurve nähert sich für $J = 169000$ der Null. Um aber die Zahl der Vollstöße

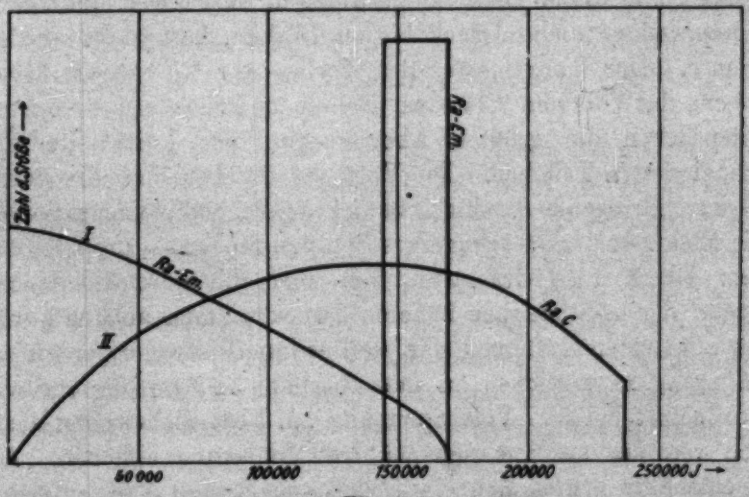


Fig. 6.

(31,3 Proz.) auch in der Figur ersichtlich zu machen, ist am Schluß ein Rechteck endlicher Breite eingezeichnet, dessen Flächeninhalt der Zahl der Vollstöße entspricht. Die Kurve II

gibt die Verteilung für gleichmäßig der Wand der Kugel gleicher Größe beigemengtes RaC (Reichweite 6,9 cm). Die Verteilungskurve bricht ohne Häufungsstelle beim Maximalwert ab.

Die theoretischen Kurven der Fig. 3 sind entstanden durch Überlagerung von Kurven nach der Art der Kurve II der Fig. 6; die experimentelle Kurve zeigt keine Besonderheit, die zur Annahme einer Häufungsstelle auffordert.

Über Versuche zur Erzielung von Räumen, die möglichst frei von α-Ionisationen sind.

13. Um genauere experimentelle Grundlagen zur Deutung der Verteilungskurve zu gewinnen, war es nötig, eine Trennung der Stöße nach Herkunft — ob aus der Luftfüllung oder aus der Wandung des Gefäßes stammend — zu bewirken. Zur Verkleinerung des Wandeffektes gegen die Wirkung des Gases gab es die beiden Mittel: Reduktion der Wandoberfläche durch Ersetzung der massiven Wand durch ein weitmaschiges Netz und Erhöhung des Gasdruckes. Es wurde daher ein aus feinen Platindrähten zusammengeschweißter Netzkorb in einem Gefäß aufgehängt, in dem durch eine kleine Kompressionspumpe Druck bis zu 15 Atm. hergestellt werden konnte. Der Durchmesser des Korbes war 1,5 cm, die Höhe 1,8 cm, das Volumen 3,17 ccm. Bei einem Druck von 4—5 Atm. entsprachen die größten Abmessungen der Reichweite der schnellsten α-Teilchen. Die Versuche ergaben, daß die durch die durchdringende Strahlung bewirkte gleichmäßige Ionisation — die Elektrometerbewegung zwischen den Stößen — proportional dem Druck im Gefäß war, daß aber die durchschnittliche Größe der α-Stöße bei höheren Drucken stark abhängig von der angelegten Spannung war, weil es immer schwieriger wurde, Sättigung zu erreichen, so daß oberhalb 12 Atm. die α-Stöße sich selbst bei 500 Volt Spannung am Netz nicht mehr deutlich von der starken gleichmäßigen Ionisation abhoben. Als zweckmäßig erwies sich ein Druck von etwa 5 Atm. Hierbei war die Zahl der beobachteten α-Stöße bei 240 Volt und 480 Volt die gleiche, also wurden alle Stöße konstatiert; die durchschnittliche Größe der Stöße war bei 80 Volt 39000 Ionen, bei 240 Volt 57000 Ionen, bei 480 Volt 74000 Ionen.

Bei 5 Atm. und 240 Volt ergaben sich folgende Effekte bei verschiedener Füllung des Gefäßes:

Luft durch Wattefilter aus dem Zimmer entnommen .	14,5	Stöße/Stde.
CO_2 aus Bombe (mit Wattefilter)	4,5	„
CO_2 aus anderer Bombe (mit Filter)	2,8	„
Luft aus großer Bombe (unter 200 Atm. Druck stehend)	2,0	„
dgl. am nächsten Tage	3,2	„
dgl. nach 2 Tagen	5,2	„
„ „ 4 „	9,2	„
„ „ 6 „	8,6	„

Die Registrierungen wurden immer über 4 Stunden erstreckt und auch wiederholt. Die Messungen zeigen, daß Gase unter Abschluß sehr geringe Aktivität aufweisen können, speziell wenn sie aus einer Bombe, wo sie unter hohem Druck standen, entnommen werden. Blieb die Luft tagelang im Beobachtungsgefäß, so stieg die Radioaktivität an. Die Bildungsgeschwindigkeit entsprach ungefähr der Radiumemanation. Offenbar stammt diese Aktivität von einem Radiumgehalt der Wandungen des äußeren Druckgefäßes, das aus roh bearbeiteten Eisenteilen zusammengesetzt war. Daß die Aktivität der Bombenluft so gering ist, erklärt sich daher, daß ein eventuell auch in der Bombenluft vorhandener Emanationsgehalt, der mit der Bombenwandung im Gleichgewicht ist, bei Ausdehnung auf kleinere Drucke proportional der Druckabnahme verdünnt wird.

14. Weitere Versuche wurden bei Atmosphärendruck ausgeführt mit einem Drahtgeflecht von sehr großer Maschenweite, das ungefähr einer Kugel von 8 cm Durchmesser entsprach, aufgehängt in einem großen Zinkgefäß von solchen Dimensionen, daß die α-Strahlung der Wandung nicht in den Kugelraum eintreten konnte. Der Deckel des Zinkgefäßes war durch eine Öldichtung abgeschlossen. Der untere Teil der zentralen Elektrode war durch eine Drahtspirale, die auf Nullpotential gehalten war, vor übertretenden Ladungen geschützt. Es wurden zwei verschiedene Drahtkugeln verwandt. Beide waren aus Kupferdraht von 0,2 mm Durchmesser gebogen. Bei dem ersten Netz war eine Maschenweite von etwa 1,5 cm hergestellt. Die halbe Drahtoberfläche, von der wirksame Strahlen ausgehen konnten, betrug 6,5 qcm. Das Verhältnis halbe Drahtoberfläche/Kugeloberfläche betrug 1/31.

Bei dem zweiten Netz waren nur Drähte gezogen, die größte Kreise bildeten in drei zu einander senkrechten Richtungen; die halbe Drahtoberfläche war hier nur 2,25 qcm, das Verhältnis zur Kugeloberfläche nur 1/112 (Fig. 7).

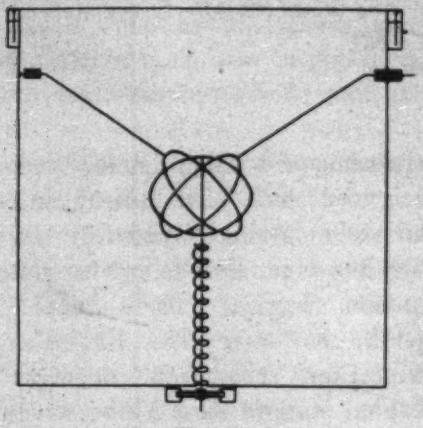


Fig. 7.

Die Resultate waren ähnlich denen im Druckgefäß. Nur zeigte sich, daß im Zinkgefäß eine Ra-Emanationsentwicklung wie im Druckgefäß höchstens spurenweise vorhanden war. Mit Netz II glückte es, ganz außerordentlich geringe Ionisationen zu erzielen; es ist zu bedenken, daß es sich hier um ein Volumen von 260 ccm handelte. Im einzelnen wurden folgende Zahlen gewonnen:

	Stöße pro Stunde	
	Netz I	Netz II
Zimmerluft ohne Absorption	58	37
„ mit „	—	6,6
Bombenluft ohne „	29	4,8
„ mit „	19	4,4
CO_2 (aus Bombe) ohne Absorption	—	8,1
Außenluft ohne Absorption	—	9,6

Die betreffenden Füllungen strömten immer mehrere Stunden vor der Registrierung durch das Gefäß, so daß die radioaktiven Niederschläge sich in Gleichgewichtsmengen bilden konnten. Für die Absorption wurden zwei 1 m lange und ca. 40 mm starke Glasrohre vorgesehen, die mit ausgeglühter Holzkohle gefüllt waren.

Das Verhältnis der Stoßzahlen für Bombenluft mit Absorption bei Netz I und Netz II ist ungefähr gleich dem Verhältnis der Drahtoberflächen. Man ist versucht, daraus zu schließen, daß die Restaktivität im wesentlichen auf radioaktiven Stößen beruht, die von den Drähten ausgehen.

Beobachtungskurven, die mit Netz II aufgenommen sind, sind in der Fig. I und II der Tafel III, die zu der Annalenarbeit (**52**. S. 665. 1917) gehört, wiedergegeben. Wenn die Stoßzahlen auf 3—4 Stöße in der Stunde herabgehen, kann die Neigung der Geraden, die durch gleichförmige Ionisation infolge durchdringender Strahlung bedingt ist, mit großer Genauigkeit gemessen werden. Unmittelbar aufeinanderfolgende Teile der Registrierkurven ergaben Übereinstimmung der Größe der durchdringenden Strahlung bis auf 1—2‰ genau. Die Zahl der Ionen, die so im ganzen Volumen entstanden, wurde durchschnittlich zu etwa 1003 Ionen in der Sekunde ermittelt, d. h. auf den ccm kamen etwa 3,88 Ionenbildungen in der Sekunde.

Die Netzanordnung ist sehr empfindlich auf Änderungen der durchdringenden Strahlung. Die Strahlung stärkerer Radiumpräparate konnte durch dicke Mauern aus entfernteren Teilen des Gebäudes her beobachtet werden. Die Strahlung eines Gefäßes, das ein Kaliumsalz enthält, kann in wenigen Minuten gemessen werden.

15. Zum Schluß sei noch referiert über einige Meßreihen, die an einer Steinsalzhohlkugel angestellt wurden. Aus großen Blöcken Steinsalz aus dem Kaliwerk Hedwigsburg wurden zwei Klötze ausgeschnitten, mit ebenen Flächen versehen und die Hälften einer 8 cm-Kugel eingeschnitten. Nach der Bearbeitung wurden die Flächen mit grobem Schmirgel abgerieben, der Staub mit kräftigem Strahl aus einer CO_2-Bombe abgeblasen und dann sofort in das Zinkgefäß hineingebracht, das mit CO_2 gefüllt wurde. Man konnte vermuten, daß auf diese Weise sich ein Raum gewinnen ließ, der eine sehr geringe α-Aktivität zeigte. Denn K. Bergwitz[1]) hat festgestellt durch Messungen im Bergwerk Hedwigsburg, daß in Räumen, die allseitig von dicken Schichten Steinsalz umgeben sind, ein sehr geringer

1) K. Bergwitz, Elster-Geitel-Festschrift S. 585. 1915.

Wert der durchdringenden Strahlung gefunden wird. Offenbar liegt ein sehr geringer Radiumgehalt dieses Minerals vor. Die Messungen in der Steinsalzhohlkugel ergaben Stoßzahlen von 29—32 Stößen/Stunde; der gleichförmige Gang war 3380 Ionen-Stunde. Die α-Aktivität war also kleiner als in der Messingkugel, aber doch von gleicher Größenordnung.

Zusammenfassung.

Es wird eine Methode angegeben, wie durch Beobachtung der Größe der einzelnen α-Ionisationen auf die Herkunft der α-Teilchen geschlossen werden kann, eine Methode, die zur Entdeckung neuer Aktivitäten führen kann. Die Ionenmengen-Verteilungskurven der α-Stöße in einer Kugel werden berechnet und mit der Statistik von 810 Stößen in einer Messinghohlkugel verglichen. Es zeigt sich, daß zur Erklärung der Beobachtungen die Strahlung des Radiums und seiner Abkömmlinge nicht ausreicht, sondern daß langlebige radioaktive Substanzen mit Strahlungen kurzer Reichweite außerdem vorhanden sein müssen. Die Möglichkeit einer Aktivität, etwa des Cu, wird diskutiert. Es wird gezeigt, wie Räume hergestellt werden können, die eine sehr geringe α-Ionisation aufweisen.

Die vorstehende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Königsberg ausgeführt. Herrn Prof. W. Kaufmann bin ich für liebenswürdige Gewährung der Mittel zu großem Dank verpflichtet.

Königsberg, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 3. April 1920.)

5. *Bemerkung zu der Arbeit von W. Hahnemann und H. Hecht: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“; von Max Wien.*

In der oben genannten Arbeit[1]) werden Messungen über die in einem Telephon verzehrte elektrische Leistung angestellt, wobei sich eine interessante Abhängigkeit dieser Leistung von Größe und Form des Luftraums vor und hinter der Membran ergibt, und auch davon, ob das Telephon offen oder mit geschlossener Schallöffnung oder an das Ohr gedrückt verwandt wurde. Hieraus wird dann der akustische Wirkungsgrad, d. h. das Verhältnis der auf den Gehörgang übertragenen Leistung zu der aufgewandten Leistung für den Tonbereich von 500 bis 1000 Perioden zu 1 bis 10 pro Mille berechnet. Schließlich wird eine Anwendung dieser Zahl auf die Schwellenempfindlichkeit des menschlichen Ohres für 1000 Perioden gemacht, und diese zu $1{,}9 \cdot 19^{-17}$ Watt gefunden, während die Verfasser aus älteren Messungen von mir[2]) für denselben Ton, eine Schwellenleistung von nur $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Watt, also einen etwa 120mal kleineren Wert berechnen. Die Gründe für diese recht erhebliche Differenz suchen Hahnemann und Hecht in meiner Versuchsanordnung.

Diese Versuchsanordnung war so einfach wie möglich und gestattete die Schallausbreitung theoretisch zu berechnen. Es wurde ein Telephon in einer Öffnung eines großen — theoretisch unendlichen — Blechschirmes so befestigt, daß die Telephonplatte mit der Ebene des Schirmes zusammenfiel (vgl. Fig. 1), und der Ton des Telephons in einer Entfernung von 30 cm beobachtet. Der Strom des Telephons wurde so lange geschwächt, bis der Ton gerade nicht mehr hörbar war. Die Schallintensität in O läßt sich bei gegebener Plattengröße und Amplitude berechnen. Die von mir damals gegebene Formel stimmt mit dem kürzlich von Hahnemann und Hecht[3]) auf ganz anderem Wege abgeleiteten Ausdruck bis auf eine unwesentliche Abweichung in einem Zahlenfaktor überein.

1) W. Hahnemann u. H. Hecht, Ann. d. Phys. 60. S. 454. 1919.
2) M. Wien, Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie 97. S. 1. 1903.
3) W. Hahnemann u. H. Hecht, Physik. Zeitschr. 18. S. 267. 1917.

Hahnemann und Hecht vermuten nun, daß bei meiner Anordnung Fehler dadurch entstanden seien, daß

1. der Kopf des Beobachters die Schallausbreitung stört und der Gehörgang als „Schallsenke" wirkt,

2. meine Annahme, daß die Telephonamplitude proportional der Stromamplitude abnimmt, nicht richtig sei.

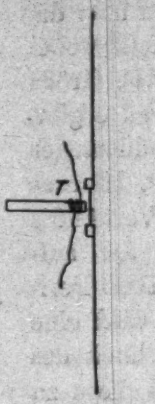


Fig. 1.

Das Vorhandensein und die Größenordnung der ersten Fehlerquelle suchen die Verfasser durch besondere Beobachtungen an einer der meinigen nachgebildeten Anordnung festzustellen. Dabei wurde der Schall durch eine längere Glasröhre dem Ohre zugeführt, die einmal in *O* frei endete, das andere Mal von einer künstlichen Kopfhälfte mit Ohrmuschel aus Gips umgeben werden konnte, so daß in diesem Fall das Rohr gewissermaßen den Gehörgang bildete. Die Versuche ergaben einen starken Einfluß des Gipsmodells auf die durch die Röhre dem Ohr zugeführte Tonenergie.

Beide oben genannten Fehlerquellen habe ich selbstverständlich schon in meiner Arbeit besprochen und geprüft.

Nach Rayleigh bewirkt ein Gegenstand eine merkliche Störung der Schallausbreitung, wenn seine Dimensionen von derselben Größenordnung sind, wie die Wellenlänge des Tones. Bei höheren Tönen müssen daher durch den Kopf des Hörenden Störungen hervorgerufen werden, jedoch können diese Störungen an dem Kopf infolge der Nachgiebigkeit der weichen Haut nicht so groß sein als sie an einem völlig harten Gegenstand, z. B. an einem Gipsmodell des Kopfes sein würden. Hahnemann und Hecht haben ja selbst nachgewiesen, daß die nachgiebigen Wände des äußeren Gehörganges erhebliche Teile der Schallenergie verzehren. Immerhin ist dies eine ernste Fehlerquelle; sie wurde bei meinen Versuchen prinzipiell umgangen, indem Ohr und Telephon (*O* und *T* in Fig. 1) vertauscht wurden, wobei die Gültigkeit des Helmholtzschen Reziprozitätsgesetzes für die damalige Anordnung noch durch besondere Versuche nachgewiesen wurde.

Die Dimensionen des Telephons waren klein gegen die Wellenlänge, so daß von diesem keine Störung zu erwarten war.

Der äußere Gehörgang ist etwa 3,5 cm lang, also klein gegen die Wellenlänge des Tones 1000, so daß er nicht als Schallsenke wirken kann, und im Inneren des Gehörganges annähernd die gleichen Dichtigkeitsänderungen vorhanden sein müssen, wie in der Luft außerhalb. Anders werden die Verhältnisse, wenn der Schall durch ein längeres Glasrohr dem Ohre zugeführt wird. Dieses gibt notwendigerweise zu stehenden Schwingungen und Resonanzerscheinungen Veranlassung. Die Stärke der Schwingungen in dem Rohre hängt im hohen Maße von der Tonhöhe und auch von der Umgebung und Form der Öffnung ab, Fragen, die ja schon Helmholtz in seiner Theorie der Luftschwingungen in offenen Röhren behandelt hat.

Hiernach ist es nicht verwunderlich, daß Hahnemann und Hecht bei ihren Versuchen mit einem Gipsmodell des Kopfes und längeren Glasröhren als Zuleitung zum Ohr starke Unterschiede der Schallaufnahme gefunden haben; ein Rückschluß auf meine Versuche kann jedoch daraus nicht gezogen werden, da die Versuchsbedingungen ganz andere waren.

Hahnemann und Hecht suchen weiter eine Fehlerquelle bei der Auswertung meiner Versuche darin, daß ich die Amplitude der Telephonplatte der Stromamplitude proportional angenommen habe.

In meiner Arbeit habe ich ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei der mikroskopischen Ausmessung der Telephonamplituden mit der Stromstärke nicht über den Bereich hinausgegangen wurde, für den der Ausschlag dem Strom proportional war. Dieser Bereich ist, wie seitdem durch W. Kunze[1]) und W. Birnbaum[2]) nachgewiesen ist, außerordentlich groß. Ob nach unten, nach dem Gebiet der ganz schwachen Ströme, der Ausschlag ebenfalls proportional bleibt, läßt sich experimentell nicht mehr nachweisen, weil die Ausschläge schließlich zu klein werden. Es hängt das mit der Frage nach dem Verlauf der Anfangspermeabilität zusammen. Wenn jedoch eine Abweichung vorhanden ist, so würde sie in der Richtung liegen, daß die

1) W. Kunze, Arch. f. Elektrotechnik 2. S. 495. 1914.
2) J. W. Birnbaum, Ann. d. Phys. 49. S. 201. 1916.

Ausschläge und damit die Schwellenleistung tatsächlich noch etwas kleiner sind, als die berechneten.

Beide Fehlerquellen können auf meine Ergebnisse nur einen geringen Einfluß ausgeübt haben, sie reichen jedenfalls nicht aus, um die großen Differenzen der beiderseitigen Werte zu erklären.

Ich möchte hier nicht die Frage erörtern, ob den auf recht umständlichem Wege durch mehrfache Umrechnung und Extrapolation gewonnenen Zahlen der Herren Hahnemann und Hecht eine größere Sicherheit zukommt, sondern nur darauf hinweisen, daß die Differenz sich vielleicht aus dem Umstande erklären läßt, daß die Schwellenleistung in beiden Fällen in verschiedener Weise definiert wurde.

Bei mir wurde die Tonintensität (A) definiert als die Schallenergie, welche im freien Raum in einer Sekunde durch 1 cm² Fläche hindurchwandert. Indem die Fläche des Trommelfells zu 1/3 cm² angenommen wurde, wurde die in das Ohr gelangende Energie einfach $= A/3$ gesetzt[1]) und daraus die Schwellenleistung berechnet.

Hahnemann und Hecht hingegen berechnen die von den weichen Wänden des ganzen Gehörganges und eines Teiles der Ohrmuschel beim Andrücken des Telephons an das Ohr absorbierte Leistung. Wenn wir die Länge des äußeren Gehörganges zu 3,5 cm, den mittleren Durchmesser zu 1 cm annehmen, so haben wir hier allein schon eine absorbierende Oberfläche von 11 cm². Setzen wir die Schallabsorption dieser Weichteile überall als gleich voraus, so müssen wir die berechnete Leistung auf 1/33 reduzieren, um die von dem Trommelfell (1/3 cm²) allein verzehrte Leistung zu erhalten. Nach dieser Reduktion würden die Werte von Hahnemann und Hecht nur noch etwa 3 bis 4 mal so groß sein wie die meinigen — eine Differenz, wie sie durchaus innerhalb der Fehlerquellen bei ein und derselben Methode liegt, die jedoch bei diesen, auf ganz verschiedenem Wege gewonnenen Zahlen, sogar eine auffallend gute Übereinstimmung bedeuten würde.

Jena, Physik. Institut d. Universität, 9. Februar 1920.

1) Dabei blieb es unerörtert, ob wirklich die durch den Gehörgang auf das Trommelfell treffende dort absorbierte Energie mit der so definierten übereinstimmt.

(Eingegangen 12. Februar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.